

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
PHYSIKLABOR FÜR ANFÄNGER*INNEN, TEIL 2
WINTERSEMESTER 2021/22

VERSUCH 84 AM 17.03.2022

Zählstatistik

Gruppe 211:
18.03.2022

Assistentin:

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuchs	2
2	Aufbau und Durchführung	2
3	Auswertung und Fehleranalyse	4
3.1	Bestimmung einer sinnvollen Detektorspannung über die Zählrohrkennlinie	4
3.2	Untersuchung der Untergrundstrahlung	5
3.3	Kurze Messung des Präparats	8
3.4	Lange Messung des Präparats	12
4	Diskussion der Ergebnisse	14
4.1	Zusammenstellung der Ergebnisse	14
4.2	Fehlerdiskussion	15
4.3	Verbesserte Messmethoden	15
5	Literatur	16
6	Anhang	17
6.1	Grafiken	17
6.2	Laborbuch	18
6.3	Tabellenverzeichnis	21
6.4	Abbildungsverzeichnis	21

1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch soll eine γ -Strahlungsquelle untersucht werden. Dafür werden mehrere Messungen für die Untergrundstrahlung und die Strahlung des Präparates durchgeführt. Es wird mit verschiedenen statistischen Methoden untersucht, ob das Präparat strahlt oder nicht.

2 Aufbau und Durchführung

Um die oben genannten Ziele zu erreichen, wird der in [Abb. 1](#) dargestellte Versuchsaufbau verwendet, der aus einem Geiger-Müller-Zählrohr mit einer bis zu 650 V verstellbaren Detektorspannung besteht. Um das Zählrohr ist ein Holzblock angebracht, auf den die Präparate in einer Plastiktüte platziert werden.

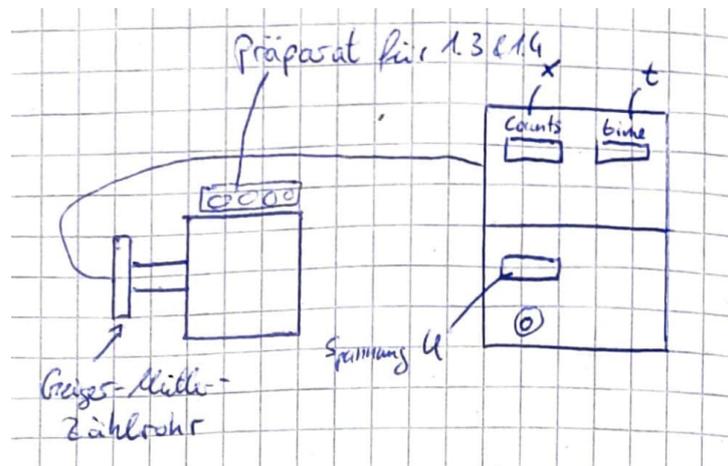


Abb. 1: Skizze des Versuchsaufbaus aus [Abb. 11](#) mit allen relevanten Größen für die Messung.

Es werden zunächst Messungen der Anzahl der Anregungen x ohne Präparat bei unterschiedlichen, am Geiger-Müller-Zählrohr angelegten, Spannungen U durchgeführt. Bevor weitere Messungen vorgenommen werden, wird eine geeignete Spannung U_A eingestellt.

Nun werden jeweils 100 Messungen ohne Präparat für die Bestrahlungsdauern $t = 1, 2$ und 4 s aufgenommen, um die Untergrundzählrate R_U zu ermitteln.

In einem dritten Versuchsteil wird eine Messung der Anregungen x für die Dauer $t = 10$ s mit Präparat durchgeführt. Bei dem Präparat handelt es sich um die in [Abb. 2](#) abgebildeten Steine und Perlen. Es wird untersucht, ob durch diese kurze Messung eine Strahlung des Präparats festgestellt werden kann.



Abb. 2: Abbildung des verwendeten Präparats aus [\[1\]](#). Die verschiedenen Perlen und Steine werden alle zusammen gemessen.

Zum Schluss wird eine weitere wesentlich längere Messung des Präparats durchgeführt. Es werden die Anregungen x in einer Zeitspanne von $t = 1200$ s gemessen. Es wird erneut beurteilt, ob das Präparat als strahlend angenommen werden kann oder nicht.

3 Auswertung und Fehleranalyse

3.1 Bestimmung einer sinnvollen Detektorspannung über die Zählrohrkennlinie

Wie in [1] erläutert wird durch die γ -Strahlung Gas im Geiger-Müller-Zählrohr ionisiert. Durch eine im Zählrohr angelegte Spannung U werden die Ionen beschleunigt und können, wenn sie einen Draht im Zählrohr erreichen, eine Entladung auslösen, die als Anregung x gezählt wird. Ist die Detektorspannung zu gering, erreichen keine oder nicht alle Ionen den Draht und es werden keine beziehungsweise zu wenige Anregungen x registriert. Ist eine bestimmte Grenzspannung überschritten, werden durch eine höhere Spannung U nicht mehr Anregungen x registriert. Eine zu hohe Spannung U erzeugt permanente Entladungen, was ebenfalls nicht gewünscht ist und das Zählrohr beschädigen kann. Den Bereich dazwischen nennt man Plateaubereich.

Um die folgenden Messungen der Anregungen gut durchführen zu können, wird zunächst die Detektorspannung eingestellt, wobei für die Messungen eine Spannung im mittleren Plateaubereich angestrebt wird. Es werden die Anregungen x in einer Minute bei unterschiedlichen Spannungen U gemessen und die beiden Größen gegeneinander aufgetragen. Die Unsicherheit von x wird dabei als \sqrt{x} abgeschätzt. Diese sogenannte Zählrohrkennlinie ist in Abb. 3 zu sehen.

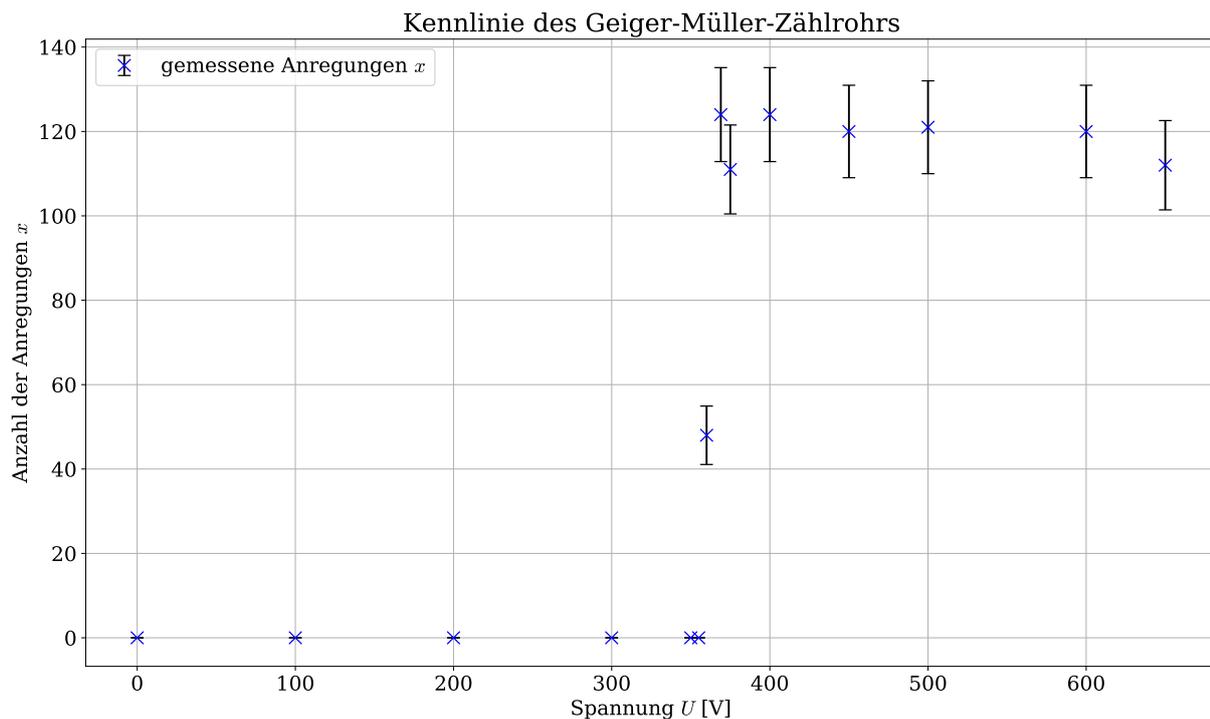


Abb. 3: Zu sehen ist die Kennlinie des Geiger-Müller-Zählrohrs. Dazu ist die Anzahl der Anregungen x gegen die angelegte Spannung U in V aufgetragen. Es sind zusätzlich die Fehler \sqrt{x} auf x eingezeichnet.

Man sieht wie erwartet, dass zunächst keine Anregungen x registriert werden. Im Bereich von $U = 350 - 400$ V steigt die Anzahl an Anregungen x steil an. Zwischen $U = 400 - 650$ V ist die Anzahl an Anregungen in etwa stabil. Für die weiteren Messungen wird deswegen folgende

Detektorspannung U_A verwendet:

$$U_A = 500 \text{ V.}$$

3.2 Untersuchung der Untergrundstrahlung

Da auch ohne Präparat ständig eine geringe Strahlungsmenge, die Untergrundstrahlung, aus der Umgebung existiert, muss diese zunächst ermittelt werden, um sie bei der Messung mit Präparat zu berücksichtigen. Hierfür werden für verschiedene Zeitspannen t die Anregungen x gemessen. Die erhaltenen Werte sind in [Abb. 11](#) bis [Abb. 13](#) im Laborbuch zu finden und sollen statistisch untersucht werden. Hier werden exemplarisch die Messreihen für eine Messdauer von 1 s betrachtet.

Zur Auswertung wird die Häufigkeit jeder gemessenen Anregungsanzahl x ermittelt und durch die Anzahl an Messungen geteilt. Die so ermittelten relativen Häufigkeiten sind in [Abb. 4](#) dargestellt. Außerdem sind die zum Mittelwert μ der Anregungen zu erwartende Poissonverteilung und die Gaußverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\mu}$ dargestellt. Hierfür werden folgende Formeln aus [\[2\]](#) verwendet:

$$\text{Poisson: } f_{\mu}(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \quad (1)$$

$$\text{Gauß: } G_{\mu, \sqrt{\mu}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\mu}}. \quad (2)$$

Der Mittelwert hierfür aus den Messwerten beträgt

$$\mu = 1,81.$$

Obwohl die Poissonverteilung eine diskrete Verteilung ist, wird sie hier kontinuierlich mit der Gammafunktion $\Gamma(x+1)$ anstelle der Fakultät $x!$ verwendet.

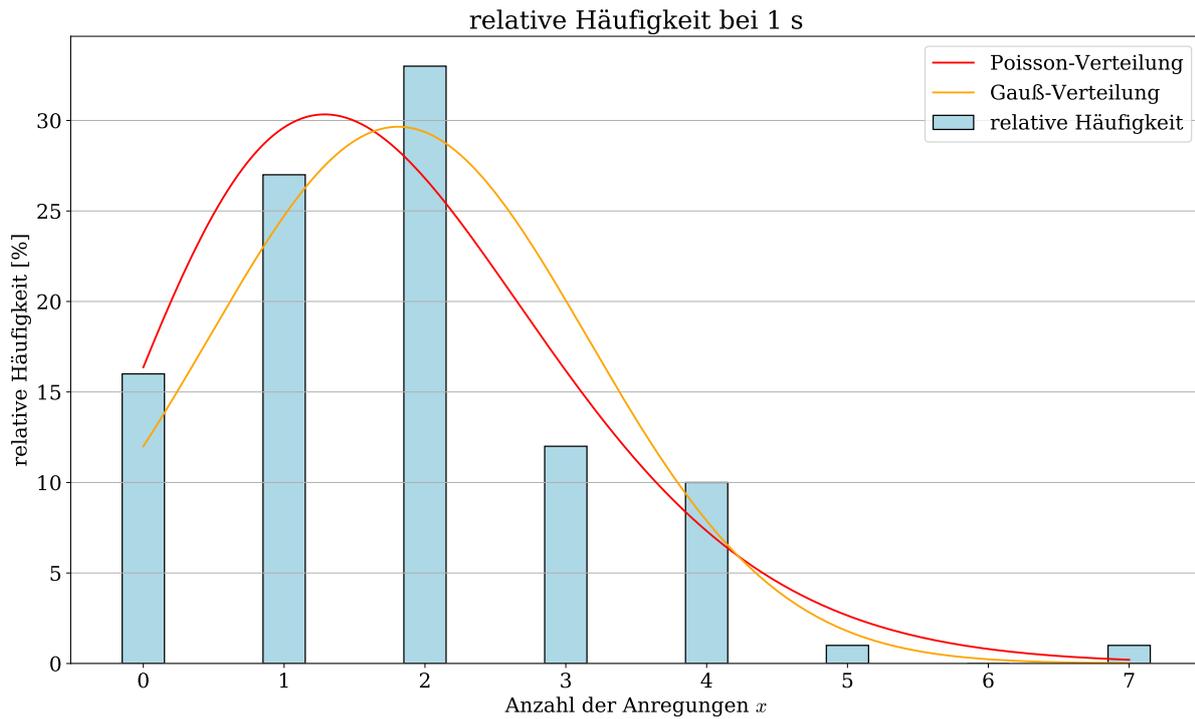


Abb. 4: Aufgezeichnet ist ein Histogramm für die relativen Häufigkeiten von Anregungen bei einer Messdauer von einer Sekunde. Zusätzlich sind die beim Mittelwert μ der Messwerte erwarteten Verteilungen eingezeichnet. Dabei entspricht die rote Kurve einer Poissonverteilung und die orangene Kurve einer Gaußverteilung.

Nun soll aus den Messwerten die empirische Standardabweichung σ_{emp} , die Varianz σ_{emp}^2 mit bekannten Formeln aus [3] und die empirische Schiefe γ_{emp} und Wölbung w_{emp} mit folgenden Formeln aus [1] berechnet werden:

$$\gamma_{\text{emp}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - \mu)}{\sigma} \right)^3, \quad (3)$$

$$w_{\text{emp}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - \mu)}{\sigma} \right)^4. \quad (4)$$

Es ergeben sich folgende Werte:

$$\sigma_{\text{emp}}^2 = 1,75,$$

$$\sigma_{\text{emp}} = 1,32,$$

$$\gamma_{\text{emp}} = 0,81,$$

$$w_{\text{emp}} = 4,13.$$

Diese sollen nun mit den Werten für Varianz σ_{Poi}^2 , Schiefe γ_{Poi} und Wölbung w_{Poi} der Poisson-

verteilung um μ verglichen werden. Bei der Poissonverteilung gilt

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{Poi}}^2 &= \mu = 1,81, \\ \gamma_{\text{Poi}} &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} = 0,74, \\ w_{\text{Poi}} &= 3 + \frac{1}{\mu} = 3,55.\end{aligned}$$

Vergleicht man diese Werte mit den empirisch berechneten, so sieht man, dass sie ungefähr gleich sind. Bei der Poissonverteilung handelt es sich hier also um eine gute näherungsweise Beschreibung der Verteilung der Anregungen x .

Für die Messungen mit Dauer $t = 2\text{ s}$ und $t = 4\text{ s}$ wird analog vorgegangen. Die Graphiken dazu finden sich im Anhang in [Abb. 9](#) und [Abb. 10](#). Der Vergleich von Varianz, Schiefe und Wölbung aus empirischer Berechnung mit den aus der Poissonverteilung erhaltenen Werten findet sich in [Tab. 1](#).

Tab. 1: Zu sehen sind die empirisch ermittelten und die aus der Poissonverteilung hergeleiteten Werte für den Mittelwert μ , die Varianz σ^2 , die Standardabweichung σ , die Schiefe γ und die Wölbung w für die Untersuchung der Untergrundstrahlung. Dabei sind die drei Messdauern 1 s, 2 s und 4 s aufgetragen.

	Mittelwert μ	Varianz σ^2	St.abweichung σ	Schiefe γ	Wölbung w
1 s empirisch	1,81	1,75	1,32	0,81	4,13
1 s Poissonv.	1,81	1,81	-	0,74	3,55
2 s empirisch	4,06	4,93	2,22	0,40	2,63
2 s Poissonv.	4,06	4,06	-	0,50	3,25
4 s empirisch	7,03	9,38	3,06	0,49	2,97
4 s Poissonv.	7,03	7,03	-	0,38	3,14

Auch bei der Messung mit Dauer $t = 2\text{ s}$ gibt es keine größeren Abweichungen von empirischen und mit Poissonverteilung berechneten Werten.

Bei der 4s-Messung weichen die gemessenen Werte stärker von Poisson- und Gaußverteilung ab wie in [Abb. 10](#) im Anhang zu sehen ist. Entsprechend weichen die Varianzen hier stärker voneinander ab. Die empirische Varianz ist größer, was auf die stärkere Streuung der Häufigkeiten um den Mittelwert zurückzuführen ist. Insgesamt ist die Poissonverteilung aber als sinnvolle Näherung zu bewerten.

Man sieht außerdem, dass bei kurzen Messungen die Poissonverteilung leicht asymmetrisch ist und von der symmetrischen Gaußverteilung abweicht. Mit länger werdender Messung und damit größer werdender Anzahl an Anregungen x nähern sich aber wie zu erwarten [\[2\]](#) Poisson- und Gaußverteilung an. Insgesamt passt die Poissonverteilung besser zu den diskreten Messwerten als die Gaußverteilung.

Die Schiefe γ gibt an, wie asymmetrisch eine Verteilung ist [\[4\]](#). Alle ermittelten Werte liegen über Null, was bedeutet, dass die Verteilungen auf die linke Seite geneigt sind. Eine Schiefe von Null entspricht der Schiefe einer Gaußverteilung. Wie zu erwarten nähert sich die Schiefe der Poissonverteilung der Null mit zunehmend großen x an. Auch die empirische Schiefe wird tendenziell mit zunehmender Messungsdauer kleiner.

Die Wölbung w gibt an, wie flach- oder steilgipflig eine Verteilung ist [\[4\]](#). Bei einem Wert unter drei ist die Verteilung flachgipflig bei einem Wert über drei ist sie steilgipflig. Ein Wert von drei

entspricht dem einer Normalverteilung. Die Wölbung der Poissonverteilung nähert sich immer mehr der drei an, was die Annäherung an die Gaußverteilung bestätigt. Die empirischen Werte liegen alle nahe der drei, streuen aber um sie.

Um nun die Untergrundzählrate R_u zu ermitteln, wird aus jeder der insgesamt 300 Messungen eine Zählrate R bestimmt. Es gilt folgender Zusammenhang für R und die Unsicherheit ΔR , die aus Fehlerfortpflanzung [3] bestimmt wird:

$$R = \frac{x}{t}, \quad (5)$$

$$\Delta R = \frac{\Delta x}{t}. \quad (6)$$

Als Bestwert für R_u wird der Mittelwert mit Standardabweichung des Mittelwertes [3] aller ermittelten Werte verwendet:

$$R_u = (1,87 \pm 0,06) \text{ s}^{-1}.$$

3.3 Kurze Messung des Präparats

Nach der Auswertung der Untergrundstrahlung soll ein Präparat untersucht werden und mithilfe statistischer Methoden die Nullhypothese, dass das Präparat nicht strahlt, getestet werden. Dazu wird eine Einzelmessung in der Zeit $t = 10 \text{ s}$ vorgenommen, die folgende Anzahl x an Anregungen ergibt, wobei die Unsicherheit erneut über $\Delta x = \sqrt{x}$ [5] abgeschätzt wird:

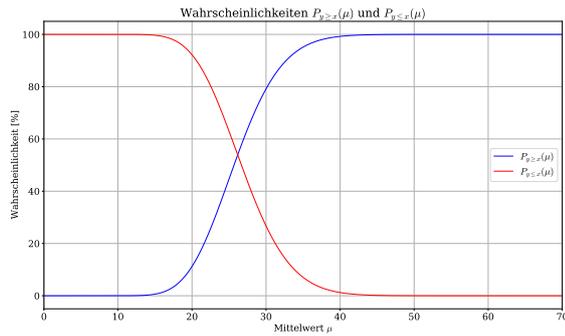
$$x = 26 \pm 5.$$

Aus dieser Messung lassen sich nun für eine Reihe von Mittelwerten $\mu = 0$ bis $\mu = 3x$ und eine Zufallsvariable y die Wahrscheinlichkeiten P für Werte $y \geq x$ beziehungsweise $y \leq x$ bestimmen. Dabei wird eine Poissonverteilung der Werte angenommen. Die folgenden Formeln ergeben dabei die Wahrscheinlichkeiten $P_{y \geq x}$ und $P_{y \leq x}$ [1]:

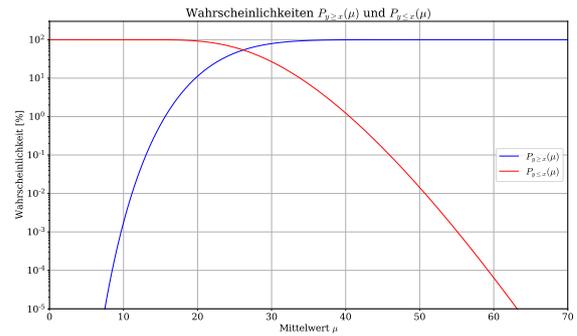
$$P_{y \geq x}(\mu) = \sum_{y=x}^{\infty} \frac{\mu^y}{y!} e^{-\mu} = 1 - \sum_{y=0}^{x-1} \frac{\mu^y}{y!} e^{-\mu}, \quad (7)$$

$$P_{y \leq x}(\mu) = \sum_{y=0}^x \frac{\mu^y}{y!} e^{-\mu}. \quad (8)$$

Für die Ereigniszahl $x = 26$ ist in der folgenden [Abb. 5](#) der Verlauf der beiden Wahrscheinlichkeitsfunktionen abgebildet, wobei die Wahrscheinlichkeit gegen die möglichen Mittelwerte aufgetragen ist. Es ist dabei ein Diagramm mit linearer Skala zu sehen, in dem die Symmetrie der Funktionen gut zu erkennen ist und ein Diagramm mit halblogarithmischer Skala, das das Auswerten kleiner Wahrscheinlichkeiten im Folgenden erleichtert.



(a) Lineare Skala



(b) Halblogarithmische Skala

Abb. 5: Aufgetragen sind die beiden Wahrscheinlichkeiten zur Poissonverteilung $P_{y \leq x}$ und $P_{y \geq x}$ in % gegen den Mittelwert μ . Im linken Diagramm ist die Skala linear und im rechten halblogarithmisch. Die rote Kurve beschreibt dabei $P_{y \leq x}$ und die blaue $P_{y \geq x}$. Beide Wahrscheinlichkeiten sind mit Formeln aus [1] berechnet.

Als nächster Schritt soll nun ein Konfidenzintervall $[a, b]$ zum Konfidenzniveau $\gamma = 99\%$ ermittelt werden. Dazu werden die beiden Werte a und b über die Werte bestimmt, bei denen die halbe Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha/2 = (1 - \gamma)/2 = 0,5\%$ jeweils die beiden Kurven $P_{y \leq x}$ und $P_{y \geq x}$ schneidet. Die Werte werden numerisch mittels Python bestimmt und betragen:

$$a = 14,74,$$

$$b = 42,26.$$

In Abb. 6 ist in das halblogarithmische Diagramm der Wahrscheinlichkeiten P zusätzlich die halbe Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha/2$ und das Konfidenzintervall $[a, b]$ eingetragen.

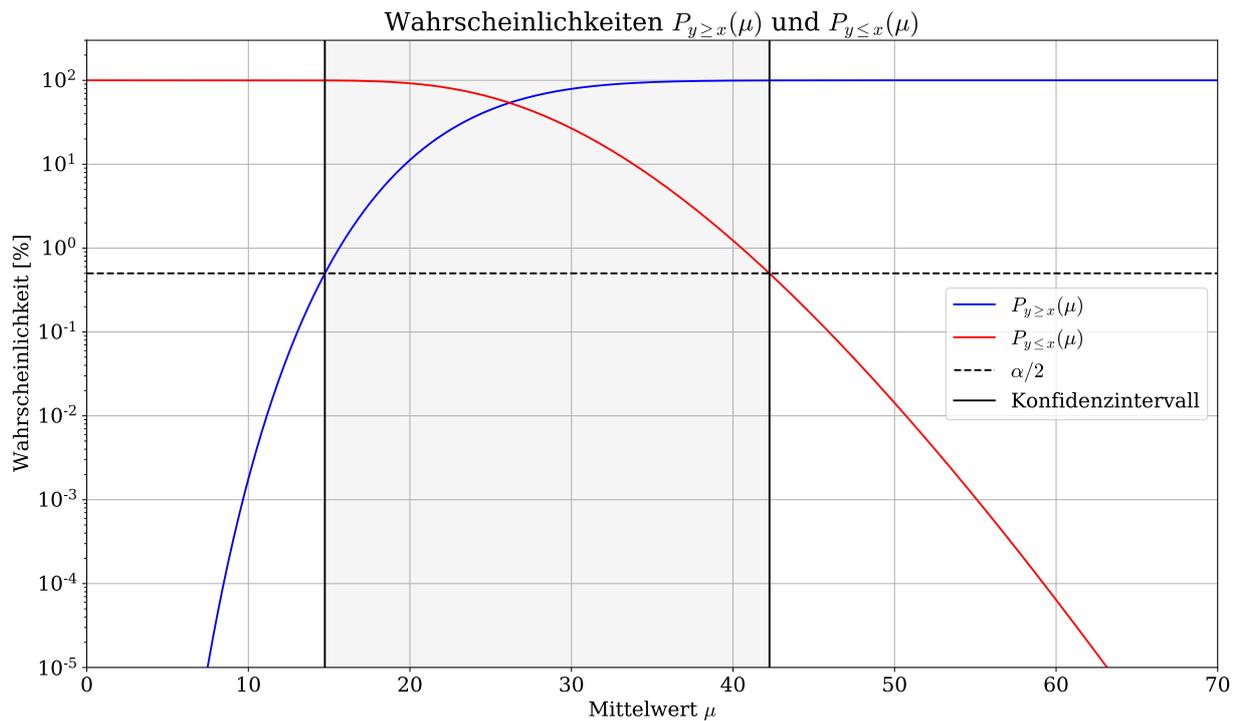


Abb. 6: Aufgetragen sind die beiden Wahrscheinlichkeiten zur Poissonverteilung $P_{y \leq x}$ und $P_{y \geq x}$ in % gegen den Mittelwert μ in einer halblogarithmischen Skala. Die rote Kurve beschreibt dabei $P_{y \leq x}$ und die blaue $P_{y \geq x}$. Zusätzlich ist die halbe Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha/2$ zum Konfidenzniveau $\gamma = 99\%$ als gestrichelte Linie und das grau hinterlegte Konfidenzintervall $[a, b]$ als zwei senkrechte schwarze Linien eingezeichnet.

Als Vergleich für das Konfidenzintervall soll nun das erweiterte Gauß-Intervall $x \pm k_{0,99} \cdot \sqrt{x}$ herangezogen werden. Es wird dabei der Wert $k_{0,99} = 2,576$ [6] für den Erweiterungsfaktor verwendet. Es ergeben sich die folgenden Intervallgrenzen:

$$\begin{aligned} a_{\text{Gauß}} &= 12,86, \\ b_{\text{Gauß}} &= 39,14. \end{aligned}$$

In Abb. 7 sind diese zusammen mit dem Konfidenzintervall in das Wahrscheinlichkeitsdiagramm eingezeichnet.

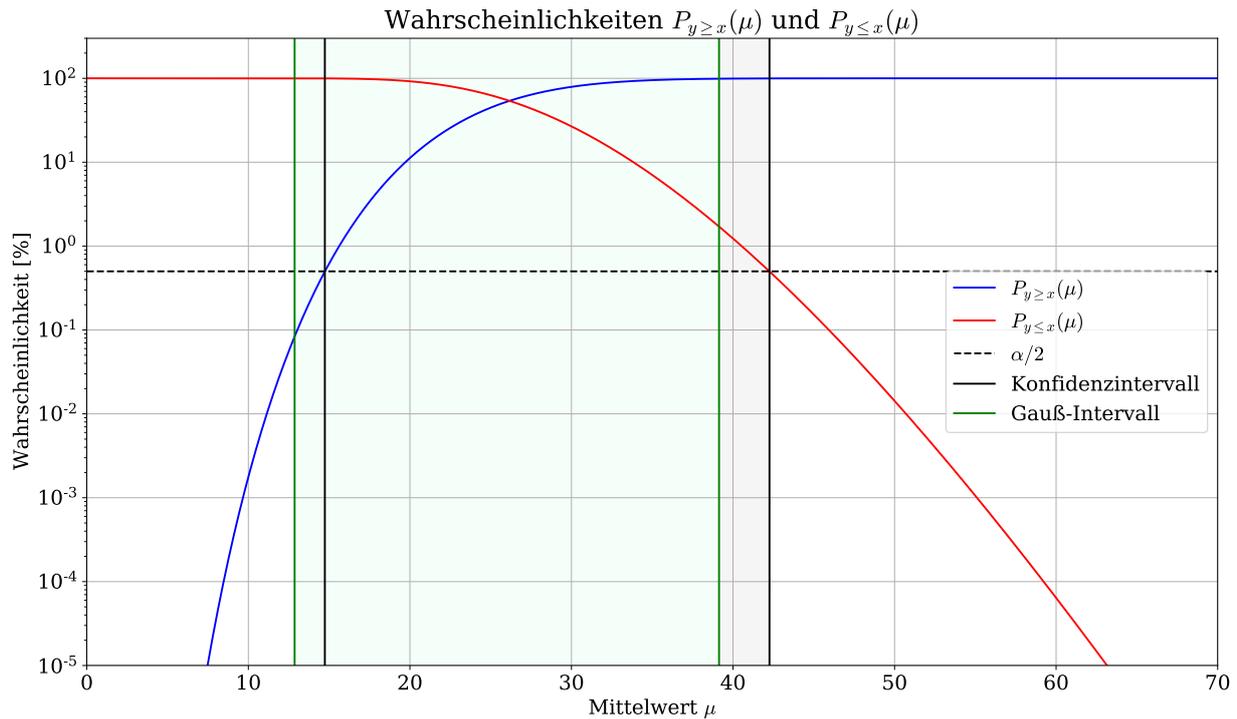


Abb. 7: Aufgetragen sind die beiden Wahrscheinlichkeiten zur Poissonverteilung $P_{y \leq x}$ und $P_{y \geq x}$ in % gegen den Mittelwert μ in einer halblogarithmischen Skala. Die rote Kurve beschreibt dabei $P_{y \leq x}$ und die blaue $P_{y \geq x}$. Zusätzlich ist die halbe Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha/2$ zum Konfidenzniveau $\gamma = 99\%$ als gestrichelte Linie und das grau hinterlegte Konfidenzintervall $[a, b]$ als zwei senkrechte schwarze Linien eingezeichnet. Außerdem ist das grün hinterlegte, erweiterte Gauß-Intervall als zwei senkrechte grüne Linien dargestellt.

Es ist erkennbar, dass die beiden Intervalle zwar ungefähr die gleiche Breite besitzen, das Gauß-Intervall jedoch im Vergleich zum Konfidenzintervall ein wenig nach links verschoben ist. Es liegt damit symmetrisch um den gemessenen Wert. Man kann an den von der halben Irrtumswahrscheinlichkeit $0,5\%$ abweichenden Schnittpunkten des Gaußintervalls mit den Wahrscheinlichkeitskurven erkennen, dass es sich beim Gauß-Intervall nur um eine Näherung des Konfidenzintervalls handelt.

In einem weiteren Schritt soll die Strahlung der Probe nun mit der Untergrundstrahlung verglichen und die Nullhypothese, dass das Präparat nicht strahlt überprüft werden. Dazu wird aus der in [Unterabschnitt 3.2](#) errechneten Untergrundzählrate $R_u = (1,87 \pm 0,06) \text{s}^{-1}$ ein Erwartungswert x_u für $t = 10 \text{s}$ errechnet. Aus diesem lässt sich über [Gleichung 7](#) ein P -Wert errechnen, der die Wahrscheinlichkeit angibt, dass bei diesem Mittelwert x_u , $x = 26$ oder mehr Anregungen gemessen werden. Es ergeben sich die folgenden Werte für x_u und den P -Wert:

$$x_u = 18,7 \pm 0,6,$$

$$P = 6,2\%.$$

Beide Werte sind in [Abb. 8](#) in das Wahrscheinlichkeitsdiagramm mit eingetragen:

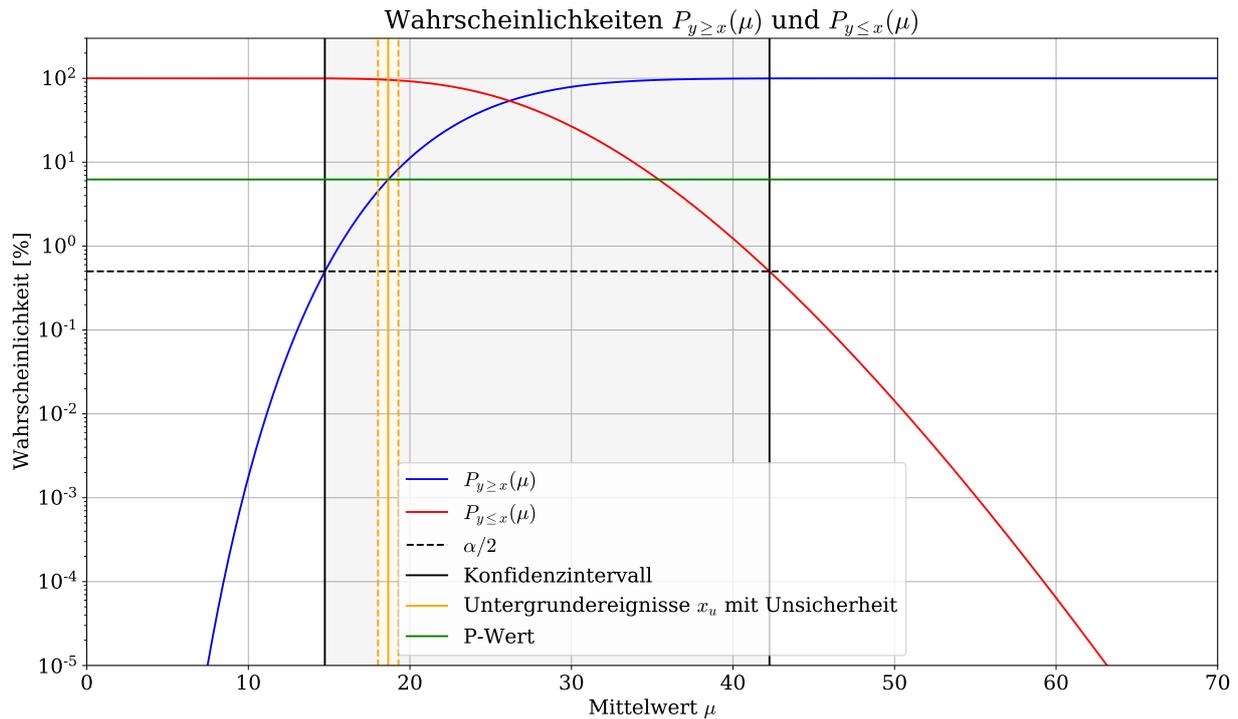


Abb. 8: Aufgetragen sind die beiden Wahrscheinlichkeiten zur Poissonverteilung $P_{y \leq x}$ und $P_{y \geq x}$ in % gegen den Mittelwert μ in einer halblogarithmischen Skala. Die rote Kurve beschreibt dabei $P_{y \leq x}$ und die blaue $P_{y \geq x}$. Zusätzlich ist die halbe Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha/2$ zum Konfidenzniveau $\gamma = 99\%$ als gestrichelte Linie und das grau hinterlegte Konfidenzintervall $[a, b]$ als zwei senkrechte schwarze Linien eingezeichnet. Außerdem ist die Zahl der Untergrundereignisse x_u als orangene Linie und ihre Unsicherheit gestrichelt dargestellt. Zudem ist der entsprechende P -Wert als grüne Linie illustriert.

Da der P -Wert mit 6,2% deutlich über der halben Irrtumswahrscheinlichkeit liegt und der Wert von x_u innerhalb des Konfidenzintervalls zu finden ist, was auch in [Abb. 8](#) zu sehen ist, kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden. Bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 1 - \gamma$ werden alle Nullhypothesen abgelehnt, bei denen der Mittelwert außerhalb des Konfidenzbandes liegt. Das entspricht dann dem Ablehnungsbereich.

Da die Nullhypothese nicht abgelehnt werden kann, bedeutet das, dass nicht ausgeschlossen werden kann, dass die Probe nicht strahlt. Es ist also nicht sicher, ob die Probe tatsächlich strahlt oder es sich um eine statistische Streuung handelt, die auch von der Untergrundstrahlung hätte erzeugt werden können.

3.4 Lange Messung des Präparats

In einem letzten Versuchsteil wird erneut eine Messung am Präparat durchgeführt, wobei es sich um eine lange Messung über $t = 1200$ s handelt. Es wird insgesamt die folgende Anzahl x an Anregungen gemessen, wobei der Fehler sich aus \sqrt{x} ergibt:

$$x_{\text{lang}} = 2406 \pm 49.$$

Die Zählrate und ihr Fehler können nun analog zur Zählrate der Untergrundstrahlung in [Gleichung 5](#) bestimmt werden. Es wird folgender Wert ermittelt:

$$R = (2,01 \pm 0,04) \text{ s}^{-1}.$$

Erneut soll untersucht werden, ob anhand der Werte ausgesagt werden kann, ob die Probe strahlt oder nicht. Dazu wird zunächst ein Vergleich mit der Zählrate $R_u = (1,87 \pm 0,06) \text{ s}^{-1}$ der Untergrundstrahlung über den t -Wert angestellt. Der t -Wert wird mit Formeln aus [\[3\]](#) berechnet, wobei ein t -Wert von unter zwei auf eine gute, ein t -Wert von über zwei auf eine schlechte Verträglichkeit hindeutet. Es ergibt sich der folgende t -Wert:

$$t = 1,9.$$

Dieser t -Wert zeigt eine gute Verträglichkeit zwischen der Probenmessung und der Untergrundmessung, was darauf schließt, dass im Rahmen der Fehler der beiden Werte nicht ausgesagt werden kann, ob die Probe tatsächlich strahlt.

Einen weiteren Vergleichswert liefert der P -Wert, der die Wahrscheinlichkeit angibt, dass, wenn von reiner Untergrundstrahlung ausgegangen wird, der gemessene Wert oder größere Werte auftreten. Er lässt sich in der Gauß-Näherung durch ein Integral über die Gaußverteilung bestimmen, dass bei dem Messwert startet und bis ins Unendliche geht:

$$P = \int_{x_{\text{lang}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi R_u}} e^{-\frac{(x-R_u)^2}{2R_u}} dx \quad (9)$$

Einsetzen der Werte liefert

$$P \approx 0,02\%.$$

Bei einem einseitigen Signifikanzniveau von $\alpha = 1 - \gamma = 1\%$ kann die Nullhypothese in diesem Fall also abgelehnt werden. Dadurch kann also bestätigt werden, dass es sich tatsächlich um einen Strahler handelt. Wichtig zu beachten ist jedoch, dass bei der Auswertung über den P -Wert die Unsicherheiten der Größen nicht mit einfließen, weshalb in der Fehlerdiskussion noch einmal auf die widersprüchlichen Aussagen von t -Wert und P -Wert eingegangen werden soll.

4 Diskussion der Ergebnisse

4.1 Zusammenstellung der Ergebnisse

Durch Messung der Anzahl der Anregungen in Abhängigkeit der Spannung U ergibt sich die Kennlinie des Geiger-Müller-Zählrohrs mit einem Plateau-Bereich ab etwa 400 V. Als Detektorspannung wird also die Spannung $U_A = 500$ V gewählt.

Bei der Betrachtung der Untergrundstrahlung kann eine ungefähre Übereinstimmung mit Poisson- und Gaußverteilung beobachtet werden, wobei sich die Poissonverteilung der Gaußverteilung für größere Zeiten t annähert. Die berechneten Werte für Mittelwert, Varianz, Standardabweichung, Schiefe und Wölbung der Messreihen, sowie Vergleiche mit der Poisson-Verteilung sind in [Tab. 2](#) zusammengestellt:

Tab. 2: Erneut sind die Ergebnisse der Untersuchung der Untergrundstrahlung zusammengestellt: Zu sehen sind die empirisch ermittelten und die aus der Poissonverteilung hergeleiteten Werte für den Mittelwert μ , die Varianz σ^2 , die Standardabweichung σ , die Schiefe γ und die Wölbung w für die Untersuchung der Untergrundstrahlung. Dabei sind die drei Messdauern 1 s, 2 s und 4 s aufgetragen.

	Mittelwert μ	Varianz σ^2	St.abweichung σ	Schiefe γ	Wölbung w
1 s empirisch	1,81	1,75	1,32	0,81	4,13
1 s Poissonv.	1,81	1,81	-	0,74	3,55
2 s empirisch	4,06	4,93	2,22	0,40	2,63
2 s Poissonv.	4,06	4,06	-	0,50	3,25
4 s empirisch	7,03	9,38	3,06	0,49	2,97
4 s Poissonv.	7,03	7,03	-	0,38	3,14

Für die Untergrundzählrate ergibt sich durch Mittelung aller Messdaten:

$$R_u = (1,87 \pm 0,06) \text{ s}^{-1}.$$

Bei der Untersuchung der kurzen Messung des Präparats ergeben sich folgende Werte für Ereigniszahl x und erwartete Untergrundereigniszahl x_u :

$$x = 26 \pm 5,$$

$$x_u = 18,7 \pm 0,6.$$

Durch Bestimmung eines P -Wertes kann die Nullhypothese überprüft werden:

$$P = 6,2 \text{ \%}.$$

Da dieser Wert über $\alpha/2 = 0,5\%$ liegt, kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden und eine Aussage darüber, ob die Probe strahlt ist zunächst nicht möglich.

Bei der langen Messung des Präparats ergibt sich aus der Ereigniszahl $x = 2406 \pm 49$ folgender Wert für die Zählrate R :

$$R = (2,01 \pm 0,04) \text{ s}^{-1}.$$

Im Vergleich mit der Untergrundstrahlung ergeben sich folgende Werte für t und P

$$t = 1,9,$$

$$P = 0,02.$$

Die Zählrate R ist im Rahmen ihrer Unsicherheit also mit der Untergrundstrahlung verträglich. Der P -Wert der Gauß-Näherung liegt deutlich unter dem einseitigen Signifikanzniveau von $\alpha = 1\%$, womit die Nullhypothese abgelehnt werden kann und es sich somit wahrscheinlich um einen Strahler handelt.

4.2 Fehlerdiskussion

Eine allgemeine Fehlerquelle bei allen Versuchsreihen könnte eine durch die Totzeit des Geiger-Müller-Zählrohrs systematisch zu klein gemessene Ereigniszahl x sein. Allerdings hat dieser Effekt wahrscheinlich nur eine sehr geringe Relevanz und wird durch die geschätzte Unsicherheit von \sqrt{x} berücksichtigt.

Bei der statistischen Untersuchung der Untergrundstrahlung weichen die relativen Häufigkeiten vor allem bei der Messungsdauer $t = 4\text{ s}$ von den erwarteten Verteilungen ab. Dies kann ein Indiz dafür sein, dass 100 Messwerte noch zu wenig sind, um statistische Schwankungen ausreichend zu minimieren. Es lässt sich also nicht ausschließen, dass der Wert für die Untergrundstrahlung R_u nicht genau genug gemessen ist. Dies könnte sich dann auch stark auf die Beurteilung der folgenden Messungen mit Präparat auswirken.

Im dritten Versuchsteil, der kurzen Messung des Präparats, fällt auf, dass das Konfidenzintervall $[a, b]$ der Poissonverteilung im Vergleich zum Gauß-Intervall $[a_{\text{Gauß}}, b_{\text{Gauß}}]$ verschoben ist. Das entspricht aber der Erwartung, denn das Gauß-Intervall liegt, wie in [Abb. 7](#) erkennbar, symmetrisch um die Ereigniszahl $x = 26$. Da die Poissonverteilung assymetrisch ist, liegt dementsprechend auch ihr Konfidenzintervall assymetrisch um die Ereigniszahl.

Bei der langen Messung des Präparats ist bemerkenswert, dass zwar der t -Wert mit $t = 1,9$ auf eine Verträglichkeit mit der Untergrundstrahlung hindeutet, die Nullhypothese jedoch verworfen wird. Eine Ursache hierfür könnte sein, dass der Fehler auf die Messung der Ereigniszahl x_u als $\sqrt{x_u}$ angenommen wird, wodurch der Fehler relativ groß wird, was eine Verträglichkeit begünstigt. Außerdem ist zu beachten, dass bei der Bestimmung des P -Werts die Unsicherheit auf R_u nicht mit einfließt. Wird davon ausgegangen, dass die Messung korrekt ist, kann also bestätigt werden, dass es sich um einen Strahler handelt. Unter Berücksichtigung der Messgenauigkeit, kann jedoch keine Aussage darüber getroffen werden.

Durch die lange Messung des Präparats kann die Nullhypothese verworfen werden, mit der kurzen Messung hingegen nicht. Durch die längere Messdauer erhöht sich die absolute Differenz zwischen erwarteter Untergrundstrahlung und gemessenem Wert – es liegen mehr durch Strahlung erzeugte Anregungen vor. Die Gaußverteilung der erwarteten Untergrundstrahlung ist dadurch beim gemessenen Wert x_{lang} schon stark abgeflacht. Eine Messung wie x_{lang} oder größer ist also wesentlich unwahrscheinlicher. Es ist für die Beurteilung des Strahlverhaltens also eine lange Messdauer vorteilhaft.

4.3 Verbesserte Messmethoden

Um eine Verbesserung der Messungen zu erzielen, kann es sinnvoll sein, den Effekt der Untergrundstrahlung zu minimieren. Dies kann beispielsweise durch eine Abschirmung des Geiger-Müller-Zählrohrs durch einen Bleikasten realisiert werden. Dadurch wären die Messungen des Präparats exakter, da das Präparat im Vergleich zur Untergrundstrahlung nur wenig strahlt und man somit genauer identifizieren könnte, ob es sich nur um statistische Schwankungen handelt oder ob es sich bei dem Präparat um einen Strahler handelt.

Um die Untergrundzählrate R_u zu bestimmen, wird der Mittelwert vieler kurzer Messungen genommen. Alternativ könnten längere Messungen vorgenommen werden. Eventuell kann hierdurch wie bei der langen Messung des Präparats eine größere Aussagekraft erzielt werden.

Zur Verbesserung der Präparatsmessung wäre es sinnvoll, eine größere Menge an Präparaten zu nutzen, da man dadurch höhere Zählraten erzielen kann. Infolgedessen kann man besser zwischen der Untergrundstrahlung und der Strahlung des Präparats differenzieren. Außerdem kann es sinnvoll sein das Präparat direkt an das Geiger-Müller-Zählrohr zu legen um eventuelle Strahlungsabschirmungen durch den Holzblock oder die Plastikverpackung zu vermeiden.

Literatur

- [1] Dr. Christof Bartels, Dr. Lukas Bruder, Dr. Thomas Pfohl: *Versuch 76 - Gitterspektrometer, Versuchsbeschreibung des Physiklabors für Anfänger*innen*, (Freiburg im Breisgau, 2022)
- [2] Dr. Christof Bartels, Dr. Lukas Bruder, Dr. Thomas Pfohl: *Datenanalyse Teil B - Skript zur Vorlesung am 28.02.2022*, (Freiburg im Breisgau, 2021/22)
- [3] Dr. Christof Bartels, Dr. Lukas Bruder, Dr. Thomas Pfohl: *Datenanalyse Teil A - Skript zur Vorlesung am 06.09.2021*, (Freiburg im Breisgau, 2021/22)
- [4] Dr. Martin Becker: *Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung* <https://www.lehrstabs-statistik.de/online/Deskriptive-WR/Vorlesung/3-6-symmetrie-und-w%C3%B6lbungsma%C3%9F.html>, (2021), (aufgerufen am: 17.03.2022)
- [5] Hans Joachim Eichler, Heinz-Detlef Kronfeldt, Jürgen Sahn: *Das neue Physikalische Grundpraktikum*, (Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2016), Kapitel 47 „Radioaktive Strahlung“
- [6] Gerd Wübbeler, Stephan Mieke: *Erweiterte Messunsicherheit* https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung_8/8.4_mathematische_modellierung/277_PTB_SEMINAR/VORTRAEGE/06_Wuebbeler_Erweiterte_Messunsicherheit.pdf, (Berlin: Physikalisch-Technische Bundesanstalt Berlin und Braunschweig, 11.03.2014), (aufgerufen am: 17.03.2022)

6 Anhang

6.1 Grafiken

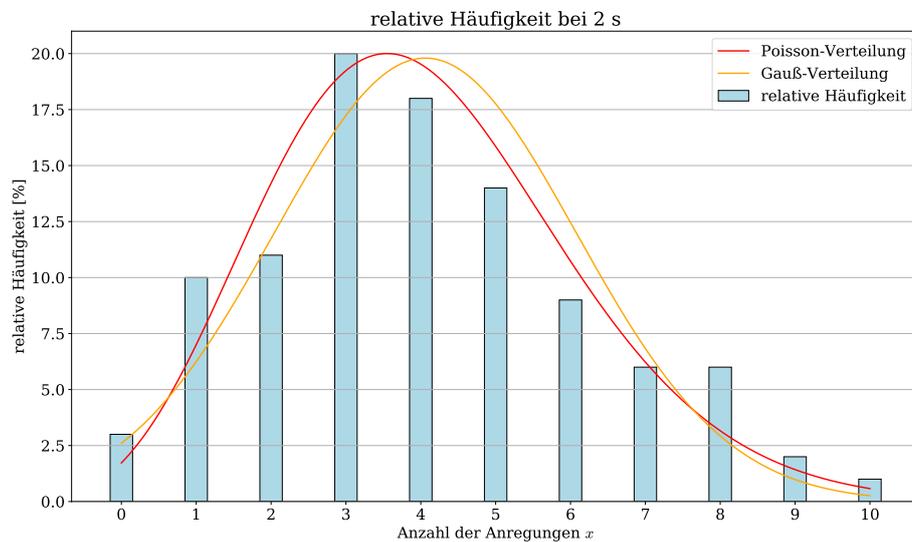


Abb. 9: Aufgezeichnet ist ein Histogramm für die relativen Häufigkeiten von Anregungen bei einer Messdauer von zwei Sekunden. Zusätzlich sind die beim Mittelwert μ der Messwerte erwarteten Verteilungen eingezeichnet. Dabei entspricht die rote Kurve einer Poissonverteilung und die orangene Kurve einer Gaußverteilung.

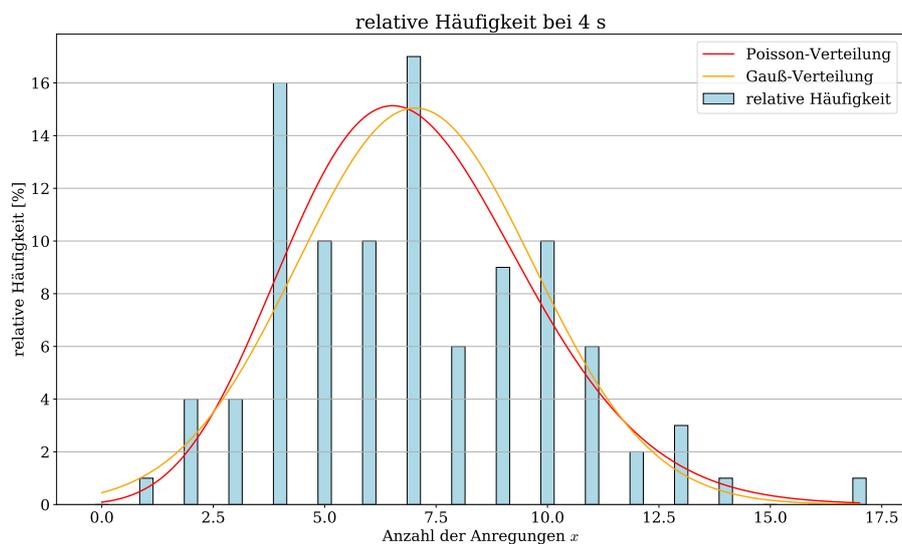


Abb. 10: Aufgezeichnet ist ein Histogramm für die relativen Häufigkeiten von Anregungen bei einer Messdauer von vier Sekunden. Zusätzlich sind die beim Mittelwert μ der Messwerte erwarteten Verteilungen eingezeichnet. Dabei entspricht die rote Kurve einer Poissonverteilung und die orangene Kurve einer Gaußverteilung.

6.2 Laborbuch

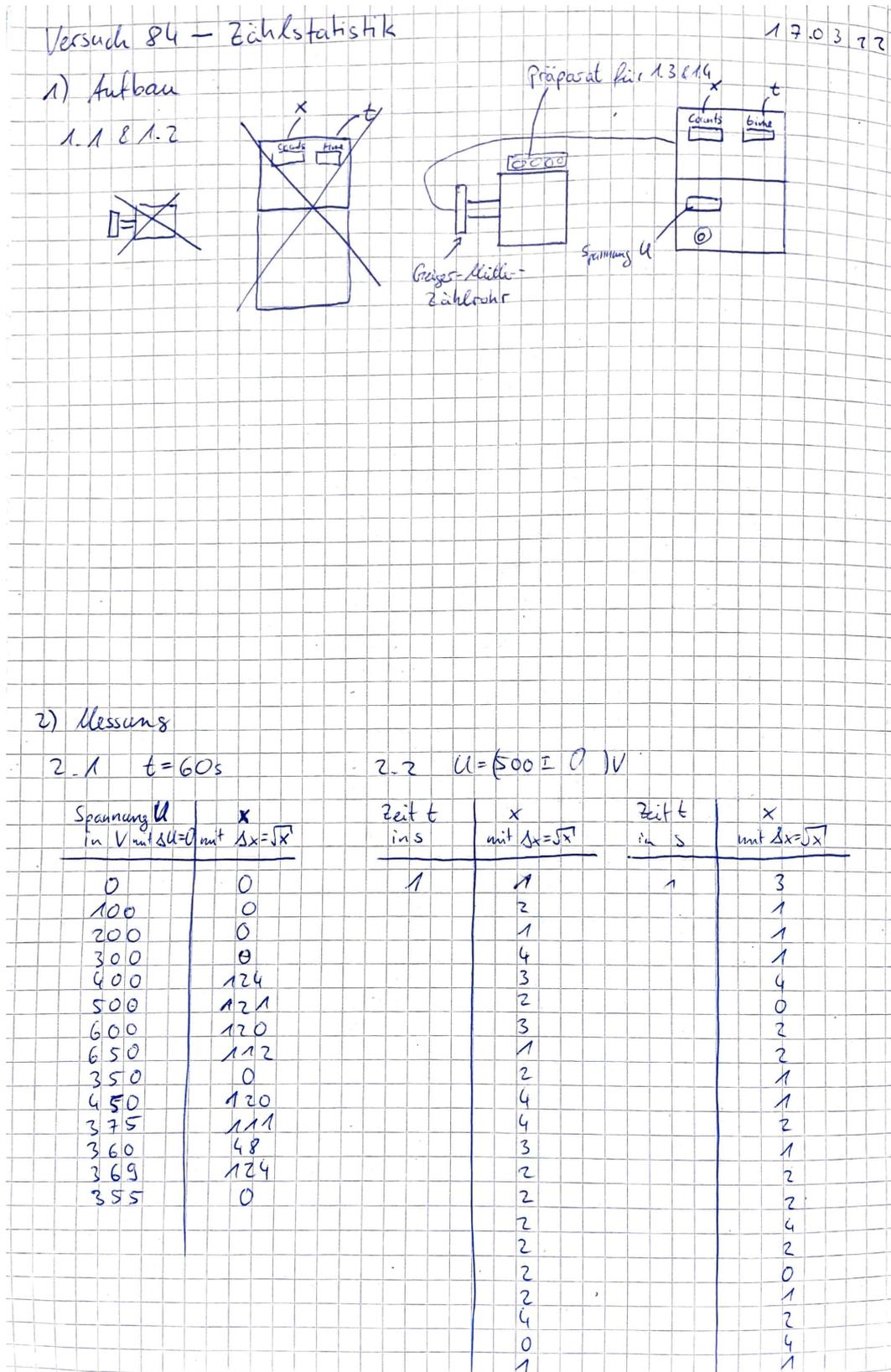


Abb. 11: Laborbuch, Seite 1

Zeit in s	t	x mit $\Delta x = \sqrt{x}$	t in s	x mit $\Delta x = \sqrt{x}$	t in s	x mit $\Delta x = \sqrt{x}$	t in s	x mit $\Delta x = \sqrt{x}$
1		3		2	2	3	4	4
		3		4		6		7
		3		0		6		7
		1				0		9
		2	2	8		1		6
		3		1		9		9
		0		2		4		10
		1		4		4		10
		4		3		4		7
		2		5		2		7
		0		5		5		10
		0		8		5		9
		3		5		6		5
		3		3		3		5
		3		6		5		4
		2		6		2		6
		2		7		4		11
		5		3		0		7
		2		3		7		5
		1		1		1		6
		1		1		2		7
		2		4		4		1
		1		3		4		10
		1		4		6		2
		1		8		2		13
		1		8		3		10
		1		8		3		4
		0		3		3		10
		1		2		6		7
		0		4		9		6
		1		4		1		10
		4		4		7		6
		1		4		7		8
		2		1		5		4
		2		3		7		11
		0		6		5		2
		1		3		3		7
		2		8		4		4
		3		5		4		7
		1		5		4		7
		0		1		4		3
		2		2		3		14
		1		5		6		6
		3		3		2		6
		0		5		5		8
		0		2		5		6
		2		10		2		4
		7		4		1		8
		2		3		3		3
		2		3		0		10
		0		1				12
		0		7				4
		2		2				13
		2		3				9

Abb. 12: Laborbuch, Seite 2

Tabellenverzeichnis

1	Vergleich der Poissonverteilung und der empirischen Werte der Untersuchung der Untergrundstrahlung	7
2	Zusammenstellung der Ergebnisse	14

Abbildungsverzeichnis

1	Versuchsaufbau	2
2	Verwendetes Präparat	2
3	Kennlinie des Zählrohrs	4
4	Histogramm für die relativen Häufigkeiten von Anregungen bei einer Sekunde Messdauer	6
5	Wahrscheinlichkeiten gegen Mittelwert	9
6	Wahrscheinlichkeiten gegen Mittelwert mit Konfidenzintervall	10
7	Wahrscheinlichkeiten gegen Mittelwert mit Konfidenz- und Gauß-Intervall	11
8	Wahrscheinlichkeiten gegen Mittelwert mit Konfidenzintervall und erwartetem Untergrundereignis mit P -Wert	12
9	Histogramm für die relativen Häufigkeiten von Anregungen bei zwei Sekunden Messdauer	17
10	Histogramm für die relativen Häufigkeiten von Anregungen bei vier Sekunden Messdauer	17
11	Laborbuch, Seite 1	18
12	Laborbuch, Seite 2	19
13	Laborbuch, Seite 3	20