

Universität Freiburg
Physiklabor für Anfänger, Teil 2
Ferienpraktikum im Wintersemester 2023/2024

Versuch 84

Zählstatistik



7. November 2024

Datum der Durchführung: 12. März 2024

Tutor 

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuches	1
2	Versuch	1
2.1	Aufbau	1
2.2	Durchführung	1
3	Auswertung und Fehleranalyse	2
3.1	Zählrohrkennlinie	2
3.2	Untergrundstrahlung	2
3.3	Kurze Messung mit Präparat	6
3.4	Lange Messung mit Präparat	7
4	Diskussion der Ergebnisse	8
4.1	Übersichtliche Angabe der Endergebnisse	8
4.2	Vergleich mit erwartetem Ergebnis	8
4.2.1	Zählrohrkennlinie	8
4.2.2	Untergrundstrahlung	8
4.2.3	Kurze Messung mit Präparat	8
4.2.4	Lange Messung mit Präparat	9
4.3	Verbesserte Methoden	9
5	Erklärung zur Autorenschaft	9
6	Anhang	10
6.1	Rohdaten mit Vortestat	10
	Literatur	11

1 Ziel des Versuches

Ziel des Versuches ist es, die Zählstatistik zu untersuchen. Dazu werden γ -Photonen mit einem Zählrohr nachgewiesen.

2 Versuch

2.1 Aufbau

Der Aufbau besteht aus einem Hochspannungsnetzteil, einem wie in Abb. 1¹ dargestellten Geiger-Müller-Zählrohr und einem elektronischen Zähler. Das Zählrohr ist fest in einem Gestell verbaut, indem unter diesem ein Bleiblock ist, in dem Cäsium ist. Nach oben hin ist ein Loch im Blei, welches mit einem Bleischieber verschlossen werden kann. Das Präparat sind Uranglas-Perlen.

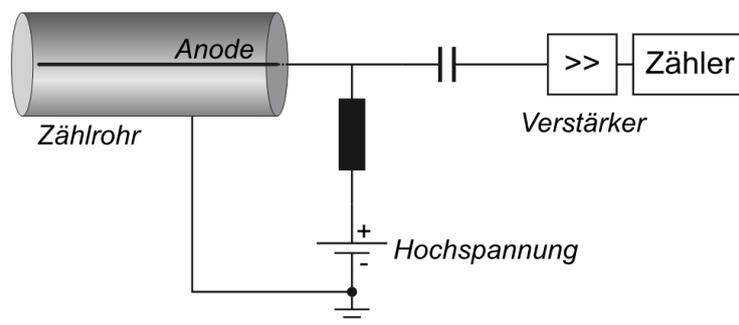


Abbildung 1: Aufbau des Geiger-Müller-Zählrohrs

2.2 Durchführung

Zuerst wird die Zählrohrkennlinie gemessen. Dazu wird der Bleischieber entfernt, um höhere Messwerte zu erzielen. Für unterschiedliche Beschleunigungsspannungen am Zählrohr, werden mit dem elektronischen Zähler die Anzahl der Ereignisse pro Minute bestimmt. Für die nachfolgenden Versuche ist der Bleischieber immer über dem Cäsium, um dieses abzuschirmen. Dabei wird eine geschickte Spannung ausgesucht, welche im Weiteren dauerhaft eingestellt wird.

Als nächstes wird die Untergrundstrahlung gemessen. Dazu wird mindestens 100 mal die Anzahl der Ereignisse x gemessen, welche in 1,2 und 4 Sekunden auftreten.

Anschließend wird das Präparat mit zwei Einzelmessungen untersucht. Dazu werden die Uran-Perlen auf die Holzummantelung des Zählrohrs gelegt. Zuerst wird gemessen, wie viele Ereignisse x in 10 Sekunden auftreten. Anschließend erfolgt eine Langzeitmessung über eine Stunde, in der wieder die Ereignisse gezählt werden.

¹[Pet09]

3 Auswertung und Fehleranalyse

3.1 Zählrohrkennlinie

Für die Zählrohrkennlinie wird die Anzahl der Ereignisse für angelegte Spannungen von $U = 0\text{V}$ bis $U = 650\text{V}$ gemessen. In Abb. 2 ist zu sehen, dass bis zu einer angelegten Spannung von ca. $U < 350\text{V}$ keine Ereignisse gemessen werden. Danach steigt die Anzahl der pro Minute gemessenen Ereignisse x stark an. Ab $U = 360\text{V}$ ist x näherungsweise konstant.

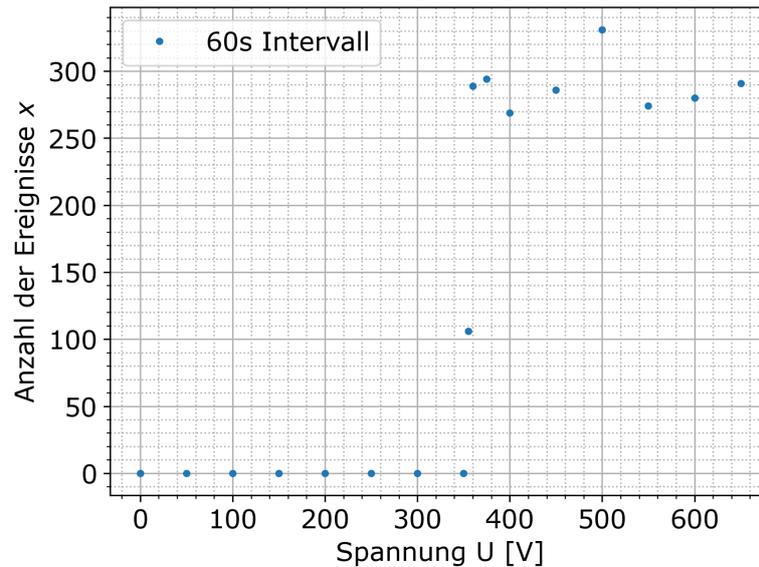


Abbildung 2: Registrierte Ereignisse x in Abhängigkeit der Spannung U in einer Minute

3.2 Untergrundstrahlung

Im Folgenden wird immer die Spannung $U = 450\text{V}$ verwendet um die weiteren Messungen durchzuführen.

In dem Histogramm in Abb. 3 ist die relative Häufigkeit H_x des Auftretens einer bestimmten Anzahl x von Ereignissen in einem Intervall von 1, 2 oder 4 Sekunden, in drei unterschiedlichen Farben dargestellt, man erkennt eine Erhöhung des Erwartungswertes mit längeren Messintervallen. Die statistischen Werte dazu sind Tabelle 1 zu entnehmen. Die Standardabweichung berechnet sich mit der Formel²

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1)$$

²[Bar24a]

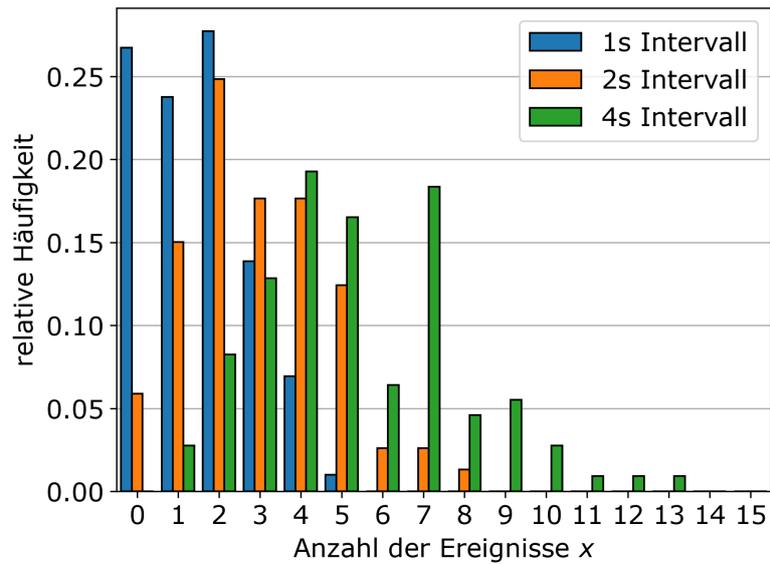


Abbildung 3: Histogramm der Häufigkeit

Intervall [s]	1	2	4
Mittelwert	1,53	2,95	5,31
Varianz	1,61	3,05	5,99
Standardabweichung (Sta.)	1,27	1,75	2,45
Sta. des Mittelwerts	0,13	0,14	0,23
Schiefe (empirisch)	0,44	0,49	0,60
Schiefe (Poisson)	0,81	0,58	0,43
Wölbung (empirisch)	2,37	2,91	3,09
Wölbung (Poisson)	3,65	3,34	3,19

Tabelle 1: Untergrundstrahlung

und die Standardabweichung des Mittelwerts berechnet sich mit

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}. \quad (2)$$

Die Werte für die Schiefe und Wölbung berechnen sich durch die in der Versuchsbeschreibung gegebenen Werte³. Die empirische Schiefe berechnet sich mit der Gleichung:

$$\frac{1}{n} \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right)^3. \quad (3)$$

³[Bar24c]

Für die empirische Wölbung gilt:

$$\frac{1}{n} \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right)^4. \quad (4)$$

Die Poisson Verteilung ist mit der Varianz μ nach der Datenanalyse B⁴ mit folgender Formel gegeben:

$$H_x = f_\mu(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}. \quad (5)$$

Für die Schiefe der Poisson-Verteilung folgt $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ und für die Wölbung $3 + \frac{1}{\sqrt{\mu}}$. Zudem gilt für die Normalverteilung die Gleichung:

$$H_x \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (6)$$

Es ist zu beachten, dass die Schiefe der Normalverteilung 0 ist und die Wölbung der Normalverteilung 3.

Es ist in Tabelle 1 zu erkennen, dass für längere Messzeiten, alle Werte größer werden, die Anpassungen mit der Poisson-Verteilung aber immer kleiner werden. Für die Wölbung kommt die Anpassung dadurch für die 4 Sekunden Messung am nächsten, für die Schiefe ist die Anpassung für die ersten beiden Messungen größer, als die empirische Schiefe, für die Letzte Messung dann kleiner.

In den nachfolgenden Abbildungen sind die einzelnen Histogramme für die drei unterschiedlichen Zeitmessungen zusammen mit der Poisson- und der Normalverteilung dargestellt.

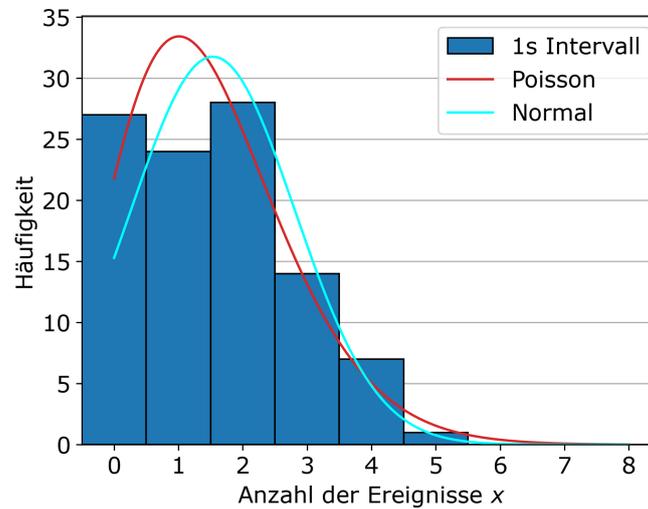


Abbildung 4: Vergleich der Poisson- und Normalverteilung für die Messung $t_1 = 1s$

⁴[Bar24b]

in Abb. 4 sind die Häufigkeit H_x , wie oft ein Ereigniss x in einer Sekunde auftritt dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der Verlauf der Poisson-Verteilung besser zu dem Histogramm passt, als der der Normalverteilung. Vor allem stimmt der Peak der Poisson-Verteilung besser mit dem Verlauf des Histogramms überein.

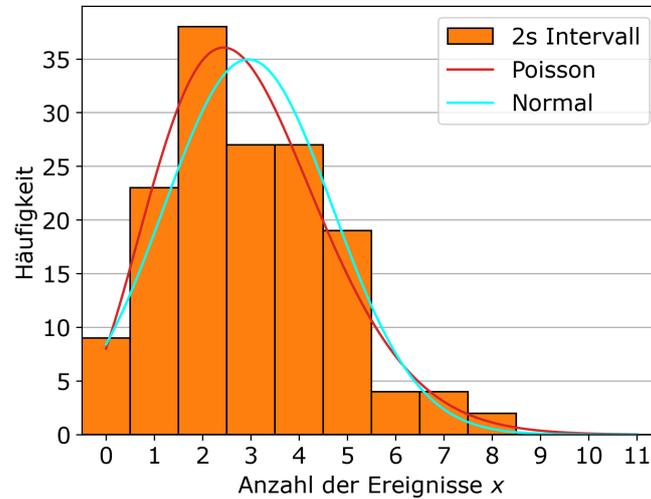


Abbildung 5: Vergleich der Poisson- und Normalverteilung für die Messung $t_2 = 2$ s

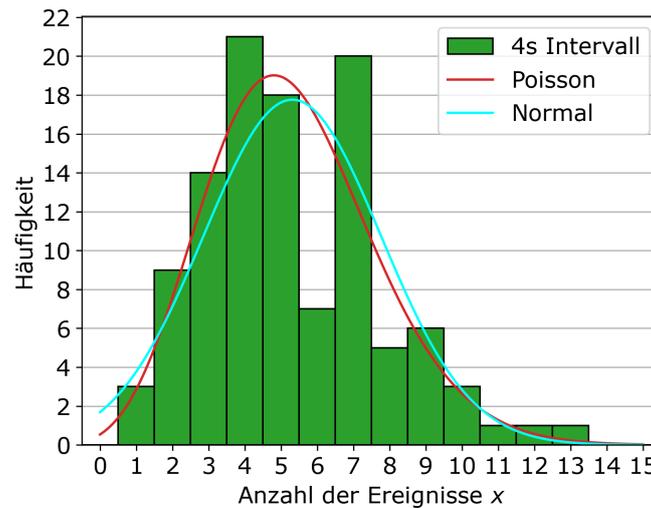


Abbildung 6: Vergleich der Poisson- und Normalverteilung für die Messung $t_3 = 4$ s

Für die Messungen für $t_2 = 2$ s in Abb. 5 und $t_3 = 4$ s in Abb. 6 folgen äquivalente Folgerungen wie zu Abb. 4. Vergleicht man dies mit den Werten in Tabelle 1, passt die Schiefe der Poisson-Verteilung besser zu den Messreihen, aber die Wölbung der Normalverteilung liegt näher an diesen.

Werden die Ergebnisse der drei Messreihen zur Untergrundstrahlung kombiniert, ergibt sich eine Untergrundzählrate von

$$R_u = (1,45 \pm 0,05) \frac{1}{\text{s}}$$

Ereignissen, die pro Sekunde auftreten. Dabei wird die Unsicherheit mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta R_u = \frac{1}{3} \sqrt{\Delta R_{u1}^2 + \Delta R_{u2}^2 + \Delta R_{u3}^2}$$

berechnet.

3.3 Kurze Messung mit Präparat

Bei der kurzen Messung ($t_1 = 10\text{s}$) der Ereignisse die mit den Uranglas-Perlen auftreten, ergibt sich ein Wert von $x = 15$ Ereignissen. Für die Untergrundzählrate folgt hier der Erwartungswert $\mu = 10 \cdot R_u$. Für eine Zufallsvariable y und der Poissonverteilung $f_\mu(y)$ wird damit die Wahrscheinlichkeit für Werte $y \leq x$ mit

$$P_{y \leq x}(\mu) = \sum_{y=0}^x f_\mu(y)$$

und die Wahrscheinlichkeit für $y \geq x$ mit

$$P_{y \geq x}(\mu) = \sum_{y=x}^{\infty} f_\mu(y) = 1 - \sum_{y=0}^{x-1} f_\mu(y)$$

berechnet. Dies ist in Abb. 7 dargestellt. Zudem sind der Erwartungswert μ der Untergrundzählrate mit Konfidenzintervall mit Konfidenzniveau $\gamma = 0,99$ in grün, sowie der gemessene Wert x mit dem erweiterten Normalverteilungsintervall $x \pm k_{0,99} \cdot \sqrt{x}$ eingezeichnet. Zuletzt sind auch der zugehörige P-Wert und die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1 - \gamma = 0,01$ eingetragen⁵.

Es ist zu erkennen, dass der gemessene Wert $x = 15$, innerhalb des Toleranzbereichs der Untergrundzählrate liegt. Der P-Wert für einen einseitigen Hypothesentest mit Nullhypothese: "Das Präparat strahlt nicht" ist $P_{y \geq x}(15, 8) = 61,3\%$. Der Schnittpunkt von α und $P_{y \geq x}$ liegt bei $\mu_\alpha \approx 7,5$ und gibt den linken Rand des Konfidenzbereichs an. Aus dem rot dargestellten, erweiterten Normalverteilungsintervall ergibt sich $\mu = (x \pm 10)$ und damit $I_{rot} = [5; 25]$. Mit der Unsicherheit $\Delta x = \sqrt{15}$ und der Messzeit $t_1 = 10\text{s}$ folgt die Zählrate für kurze Messungen

$$R_k = (1,5 \pm 0,4) \frac{1}{\text{s}}$$

Die Unsicherheit ergibt sich dabei aus $\Delta R = \frac{\Delta x}{t_1}$.

⁵[Bar24c]

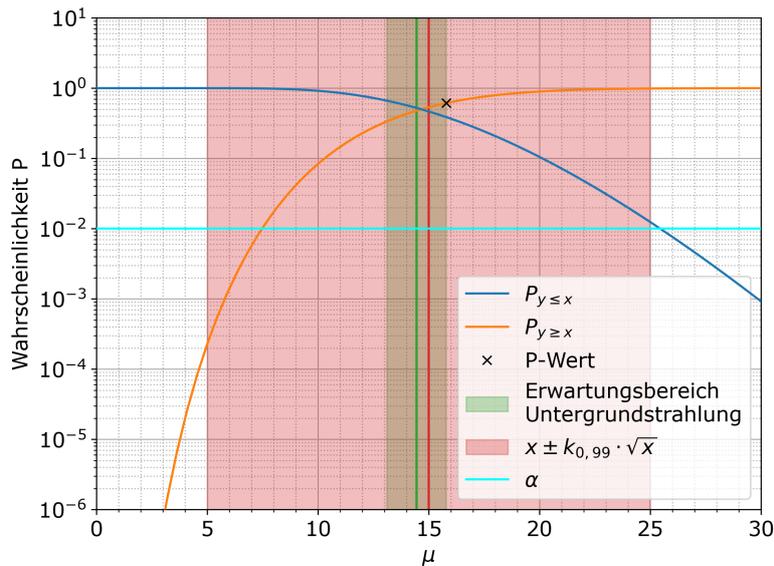


Abbildung 7: $P_{y \leq x}(\mu)$ und $P_{y \geq x}(\mu)$

3.4 Lange Messung mit Präparat

Für die lange Messung des Präparats, wurde eine Messung über $t_2 = 3600\text{s}$ durchgeführt. Bei dieser wurden $x = 5250$ Ereignisse gemessen. Für die Unsicherheit folgt $\Delta x = \sqrt{5250}$. Daraus berechnet sich die Ereignisrate, indem durch die Zeit geteilt wird und die Unsicherheit durch Gauss'sche Fehlerfortpflanzung fortgeführt wird, folgt:

$$R_l = (1,46 \pm 0,02) \frac{1}{\text{s}}$$

Mittels einer angenommenen Poissonverteilung um den Erwartungswert der Untergrundstrahlung wird ein P-Wert errechnet, es gilt:

$$P = \int_{1,46}^{\infty} \frac{1}{0,05\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1,45)^2}{2 \cdot 0,05^2}} dx = 0,43.$$

4 Diskussion der Ergebnisse

4.1 Übersichtliche Angabe der Endergebnisse

Mit der Untersuchung der Zählrohrkennlinie wird die Zählrohrspannung zu $U = 450V$ festgelegt. Die Untergrundstrahlung R_u liegt bei

$$R_u = (1,45 \pm 0,05) \frac{1}{s}.$$

Für das Uran-Perlen Präparat wird für die Messung $t_1 = 10s$, eine Zählrate

$$R_k = (1,5 \pm 0,4) \frac{1}{s}.$$

bestimmt. Für die Langzeitmessung über die Zeit $t_2 = 36000s$ folgt äquivalent der Wert

$$R_l = (1,46 \pm 0,02) \frac{1}{s}.$$

4.2 Vergleich mit erwartetem Ergebnis

4.2.1 Zählrohrkennlinie

Bei der Kennlinie des Zählrohrs ist klar zu erkennen, dass sich ab einer Spannung von ca. $U = 360V$ ein Plateau bildet, dies ist vollkommen im Einklang mit der Erwartung zur Kennlinie eines Geiger-Müller-Zählrohrs. Deshalb ist die für die nachfolgenden Versuchsteile genutzte Spannung von $U = 450V$ aussagekräftig.

4.2.2 Untergrundstrahlung

Bei der Untergrundstrahlung wird im Schnitt eine konstante, aber geringe Ereignisrate erwartet. Die Ergebnisse werden als poissonverteilt erwartet, da die Verteilungsfunktion ohne Erweiterung durch die Gammafunktion, nur natürliche Werte annehmen kann. Dies erkennt man auch an einem Vergleich der Schiefe und Wölbung und an den Funktionen die in Abb. 4 bis Abb. 6 eingezeichnet sind. Dabei ergibt sich aus der Kombination aller drei Messungen die Untergrundzählrate von $R_u = (1,45 \pm 0,05) \frac{1}{s}$.

4.2.3 Kurze Messung mit Präparat

Aus der kurzen ($t_1 = 10s$) Messung mit dem Uranglas-Präparat lässt sich mit einem t-Test

$$t = \frac{|R_k - R_u|}{\sqrt{(\Delta R_k)^2 + (\Delta R_u)^2}} \approx 0,124 \quad (7)$$

keine signifikante Radioaktivität feststellen, die sich von der Untergrundstrahlung abhebt, wie auch schon aus Abb. 7 abzulesen ist. Mit dem P-Wert wird die Nullhypothese

untersucht, dass die Probe nicht radioaktiv ist. Aus dem aus Abb. 7 resultierenden P-Wert $P_{y \geq x}(15, 8) = 61,3\%$ folgt, dass die Wahrscheinlichkeit ähnliche Messergebnisse zu erzielen hoch ist. Damit kann die Nullhypothese nicht verworfen werden und mit dieser Messung ist es nicht bestimmbar, ob das Präparat radioaktiv strahlt oder nicht.

4.2.4 Lange Messung mit Präparat

Auch bei der langen ($t_2 = 3600\text{s}$) Messung mit Präparat lässt sich keine signifikante Radioaktivität feststellen. Sowohl der t-Test mit

$$t = 0,18,$$

der wie in Gleichung (7) durchgeführt wird, als auch der P-Wert mit $P = 0,43$ sind klein bzw. groß und eindeutig nicht signifikant. Somit ist auch hier analog zu Abschnitt 4.2.3 kein aussagekräftiges Ergebnis zu erzielen.

4.3 Verbesserte Methoden

Um weniger Untergrundstrahlung zu messen, kann das Zählrohr und das Präparat vollständig mit Blei gegen die Untergrundstrahlung abgeschirmt werden. Dies würde eindeutiger Ergebnisse liefern. Eine weitaus einfachere Methode zur Verbesserung der Messgenauigkeit wäre es, die Länge der Messung noch mehr zu erhöhen. Dies liegt daran, dass je länger die Messung ist, desto größer wird der absolute Unterschied zwischen gemessenen Ereignissen und durch Untergrundstrahlung erwarteten Ereignissen.

5 Erklärung zur Autorenschaft

Alle auf der Titelseite genannten Autoren haben in gleichen Teilen zu allen Inhalten dieses Protokolls beigetragen.

6 Anhang

6.1 Rohdaten mit Vortestat

12.3.2024 84-Zählstatistik

Zählrohr-Lumineszenz: 60s-Messung

Spannung U in V	Ereignisse x
0	0
50	0
100	0
150	0
200	0
250	0
300	0
350	0
400	206 269
450	286
500	337
550	274
600	280
650	297
375	294
360	285
355	106

Messung zur Untergrundstrahlung:
Daten in Jupiter Notebook

Präparat: Uranglas-Perlen

kurze Messung mit Präparat: 10s-Messung

x = 15 Ereignisse

lange Messung mit Präparat: 3600s-Messung

x = 5250 Ereignisse

Abbildung 8: Rohdaten

Literatur

- [Bar24a] Dr. Christof Bartels. *Datenanalyse A*. 29. Jan. 2024. URL: https://ilias.uni-freiburg.de/goto.php?target=file_3372920_download&client_id=unifreiburg (besucht am 05.03.2024).
- [Bar24b] Dr. Christof Bartels. *Datenanalyse B*. 29. Jan. 2024. URL: https://ilias.uni-freiburg.de/goto.php?target=file_3372919_download&client_id=unifreiburg (besucht am 22.02.2024).
- [Bar24c] Dr. Christof Bartels. *Versuch 84*. 12. Feb. 2024. URL: https://ilias.uni-freiburg.de/goto.php?target=file_3386512_download&client_id=unifreiburg (besucht am 22.02.2024).
- [Pet09] Mira Prior Peter Schaaf Jörn Große-Knetter. *Geiger-Müller-Zählrohr*. 2009. URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/4734> (besucht am 12.03.2024).