

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Ziele des Versuchs | 2 |
| 2 | Aufbau und Durchführung | 2 |
| 3 | Auswertung und Fehleranalyse | 3 |
| 3.1 | Untersuchung der Zählrohrkennlinie | 3 |
| 3.2 | Zählstatistik für die Untergrundstrahlung | 4 |
| 3.3 | Untersuchung des Präparats in einer kurzen Messung | 9 |
| 3.4 | Untersuchung des Präparats in einer langen Messung | 13 |
| 4 | Diskussion der Ergebnisse | 14 |
| 4.1 | Angabe und Diskussion der Endergebnisse | 14 |
| 4.2 | Diskussion der verwendeten Messmethoden | 15 |
| 4.3 | Verbesserte Messmethoden | 16 |
| A | Anhang | 17 |
| | Abbildungsverzeichnis | 17 |
| | Tabellenverzeichnis | 17 |
| | Literaturverzeichnis | 17 |
| A.1 | Messprotokoll | 18 |

1 Ziele des Versuchs

In diesem Versuch wird die Zählstatistik beim Nachweis von radioaktiver Strahlung mit einem Zählrohr untersucht. Zunächst wird durch Ermitteln der Zählrohrkennlinie die Detektorspannung festgelegt. Daraufhin wird die Zählstatistik der Untergrundstrahlung untersucht und zuletzt die Strahlung eines Präparats mit einer kurzen und einer langen Messung anhand von Hypothesentests ausgewertet. ✓

2 Aufbau und Durchführung

Zur Strahlungsmessung standen ein Geiger-Müller-Zählrohr, ein Netzgerät für Hochspannung und ein elektronischer Zähler zur Verfügung. Es gab als Strahler ein Cäsium-Präparat, welches durch Bleiplatten abgeschirmt werden konnte, und zwei thoriumhaltige Schweißelektroden. Das Geiger-Müller-Zählrohr war mit dem Zähler verbunden, der wiederum an das Netzgerät angeschlossen war. Das Geiger-Müller-Zählrohr befand sich über der Bleifassung der Cäsiumprobe. Der Versuchsaufbau ist in [Abbildung 1](#) skizziert. ✓

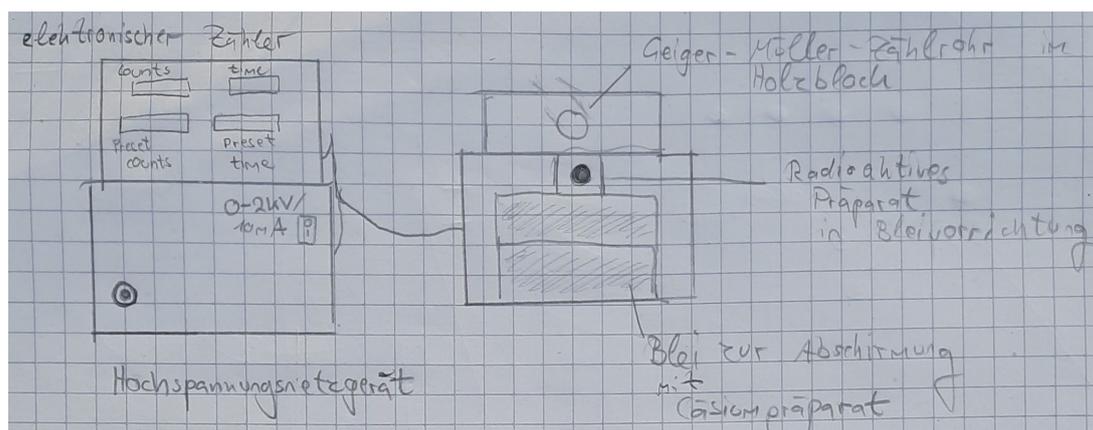


Abbildung 1: Skizze des Versuchsaufbaus. Das Geiger-Müller-Zählrohr ist mit dem elektronischen Zähler verbunden, der wiederum am Netzgerät angeschlossen ist. Das Zählrohr ist auf die Bleiabschirmung der Cäsiumprobe aufgesetzt. Die Abschirmung kann zum Zählrohr hin entfernt werden. Das thoriumhaltige Präparat kann auf das Zählrohr aufgelegt werden.

Im ersten Versuchsteil wurde die Kennlinie des Zählrohrs aufgenommen. Die hierbei nicht abgeschirmte Cäsiumprobe konnte das Zählrohr bestrahlen. Es wurden für verschiedene Spannungen jeweils für eine Minute lang Ereignisse am Zähler gezählt. Hieraus kann eine Kennlinie aufgetragen und eine sinnvolle Detektorspannung ausgewählt werden. ✓

Im zweiten Versuchsteil wurde die Untergrundstrahlung statistisch untersucht. Die Cäsiumprobe musste durch Bleiplatten abgeschirmt werden. Der Automatikmodus des elektronischen Zählers erlaubte Messreihen mit je 100 Messungen für Messzeiten $t = 1\text{ s}$, 2 s und 4 s . Abermals wurde die Anzahl der Ereignisse pro Messung notiert. Hieraus können Histogramme aufgetragen, ausgewertet und mit Poisson- und Normalverteilungen verglichen werden. Die Untergrundzählrate wird zusammen mit der entsprechenden Unsicherheit ermittelt. ✓

Für die verbleibenden Untersuchungen wurden die Schweißelektroden bei abgeschirmtem Cäsium auf das Zählrohr gelegt. Zunächst wurde eine kurze Messung der Ereigniszahl mit $t = 10\text{ s}$ durchgeführt. Zusammen mit dem zuvor ermittelten Untergrundrate wird anhand eines ersten Hypothesentests die Probe auf Radioaktive Abstrahlung untersucht.

Zuletzt wurde eine lange Messung mit $t \approx 1\text{ h}$ bei gleichbleibendem Versuchsaufbau durchgeführt. Hieraus kann eine genauere Zählrate ermittelt werden, sodass ein zuverlässiges Ergebnis des Hypothesentests bestimmt werden kann. Dies ermöglicht es, die Aussagekraft der beiden Messmethoden anhand der Ergebnisse zu vergleichen. ✓

das ist deutlich länger als 1min ^^

3 Auswertung und Fehleranalyse

3.1 Untersuchung der Zählrohrkennlinie

Bevor die Zählstatistiken des Untergrunds und des Präparats untersucht werden können, muss zunächst eine geeignete Spannung am Zählrohr festgelegt werden. Hierzu wurden im Bereich von 150 V bis 650 V 20 Messungen der Ereignisse x in jeweils 1 min durchgeführt. Dabei wurde die Bleivorrichtung entfernt, sodass die Ereignisse durch den Zerfall des darunter befindlichen Cäsium-Präparats gemessen werden konnten, um eine genauere Untersuchung der Kennlinie bei großer Zählrate zu ermöglichen.

Die so ermittelte Kennlinie ist in [Abbildung 2](#) dargestellt. ✓

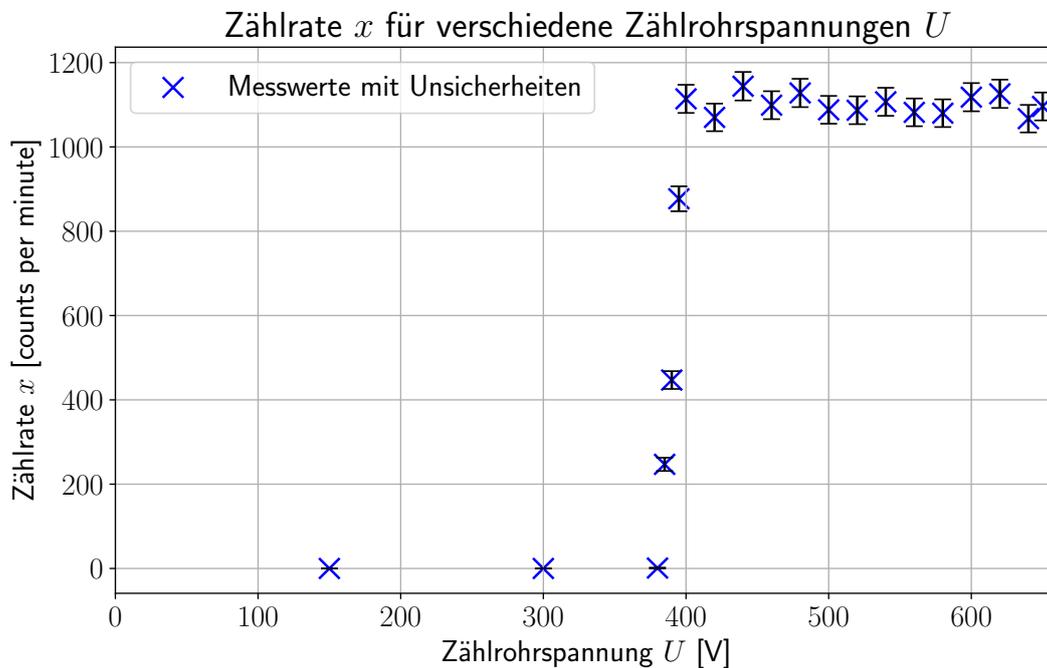


Abbildung 2: Die Kennlinie des Zählrohrs durch Auftragung der gemessenen Ereignisse x gegen Zählrohrspannungen bis zu maximal 650 V. Es ist zu erkennen, dass erst ab ca. 380 V Zählungen registriert werden konnten. Zwischen 400 V und 650 V ist ein Plateaubereich sichtbar, in dem die Detektorspannung für weitere Messungen gewählt wurde.

Während der Messung konnten erst ab einer Spannung von ungefähr 380 V Ereignisse gezählt werden, zuvor war die Signalverstärkung durch Stoßionisation im Zählrohr also noch zu gering.

Die Messwerte der Ereignisse x in Abhängigkeit von der Zählrohrspannung U sind [Abbildung 9](#) zu entnehmen. Aufgrund kleiner Schwankungen wird die Unsicherheit der angegebenen Detektorspannung auf $\Delta U = 1$ V geschätzt. Die Laufzeit von $t = 60$ s konnte mit dem elektronischen Zähler eingestellt werden, sodass hier nur eine Unsicherheit von $\Delta t = 0,01$ s geschätzt wird. Die Unsicherheiten der gezählten Ereignisse werden, aufgrund der erwarteten statistischen Verteilung durch $\Delta x = \sqrt{x}$ abgeschätzt.

Es ist zu erkennen, dass bei ungefähr 400 V ein Plateaubereich erreicht wird, ab dem sich die Anzahl der Ereignisse in Abhängigkeit der Zählrohrspannung kaum verändert. Die Zählrate bleibt damit bis hin zur maximal eingestellten Spannung von 650 V, bis auf statistische Schwankungen nahezu konstant.

Als Detektorspannung für alle folgenden Messungen wurde daher $U = 520$ V, also ein Wert im mittleren Bereich des Plateaus, gewählt, da dieser eine zuverlässige Messung der Ereigniszahlen ermöglicht. ✓

3.2 Zählstatistik für die Untergrundstrahlung

Um die späteren Messungen mit dem Präparat sinnvoll vergleichen zu können, wird zunächst die Untergrundstrahlung untersucht. Die drei Messreihen, bei denen jeweils 100 Messungen in einem Zeitintervall von $t = 1$ s, 2 s beziehungsweise 4 s aufgenommen wurden, sind in [Abbildung 10](#) zu finden. Im Folgenden werden alle drei Messreihen statistisch ausgewertet. Wenn nicht anders angegeben, werden hierfür die in [1] eingeführten Zusammenhänge verwendet.

Die relative Häufigkeit H_x einer Anzahl der Counts x ergibt sich, indem die Häufigkeit von x durch die Gesamtzahl der Messungen geteilt wird. Die Unsicherheit der Häufigkeit ist, aufgrund der statistischen Verteilung gegeben durch $\Delta x = \sqrt{x}$. Die relative Unsicherheit ΔH_x ergibt sich wieder, indem durch die Anzahl der Messungen geteilt wird. Dadurch lassen sich Histogramme der relativen Häufigkeit auftragen. Mittelwert μ , Standardabweichung σ und Varianz σ^2 wurden für die Häufigkeitsverteilung berechnet. Um die Messreihe genauer zu untersuchen, lassen sich zusätzlich die Schiefe S und Wölbung W mit

$$S = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^3 \quad W = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^4 \quad (1)$$

berechnen.

Um den Verlauf der Messwerte nun durch eine statistische Verteilung annähern zu können, wird dieser mit einer Poisson- und einer Gauß-Verteilung verglichen.

Aus dem Mittelwert μ lässt sich die Poissonverteilung

$$f_\mu(x) = \frac{\mu^x}{\Gamma(x+1)} e^{-\mu} \quad (2)$$

bestimmen. Anstatt der Fakultät $x!$ wurde die Gammafunktion $\Gamma(x+1)$ verwendet, um auch eine Berechnung für nicht ganzzahlige x zu ermöglichen. ✓

Um zu quantifizieren, wie gut die Verteilung zu den Werten passt, lassen sich auch für diese die Varianz σ_P^2 , die Schiefe S_P und die Wölbung W_P mit den Formeln

$$\sigma_P^2 = \mu \qquad S_P = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \qquad W_P = 3 + \frac{1}{\mu} \qquad (3)$$

berechnen.

Außerdem lässt sich die Gaußverteilung (nach [2])

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (4)$$

aus Mittelwert und Varianz $\sigma = \sqrt{\mu}$ erstellen.

Zunächst wird die Messreihe mit $t = 1$ s betrachtet und wie beschrieben ausgewertet. Die relative Häufigkeit H_x der Ereignisse ist jeweils mit der zugehörigen Gauß- und Poissonverteilung in [Abbildung 3](#) zu sehen. Die Verteilungen wurden mit [Gleichungen \(2\)](#) und [\(4\)](#) berechnet.

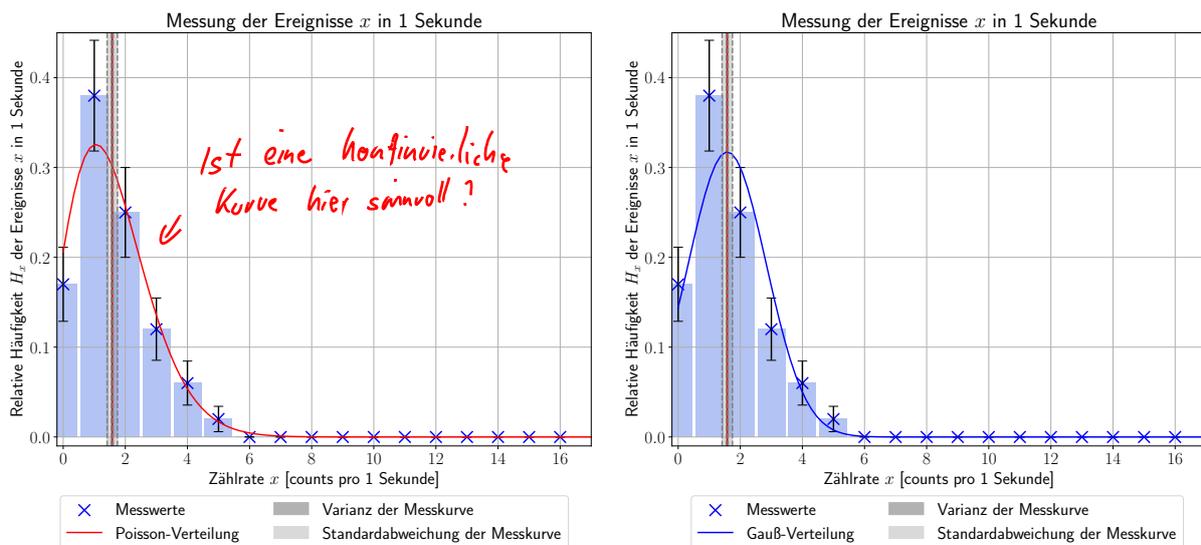


Abbildung 3: Histogramm der relativen Häufigkeit der Ereignisse x mit einer Messzeit von 1 s. Mittelwert, Standardabweichung und Varianz sind in [Tabelle 1](#) aufgelistet. Die Poisson- und Gaußverteilung wurden mit [Gleichungen \(2\)](#) und [\(4\)](#) berechnet.

Mittelwert, Standardabweichung und Varianz der Messwerte sind gemeinsam mit der Varianz der Poissonverteilung für alle Messreihen in [Tabelle 1](#) aufgelistet.

Vergleicht man Poisson- und Gaußverteilung, so fällt auf, dass das Maximum der Poissonverteilung links des Mittelwertes der Datenpunkte liegt, während das der Gaußverteilung dem Mittelwert per Definition entspricht. Außerdem scheint die Gaußverteilung nach rechts steiler abzufallen als die Poissonverteilung, sie nähert sich schneller der Null an. Die beiden Verteilungen beschreiben die Daten offensichtlich unterschiedlich gut.

| t [s] | μ [cps] | σ [cps] | σ^2 [(cps) ²] | σ_P^2 [(cps) ²] |
|---------|-------------|----------------|----------------------------------|------------------------------------|
| 1 | 1,58 | 0,17 | 0,03 | 1,58 |
| 2 | 3,73 | 0,26 | 0,07 | 3,73 |
| 4 | 7,31 | 0,47 | 0,22 | 7,31 |

Tabelle 1: Mittelwert μ , Standardabweichung σ , Varianz σ^2 und Varianz der Poissonverteilung σ_P^2 für die drei Messreihen, bei denen jeweils 100 Messwerte mit einer Messzeit t aufgenommen wurden. Die Varianz der Poissonverteilung wurde mit [Gleichung \(3\)](#) bestimmt und entspricht dem Mittelwert der zugehörigen Messreihe.

Um genauere Aussagen darüber zu treffen, wie gut die Verteilungen die Messdaten beschreiben, werden Varianz, Schiefe und Wölbung verglichen. Schiefe und Wölbung der Messreihen und der Poissonverteilung wurden mit [Gleichungen \(1\)](#) und [\(3\)](#) berechnet und sind in [Tabelle 2](#) aufgelistet.

| t [s] | S | S_P | W | W_P |
|---------|------|-------|------|-------|
| 1 | 0,74 | 0,80 | 3,09 | 3,63 |
| 2 | 0,60 | 0,52 | 2,89 | 3,27 |
| 4 | 0,45 | 0,37 | 3,52 | 3,14 |

Tabelle 2: Schiefe und Wölbung der drei Messreihen und der zugehörigen Poissonverteilungen. Die Werte wurden mit [Gleichungen \(1\)](#) und [\(3\)](#) berechnet. Eine Gaußverteilung weist zum Vergleich eine Schiefe von 0 und eine Wölbung von 3 auf. ✓

Betrachtet man die Daten für die erste Messreihe, fällt auf, dass die Schiefe der Messdaten größer Null ist, die Verteilung ist also linkssteil und rechtsschief. Die Schiefe der Poissonverteilung ist ähnlich, allerdings ist die Kurve noch linkssteiler. Die Wölbung der Messreihe ist nur wenig größer als 3. Eine Normalverteilung hat eine Wölbung von drei, die vorliegende Verteilung ähnelt der Normalverteilung in dieser Hinsicht also stark. Die Wölbung der Poissonverteilung ist deutlich größer als drei, es liegt also eine steilgipfligere Verteilung vor. Die Wölbung der ersten Messreihe wird also durch die Poissonverteilung schlechter abgebildet als durch die Gauß'sche Normalverteilung. Die Schiefe der Daten würde durch letztere schlechter nachgezeichnet, denn die Gaußverteilung ist symmetrisch, hat also eine Schiefe von null. Um zu unterscheiden, welche Verteilung die Messwerte besser beschreibt, wird ein reduzierter χ^2 -Test durchgeführt. Es ergeben sich:

$$\chi_{\text{red, P, 1}}^2 = 0,12 \qquad \chi_{\text{red, G, 1}}^2 = 26 \quad .$$

Die Poissonverteilung ist also eindeutig besser geeignet, um die erste Messreihe zu beschreiben, als die Gaußverteilung. ✓

Nun werden die Daten der zweiten Messreihe, bei der mit einer Messzeit $t = 2$ s gemessen wurde, untersucht. Mittelwert, Standardabweichung und Varianz sind in [Tabelle 1](#) gezeigt. Wie zu erwarten, wurden bei höherer Messzeit im Mittel mehr Counts gezählt. Die beiden Verteilungen wurden mit [Gleichungen \(2\)](#) und [\(4\)](#) berechnet und sind zusammen mit den relativen Häufigkeiten in [Abbildung 4](#) dargestellt.

Das lässt sich gut mit der ersten Beschreibung (oder sogar der Einführung) kombinieren & spart echt (und mir) viel Arbeit ;)

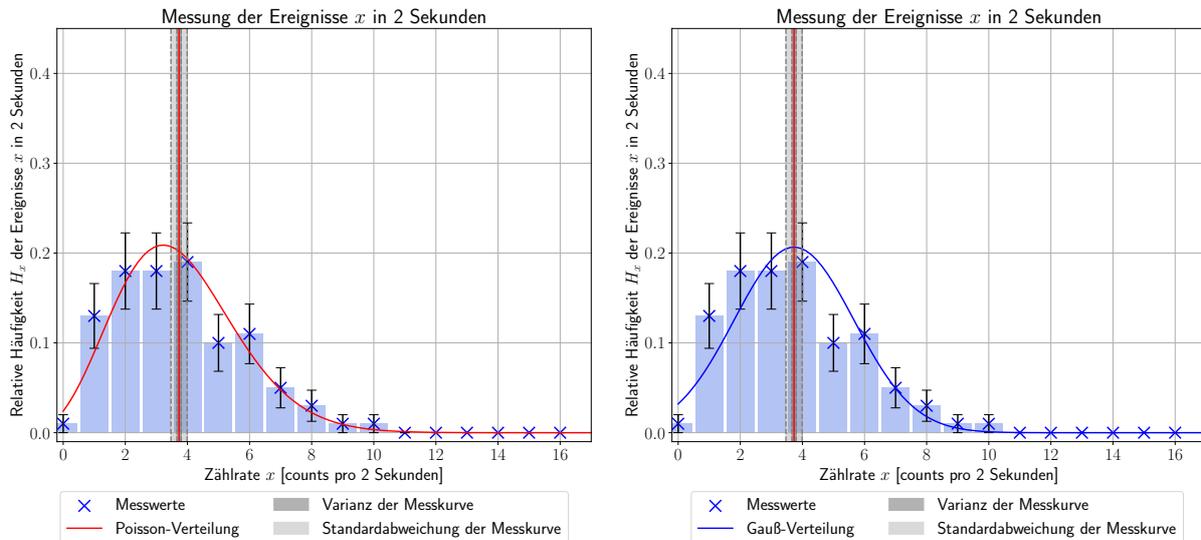


Abbildung 4: Histogramm der relativen Häufigkeit der Ereignisse x mit einer Messzeit von 2s. Mittelwert, Standardabweichung und Varianz sind in [Tabelle 1](#) aufgelistet. Die Poisson- und Gaußverteilung wurden mit [Gleichungen \(2\)](#) und [\(4\)](#) berechnet.

Abermals werden die in [Tabelle 2](#) berechneten Werte für Schiefe und Wölbung betrachtet. Die Schiefe der Messdaten ist kleiner als bei der ersten Messreihe, die Verteilung ist also symmetrischer. Die Schiefe der zugehörigen Poissonverteilung ist etwas geringer, sie passt aber deutlich besser zu den Daten als eine symmetrische Gaußverteilung. Die Wölbung der Daten ist kleiner 3, sie verlaufen also flachgipflig. Die Poissonverteilung ist steilgipflig, sodass die Wölbung der Gaußverteilung abermals besser zu den Daten passt. Der reduzierte χ^2 -Test

$$\chi_{\text{red, P, 2}}^2 = 0,42$$

$$\chi_{\text{red, G, 2}}^2 = 19$$

zeigt abermals, dass die Poissonverteilung besser zu den Daten passt. Es fällt aber auf, dass sich das Verhältnis der beiden Tests im Vergleich zur vorherigen Messreihe leicht zu Gunsten der Gaußverteilung verschoben hat, denn die Gaußkurve passt hier schon besser, die Poissonverteilung etwas schlechter. Dennoch beschreibt die Poisson-Verteilung die Messdaten immer noch ungleich besser.

Für die dritte Messreihe mit $t = 4$ s sind Mittelwert, Standardabweichung und Varianz abermals in [Tabelle 1](#) zu sehen. Auch hier wurden im Mittel mehr Counts registriert als zuvor. Es wurden wieder die relativen Häufigkeiten der einzelnen Ereignisse berechnet, sie werden gemeinsam mit den durch [Gleichungen \(2\)](#) und [\(4\)](#) bestimmten Verteilungen in [Abbildung 5](#) präsentiert.

Wölbung und Schiefe sind in [Tabelle 2](#) zu finden. Die Messdaten sind immer noch linkssteil und rechtsschief, allerdings deutlich weniger als zuvor. Die Schiefe der Poissonverteilung ist zwar geringer, aber passender als eine symmetrische Verteilung. Diese Messdaten spitzgipflig und weichen klar von der Wölbung einer Gaußverteilung ab. Die Wölbung der Poissonverteilung ist beinahe normalgipflig, passt aber immer noch etwas besser zur Datenlage.

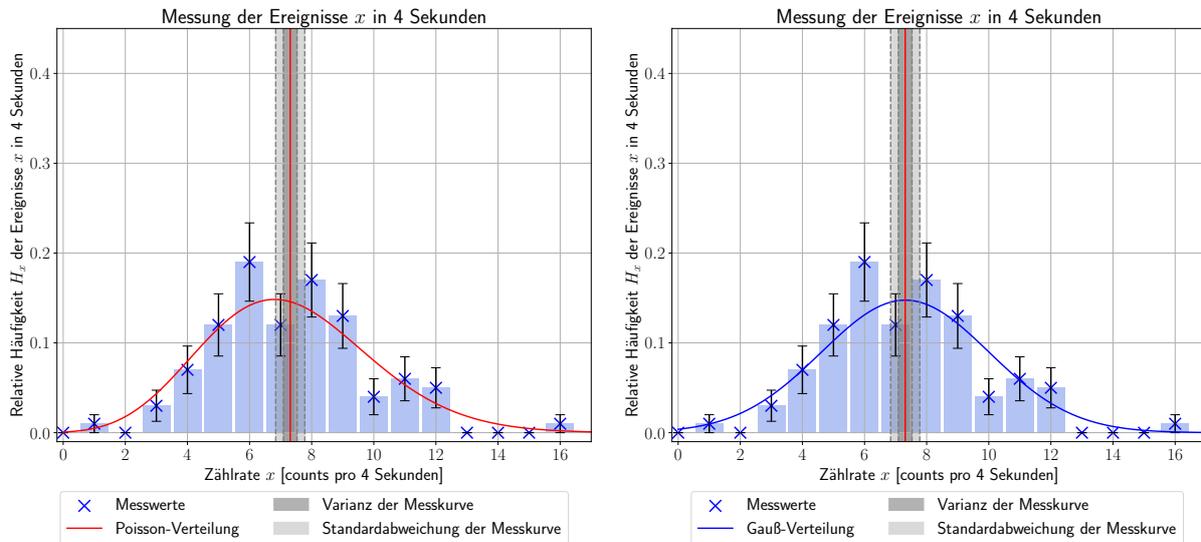


Abbildung 5: Histogramm der relativen Häufigkeit der Ereignisse x mit einer Messzeit von 4s. Mittelwert, Standardabweichung und Varianz sind in [Tabelle 1](#) aufgelistet. Die Poisson- und Gaußverteilung wurden mit [Gleichungen \(2\)](#) und [\(4\)](#) berechnet.

Der χ^2 -Test

$$\chi^2_{\text{red, P, 4}} = 0,58$$

$$\chi^2_{\text{red, G, 4}} = 5,4$$

bescheinigt der Poissonverteilung abermals eine gute Verträglichkeit, der Gaußverteilung immer noch nicht. Die Gaußverteilung passt dennoch schon deutlich besser zu den Werten als in den beiden vorigen Messreihen. Die Messreihen, die für kleine Zeiten nahezu poissonverteilt sind, sind für große Messzeiten, also große Datenmengen, zunehmend gaußverteilt. Dies passt zur Erwartung, dass eine Poissonverteilung für große x in eine Gaußverteilung übergeht.

Für die folgenden Versuchsteile ist die Untergrundzählrate relevant um die eventuelle Strahlung des Präparats quantifizieren zu können. Sie gibt an, wie viele Counts pro Sekunde zu erwarten sind, wenn sich keine zu vermessende radioaktive Quelle in der Nähe des Geiger-Müller-Zählers befindet. Die Untergrundzählrate für eine Einzelmessung wird berechnet, indem für jede der 300 durchgeführten Messungen die Anzahl der gemessenen Counts x durch die Messzeit t geteilt wird. Die endgültige Untergrundzählrate R_U ergibt sich durch Mittelwertbildung.

$$R_U = \frac{1}{300} \sum_{i=0}^{300} \frac{x_i}{t_i} \tag{5}$$

Die Unsicherheit der Untergrundzählrate wird als Standardabweichung des Mittelwerts bestimmt. Damit ergibt sich der Endwert für die Untergrundzählrate zu

$$R = (1,76 \pm 0,06) \text{ cps} . \tag{6}$$

3.3 Untersuchung des Präparats in einer kurzen Messung

Mit dem bekannten Wert der Untergrundstrahlung, kann nun die Strahlung thoriumhaltigen Schweißelektroden als radioaktives Präparat untersucht werden. Zunächst wurde hierfür bei der gewählten Zählrohrspannung von 520 V die Anzahl der detektierten Ereignisse x in einem kurzen Zeitraum von $t = (10,00 \pm 0,01)$ s gemessen. Die Unsicherheit der Zeitspanne, in der die Messung durchgeführt wurde, wurde dabei aufgrund der Auflösung des Messgeräts geschätzt. Für das Präparat ergab sich die Anzahl

$$x = (28 \pm 5) \quad (7)$$

an registrierten Ereignissen.

Unter der Annahme, dass die Ereigniszahlen des Präparats einer Poisson-Verteilung nach [Gleichung \(2\)](#) mit Mittelwert μ unterliegen, lässt sich für eine Zufallsvariable y die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass mindestens die gezählten $x = 28$ Ereignisse in einem Zeitraum von 10 s stattfinden, also dass $y \geq x$. Diese Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$P_{y \geq x}(\mu) = 1 - \sum_{y=0}^{x-1} f_{\mu}(y), \quad (8)$$

wobei $f_{\mu}(y)$ der jeweiligen Poisson-Verteilung entspricht. Analog ergibt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass maximal $x = 28$ Ereignisse in 10 s registriert werden, also $y \leq x$ durch

$$P_{y \leq x}(\mu) = \sum_{y=0}^x f_{\mu}(y). \quad (9)$$

Für einen Mittelwert der Ereignisse im Bereich $\mu = 0$ bis $\mu = 3x = 84$ counts ergeben sich die in [Abbildung 6](#) sichtbaren Verläufe für die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten $P_{y \geq x}(\mu)$ und $P_{y \leq x}(\mu)$. Sichtbar ist dabei einmal der Verlauf in linearer und einmal in halblogarithmischer Skala. Die halblogarithmische Darstellung wird im Folgenden herangezogen, um kleine Wahrscheinlichkeiten genauer zu betrachten. Für ein Konfidenzniveau von $\gamma = 0,99$, also für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,01$, lässt sich außerdem graphisch durch Ablesen der μ -Werte der Schnittpunkte von $\alpha/2$ mit den in [Abbildung 7](#) Verläufen der Wahrscheinlichkeiten $P_{y \geq x}(\mu)$ und $P_{y \leq x}(\mu)$ ein Konfidenzintervall bestimmen.

Sowohl die halbe Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha/2$ als auch das Konfidenzintervall sind ebenfalls in [Abbildung 7](#) sichtbar. Das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $\gamma = 0,99$ lässt sich angeben zu

$$[a, b] = [16,25; 44,74].$$

Zum Vergleich des Konfidenzintervalls wird außerdem das erweiterte Gauß-Intervall berechnet. Mit dem Erweiterungsfaktor $k_{0,99} = 2,576$ (siehe [\[3\]](#), Seite 3) ergibt sich aus $x \pm k_{0,99}\sqrt{x}$ das erweiterte Gauß-Intervall zu

$$[a, b]_{\text{Gauß}} = [14,37; 41,63].$$

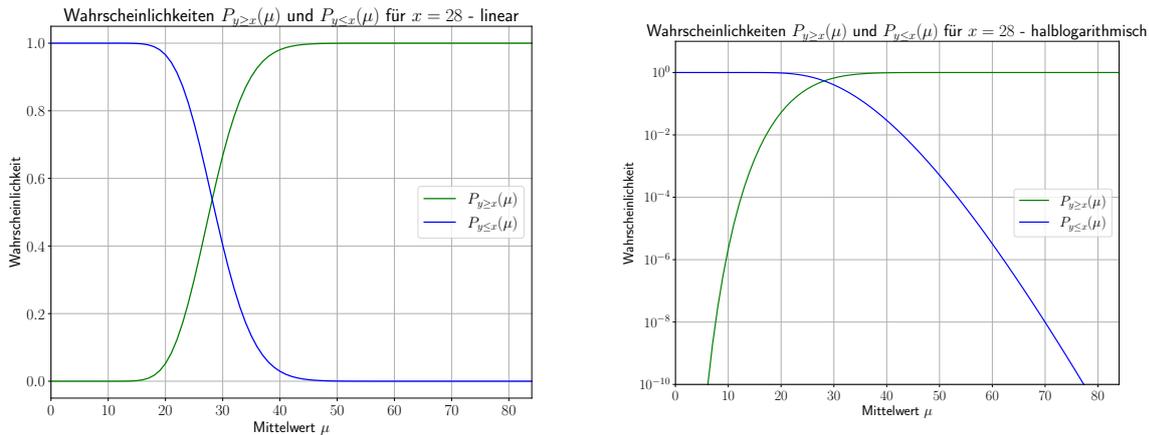


Abbildung 6: Sichtbar sind die Wahrscheinlichkeiten $P_{y \geq x}(\mu)$ und $P_{y \leq x}(\mu)$ für $x = 28$ gegen den Mittelwert μ im Bereich $[0, 3x]$ berechnet nach den Gleichungen (8) und (9). Es wird dabei eine zugrunde liegende Poisson-Verteilung nach Gleichung (2) angenommen. Links ist die Skala linear, rechts halblogarithmisch dargestellt, um kleine Wahrscheinlichkeitsbereiche genauer zu untersuchen.

Das erweiterte Gauß-Intervall ist ebenfalls in [Abbildung 7](#) sichtbar. Vergleicht man das Konfidenzintervall mit dem erweiterten Gauß-Intervall, so ist zu erkennen, dass die beiden Intervalle gegeneinander verschoben sind. Während das erweiterte Gauß-Intervall, wie auch in der Formel dafür sichtbar, symmetrisch um die gemessene Ereigniszahl $x = 28$ liegt, ist das Konfidenzintervall etwas nach rechts verschoben. Dadurch stimmen die Schnittpunkte des Gauß-Intervalls mit den Wahrscheinlichkeitsverläufen nicht mit denen des halben Signifikanzniveaus $\alpha = 0,005$ überein. Die Irrtumswahrscheinlichkeit für Werte kleiner als die linke Intervallgrenze $a_{\text{Gauß}} = 14,37$ liegt daher bei unter 0,5 %, die für Werte größer als die rechte Intervallgrenze $b_{\text{Gauß}} = 41,63$ ist dahingegen größer. Daher beschreibt bei solch einer kurzen Messung der Zählstatistik das erweiterte Gauß-Intervall nur näherungsweise das Konfidenzintervall resultierend aus der Poisson-Verteilung. Für so kurze Messungen beschreibt die Poisson-Verteilung die Ergebnisse also besser als eine Gauß-Verteilung. Diese Erkenntnis stimmt auch mit dem ersten Versuchsteil überein. ✓

Im vorigen Versuchsteil wurde die Untergrundstrahlung untersucht. Da diese ebenfalls die Messungen der Ereignisse mit Präparat beeinflusst, wird deren Beitrag zur Zählung mit dem des Präparats verglichen. Mit der in [Gleichung \(6\)](#) berechneten Untergrundzählrate $R_u = (1,76 \pm 0,06)$ cps lässt sich die erwartete Anzahl an registrierten Untergrund-Ereignissen x_u im Zeitraum der Messung von $t = 10$ s berechnen. Sie ergibt sich zu

$$x_u = R_u \cdot t = (17,6 \pm 0,6), \tag{10}$$

wobei sich die Unsicherheit aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ergibt über

$$\Delta x_u = \sqrt{(t \Delta R_u)^2 + (R_u \Delta t)^2}. \tag{11}$$

Die Unsicherheit der Zeit wurde dabei abermals aufgrund der Anzeigegenauigkeit des elektrischen Zählrohr zu $\Delta t = 0,01$ s geschätzt. Die Ereigniszahl x_u mitsamt ihrer Unsicherheit

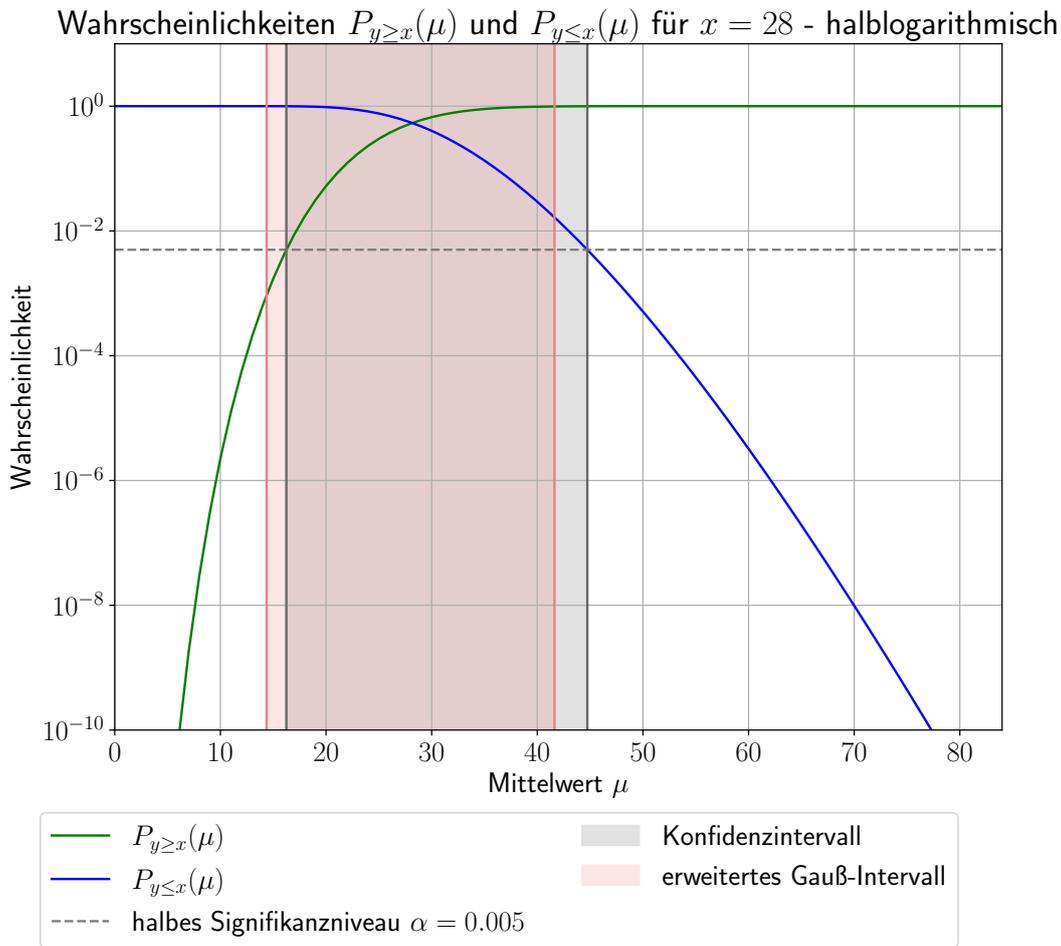


Abbildung 7: Sichtbar sind abermals $P_{y \geq x}(\mu)$ und $P_{y \leq x}(\mu)$ für $x = 28$ gegen den Mittelwert μ im Bereich $[0, 3x]$ berechnet nach den Gleichungen (8) und (9) auf halblogarithmischer Skala. Außerdem dargestellt ist das graphisch bestimmte Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $\gamma = 99\%$. Hierfür wurde die halbe Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha/2 = 0,5\%$ eingezeichnet. Außerdem sichtbar ist das durch $x \pm k_{0,99}\sqrt{x}$ berechnete erweiterte Gauß-Intervall zum Erweiterungsfaktor $k_{0,99} = 2,576$.

ist in [Abbildung 8](#) sichtbar. Es ist zu erkennen, dass sich die Ereigniszahl x_u mitsamt der Unsicherheiten gerade noch innerhalb des Konfidenzintervalls befindet. ✓

Zum Vergleich der Untergrundstrahlung mit der Strahlung des Präparats lässt sich daher die Nullhypothese „Das Präparat gibt keine Strahlung ab“ aufstellen. Dies würde implizieren, dass die gesamte, gemessene Strahlung nur aus der Untergrundzählrate stammt. Zur Überprüfung dieser Hypothese wird der P-Wert, also die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass bei einem Mittelwert von $\mu = x_u = (17,6 \pm 0,6)$, also bei der erwarteten Untergrundzählrate, gerade $x = 28$ oder mehr Ereignisse registriert werden.

Es ergibt sich mit [Gleichung \(8\)](#)

$$P_{y \geq 28}(x_u = 17,6) = 1,3\% . \tag{12}$$

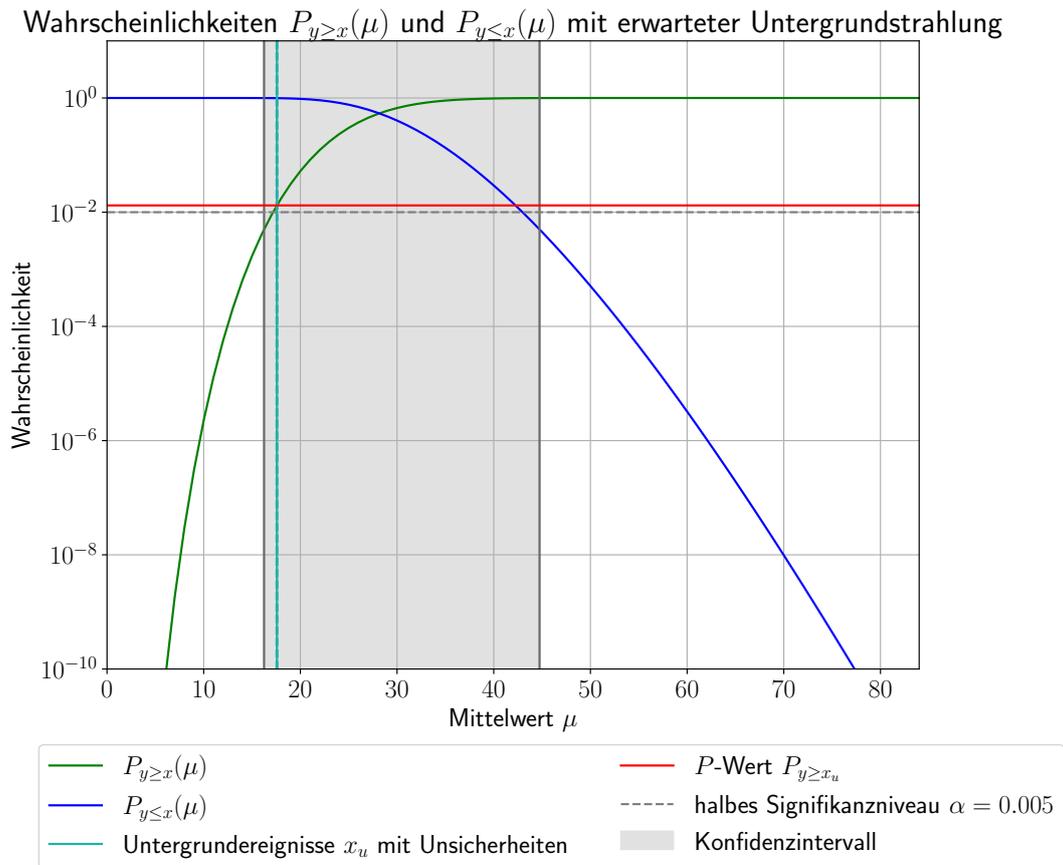


Abbildung 8: Sichtbar sind nochmals die Wahrscheinlichkeiten $P_{y \geq x}(\mu)$ und $P_{y \leq x}(\mu)$ für $x = 28$ gegen den Mittelwert μ im Bereich $[0, 3x]$ berechnet nach den Gleichungen (8) und (9) auf halblogarithmischer Skala. Außerdem dargestellt ist die erwartete Untergrundstrahlung mitsamt Unsicherheiten $x_u = (17,6 \pm 0,6)$ berechnet aus der zuvor in Gleichung (6) erhaltenen Untergrundzählrate. Des Weiteren ist der zur Nullhypothese berechnete P-Wert $P_{y \geq 28}(x_u = 17,6)$ und das Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$. Da der P-Wert größer als die Irrtumswahrscheinlichkeit ist, kann die Nullhypothese, dass die gemessenen Ereignisse aus der Untergrundstrahlung resultieren, nicht verworfen werden.

Der P-Wert ist ebenfalls in **Abbildung 8** sichtbar. Damit ist insbesondere $P_{y \geq 28}(17,6) = 1,3\% > \alpha = 1\%$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der erwarteten Untergrundstrahlung die gemessenen 28 Ereignisse oder gar mehr auftreten liegt also leicht über der Irrtumswahrscheinlichkeit α . Bei einem Konfidenzniveau von $\gamma = 99\%$ kann also die Nullhypothese, dass das Präparat gar nicht strahlt, nicht verworfen werden. Dies deckt sich mit der Beobachtung in **Abbildung 8**, dass der Mittelwert der Untergrundstrahlung noch im Konfidenzintervall liegt. Es kann daher bei dieser einzelnen Messung nicht ausgeschlossen werden, dass es sich nur um Untergrundzerfälle handelt, die statistisch schwanken und die untersuchten thoriumhaltigen Schweißelektroden gar keine Strahlungsaktivität aufwiesen.



3.4 Untersuchung des Präparats in einer langen Messung

Um nun ein aussagekräftigeres Ergebnis zu erhalten ob die Nullhypothese verworfen wird oder angenommen werden kann, wurde bei gleichbleibendem Versuchsaufbau eine deutlich längere Messung ^{durchgeführt} gemacht. Dabei wurden über einen Zeitraum von 3602,63 s \approx 1 h die Ereignisse am Geiger-Müller-Zählrohr gezählt.

Innerhalb dieses Zeitraums konnten

$$x_{\text{lang}} = 12\,200 \pm 110$$

Ereignisse gemessen werden. Die Unsicherheit ergibt sich dabei erneut aus der Wurzel des Messwertes, da als statistische Näherung eine ~~Gaußverteilung~~ der Messgröße angenommen werden kann. Wie im letzten Versuchsteil, kann anhand von \downarrow Poisson!

$$R = \frac{x}{t}$$

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{1}{t} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{x}{t^2} \Delta t\right)^2} \quad (13)$$

die Zählrate für diese Messung bestimmt werden. Diese ergibt sich zu

$$R_{\text{lang}} = (3,39 \pm 0,03) \text{ cps} .$$

Um einen Vergleich mit der berechneten Untergrundzählrate zu erhalten, kann nun der t-Wert zwischen beiden Größen berechnet werden. Dieser ist in diesem Fall sinnvoll, da beide Messgrößen in einer Näherung als Gaußverteilt angenommen werden können.

Der t-Test mit der Untergrundzählrate ergibt

$$t_{\text{lang}} = 25,2 .$$

Innerhalb ihrer Unsicherheiten sind die beiden Zählraten also sehr deutlich nicht miteinander verträglich, da $t \gg 2$ ist. Da $R_{\text{lang}} > R_U$ weist dies darauf hin, dass das Präparat Strahlung aussendet.

Um ein quantitatives Ergebnis zu erhalten, wird erneut die Nullhypothese „Das Präparat gibt keine Strahlung ab“ aufgestellt und mit einem Konfidenzniveau $\gamma = 0,99$ untersucht. Hierzu wird der P-Wert mit einer Gauß-Näherung verwendet. Dieser ergibt sich nach [2] aus

$$P_{\text{lang}} = \int_{R_{\text{lang}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx . \quad (14)$$

Hierbei ist $\mu = R_U$ und $\sigma = \sqrt{(\Delta R_U)^2 + (\Delta R_{\text{lang}})^2}$. Dieses Integral wurde mit Hilfe von Mathematica berechnet und ergibt einen so verschwindend geringen Wert, dass Mathematica diesen nicht von 0 unterscheiden kann. Somit gilt

$$P_{\text{lang}} \approx 0 .$$

P_{lang} gibt dabei die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Zählrate mit $R \geq R_{\text{lang}}$, bei den bestimmten Unsicherheiten, nur aufgrund der Untergrundstrahlung gemessen wird. Da zuvor ein Signifikanzniveau $\alpha = 1 - \gamma = 1\%$ gewählt wurde und $P_{\text{lang}} \ll \alpha$ gilt, kann die Nullhypothese mit ausreichend großer Sicherheit abgelehnt werden.

Es folgt nach dieser Auswertung also, dass das Präparat mit Sicherheit Strahlung abgibt. ✓

4 Diskussion der Ergebnisse

4.1 Angabe und Diskussion der Endergebnisse

Zu Beginn des Versuches musste das Zählrohr kalibriert werden. Dabei stellte sich heraus, dass in einem Bereich von 400 V bis 650 V der Plateaubereich erreicht wurde. Um eine sinnvolle und aussagekräftige Messung zu gewährleisten, wurde eine Betriebsspannung von $V = 520$ V eingestellt, da bei dieser offenbar ein ausreichender Lawineneffekt im Zählrohr ausgelöst wurde.

Mithilfe des eingestellten Zählrohrs, konnte nun die Untergrundstrahlung gemessen werden um eine Kalibrierung unter Normalbedingungen durchzuführen. Aus den hierfür aufgenommenen Messwerten wurden relative Häufigkeiten der einzelnen Ereignisse bestimmt und mit Poisson- und Gauß-Verteilungen verglichen. Die Verteilungen sind in [Abbildungen 3 bis 5](#) dargestellt. Auch wurden hierfür jeweils Mittelwert, Standardabweichung und Varianz berechnet, sowie die empirische Schiefe und Wölbung.

Wie bereits erwähnt wurde, ist hierbei auffällig, dass in jedem Fall die gemessenen Werte besser durch eine Poisson-Verteilung beschrieben werden konnten. Allerdings konnte die Poisson-Verteilung die Messreihen mit zunehmender Länge der Messungen jeweils schlechter beschreiben, während die Gauß-Verteilung dies immer besser ermöglichte. Dies sah man am deutlichsten an die reduzierten χ^2 -Werten, die in [Abschnitt 3.2](#) berechnet wurden. Diese Beobachtung ist konsistent mit der Erwartung, dass lange Messreihen einer statistisch verteilten Messgröße näherungsweise durch eine Gauß-Verteilung beschrieben werden können, wobei sich ebenfalls die Poisson-Verteilung für große Messreihen einer Gauß-Verteilung annähert.

Es folgt also, dass große Messreihen deutlich sinnvoller sind um eine statistisch verteilte Größe gut durch eine Gauß-Näherung zu beschreiben.

Aus den gemessenen Zählraten, konnte nun durch Mittlung eine endgültige Untergrundzählrate ermitteln zu

$$R_U = (1,76 \pm 0,06) \text{ cps} \qquad \frac{\Delta R_U}{R_U} = 3,4 \% .$$

Mit dem so kalibrierten Zählrohr, wurde nun ein Präparat untersucht. Für eine kurze Messung wurden Konfidenzintervall, sowie erweitertes Gauß-Intervall für den gemessenen Mittelwert aufgetragen. Abermals war die leichte Asymmetrie des Gauß-Intervalls um den Mittelwert auffällig. Diese deutet auf eine im Rahmen der Gauß-Näherung nicht ganz korrekte Beschreibung der Messwerte hin.

Da die Ergebnisse der Untergrundmessung noch innerhalb des Konfidenzintervalls liegen, kann die Nullhypothese „Das Präparat gibt keine Strahlung ab“ bei festgelegtem Konfidenzniveau nicht mit Sicherheit verworfen werden.

Über ein längeres Messintervall, konnte eine aussagekräftigere Messung erfolgen. Nach dieser ergab sich die Zählrate mit Präparat zu

$$R_{\text{lang}} = (3,39 \pm 0,03) \text{ cps} \qquad \frac{\Delta R_{\text{lang}}}{R_{\text{lang}}} = 0,88 \% .$$

Zu dieser konnten t- und P-Wert zu

$$t_{\text{lang}} = 25,2$$
$$P_{\text{lang}} = 0$$

berechnet werden. Beide Werte weisen also mit sehr hoher Sicherheit darauf hin, dass die Nullhypothese bei den gegebenen Unsicherheiten der Werte abgelehnt werden kann. Dass diese Sicherheit so groß ist, kann man schon an den geringen relativen Unsicherheiten sehen. Aufgrund der großen Anzahl an Messungen, bzw. der Länge der Messung mit Präparat war in diesem Fall, anders als bei der kurzen Messung, also eine eindeutige Aussage über die Nullhypothese möglich.

Die verwendeten Präparate gaben also mit sehr hoher Sicherheit Strahlung ab.

Diese Vorgehensweise zeigt, dass lange Messreihen mit vielen Messwerten eine deutlich höhere Aussagekraft über den zugrundeliegenden Zusammenhang haben als kurze Messreihen.

Inwiefern die durchgeführten Messungen auch im Bezug auf genau diese Aussagekraft waren, wird nun im Folgenden diskutiert. ✓

4.2 Diskussion der verwendeten Messmethoden

Die Wahl der Detektorspannung war durch die aufgenommene Messreihe ohne Probleme möglich. Dadurch, dass ein weitläufiges Spannungsplateau gemessen wurde, sind auch die Messunsicherheiten für das Ergebnis kaum relevant. Da zudem die gesamte Messung mit gleichbleibender Zählrohrspannung durchgeführt wurde, ist somit auch keine systematische Unsicherheit der Messwerte zueinander zu erwarten. ✓

Im zweiten Versuchsteil wurde die Untergrundstrahlung durch verschiedene Messreihen untersucht. Die verwendeten Messzeiten waren jeweils zu kurz, um gut durch eine Gauß-Verteilung dargestellt zu werden. Für größere Messzeiten hätte diese Verteilung sicherlich besser gepasst, weil dann auch mehr Ereignisse pro Messung gezählt würden. Außerdem gab es trotz je 100 Messungen große statistische Schwankungen. Dies wird auch dadurch deutlich, dass die Daten in den Diagrammen nicht immer poissonverteilt aussehen, die Balkenhöhe der Histogramme weicht teilweise ab. Dadurch konnte die Untergrundzählrate nur mit einer gewissen Genauigkeit bestimmt werden. Je höher diese Genauigkeit ist, desto eindeutiger können Strahler in den darauffolgenden Versuchsteilen identifiziert werden. Hier gibt es also Verbesserungspotential. ✓

Wie beschrieben, war die kurze Messung im dritten Versuchsteil war nicht aussagekräftig genug, um die Nullhypothese zu verwerfen. Die Messzeit war so kurz, dass statistische Schwankungen einen sehr hohen Einfluss hatten. Da es sich nur um eine Einzelmessung handelt, konnten dieser nicht kompensiert werden. ✓

Im vierten Versuchsteil wurden diese Probleme durch eine lange Messzeit minimiert. Diese verringerte den Einfluss statistischer Schwankungen so stark, dass die Nullhypothese mit einer sehr hohen Sicherheit verworfen werden konnte. Diese Messmethode sorgt also für ein klares Messergebnis. ✓

Andererseits sieht man am Beispiel der vorliegenden Langzeitmessung, dass es auch zu genaue Messungen geben kann, denn die Nullhypothese wurde mit einer unnötig hohen Sicherheit abgelehnt. Es ist also immer ein Weg zwischen kurzer Messung und hoher Genauigkeit zu wählen, um Zeit und Ressourcen zu sparen und dennoch ein aussagekräftiges Messergebnis zu erhalten. ✓

Einige weitere Fehlerquellen waren für alle Versuchsteile relevant. So kommt es im Zählrohr nach jedem Ereignis zu einer kurzen, baubedingten Totzeit von $t_{\text{tot}} \approx 1 \cdot 10^{-4}$ s. In dieser Zeit können keine weiteren Ereignisse registriert werden. Dieser Beitrag zur Gesamtunsicherheit ist allerdings deutlich geringer als die ermittelten statistischen Unsicherheiten bei allen gemessenen Ergebnissen, sie kann also vernachlässigt werden.

Die Unsicherheit der Zeitmessung war nicht angegeben und musste aus der Auflösung am Messgerät geschätzt werden. Auch diese hatte im Vergleich zu der Unsicherheit der Ereignisse aber einen vernachlässigbaren Einfluss. ✓

4.3 Verbesserte Messmethoden

Nach den Ergebnissen der Messungen mit Präparat, sollten auch die Messungen der Untergrundstrahlung mit längerer Messzeit durchgeführt werden um statistische Schwankungen zu minimieren. Mehr Messungen pro Messreihe wären außerdem nützlich, um eine Untergrundzählrate mit geringerer Unsicherheit zu erzielen. Außerdem sollte wenn möglich das Cäsiumpräparat entfernt werden, um einen unverfälschten Wert für die Untergrundzählrate zu erhalten. Dies würde zwar an der Aussagekraft der Messergebnisse nichts ändern, da nur die Messwerte in Relation zur Untergrundstrahlung relevant sind, dennoch würde dies zusätzlich eine genauere Quantifikation der tatsächlichen Untergrundzählrate im Raum ermöglichen, was als weiteres Ergebnis interessant wäre.

Im dritten Versuchsteil sollte anstatt einer Einzelmessung eine Messreihe durchgeführt werden, um dem Messergebnis mehr Aussagekraft zu verleihen. Ist auch dann kein eindeutiges Verwerfen der Nullhypothese möglich, so könnte eine noch genauere Quantifizierung der Untergrundstrahlung ein eindeutigeres Ergebnis liefern.

Alternativ könnte der vorhandene Strahler näher an das Zählrohr gelegt werden, weil dadurch nach dem Abstandsgesetz mehr Ereignisse registriert würden. Auch wäre es sinnvoll so wenig, Materie, wie möglich zwischen den Strahler und das Zählrohr zu stellen, da dadurch bereits große Teile der α - und β -Strahlung absorbiert werden. Um diese an der Messung zu beteiligen, wäre es also sinnvoll den Holzblock um das Zählrohr zu entfernen. ✓

A Anhang

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Skizze des Versuchsaufbaus | 2 |
| 2 | Kennlinie des Zählrohrs | 3 |
| 3 | Histogramm der relativen Häufigkeit von x in 1 Sekunde | 5 |
| 4 | Histogramm der relativen Häufigkeit von x in 2 Sekunden | 7 |
| 5 | Histogramm der relativen Häufigkeit von x in 4 Sekunden | 8 |
| 6 | Wahrscheinlichkeiten $P_{y \geq x}(\mu)$ und $P_{y \leq x}(\mu)$ | 10 |
| 7 | Wahrscheinlichkeiten $P_{y \geq x}(\mu)$ und $P_{y \leq x}(\mu)$ mit Konfidenz- und Gauß-Intervall | 11 |
| 8 | Wahrscheinlichkeiten $P_{y \geq x}(\mu)$ und $P_{y \leq x}(\mu)$ mit Untergrundstrahlung | 12 |
| 9 | Messprotokoll Seite 1 | 18 |
| 10 | Messprotokoll Seite 2 | 19 |
| 11 | Messprotokoll Seite 3 | 20 |

Tabellenverzeichnis

| | | |
|---|--|---|
| 1 | Mittelwert, Standardabweichung, Varianz, Varianz der Poissonverteilung . | 6 |
| 2 | Schiefe und Wölbung der Messwerte und der Poissonverteilung | 6 |

Literaturverzeichnis

- [1] *Physiklabor für Anfänger*innen Teil 2, Datenanalyse B* (Physikalisches Institut, Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2022, 23. März 2022).
- [2] *Physiklabor für Anfänger*innen Teil 2, Datenanalyse A* (Physikalisches Institut, Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2022, 23. März 2022).
- [3] *Normalverteilung* (Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY, 24. März 2022), https://www-zeuthen.desy.de/~kolanosk/smd_ss02/skripte/vert2.pdf.
- [4] *Physiklabor für Anfänger*innen Teil 2, Anleitung Versuch 84, Zählstatistik* (Physikalisches Institut, Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2022, 23. März 2022).
- [5] *Physiklabor für Anfänger*innen Teil 2, Aufbau Versuch 84* (Physikalisches Institut, Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2022, 23. März 2022), <https://omnibus.uni-freiburg.de/~phypra/ap/84/>.

A.1 Messprotokoll

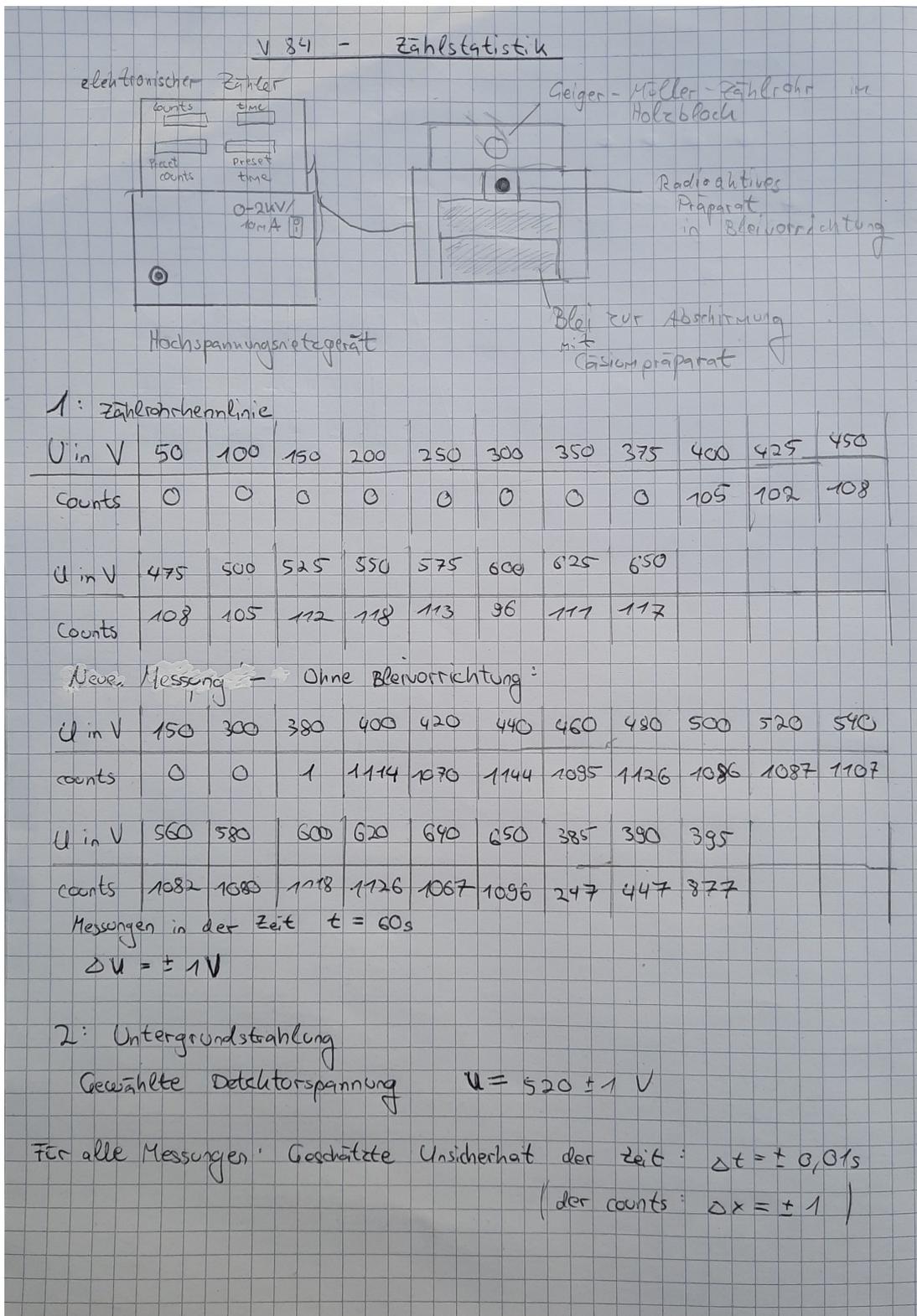


Abbildung 9: Messprotokoll Seite 1

| $t = 1s$ | | $t = 2s$ | | $t = 4s$ | |
|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| counts | counts | counts | counts | counts | counts |
| 2 | 2 | 2 | 0 | 16 | 8 |
| 2 | 2 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 1 | 5 | 4 | 5 | 5 |
| 2 | 1 | 2 | 5 | 8 | 6 |
| 3 | 2 | 2 | 3 | 12 | 9 |
| 1 | 4 | 8 | 8 | 8 | 3 |
| 3 | 2 | 4 | 6 | 11 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 11 | 9 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 7 | 5 |
| 1 | 1 | 7 | 2 | 4 | 8 |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 6 | 5 |
| 2 | 0 | 3 | 4 | 6 | 8 |
| 1 | 2 | 4 | 6 | 9 | 5 |
| 3 | 0 | 2 | 6 | 11 | 6 |
| 1 | 1 | 1 | 5 | 7 | 5 |
| 2 | 4 | 5 | 5 | 9 | 10 |
| 2 | 3 | 3 | 3 | 6 | 5 |
| 2 | 1 | 3 | 7 | 8 | 6 |
| 2 | 0 | 7 | 1 | 12 | 6 |
| 0 | 1 | 7 | 3 | 5 | 7 |
| 1 | 5 | 2 | 4 | 8 | 11 |
| 1 | 0 | 4 | 8 | 6 | 10 |
| 2 | 0 | 4 | 6 | 10 | 4 |
| 4 | 1 | 4 | 4 | 6 | 7 |
| 4 | 2 | 2 | 4 | 4 | 9 |
| 2 | 1 | 6 | 4 | 7 | 6 |
| 3 | 1 | 5 | 4 | 8 | 6 |
| 0 | 0 | 1 | 4 | 10 | 9 |
| 3 | 0 | 1 | 2 | 11 | 7 |
| 1 | 0 | 3 | 3 | 10 | 6 |
| 1 | 0 | 2 | 6 | 7 | 6 |
| 0 | 1 | 7 | 1 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 5 | 4 | 8 | 4 |
| 1 | 1 | 6 | 1 | 9 | 7 |
| 1 | 4 | 4 | 4 | 3 | 12 |
| 1 | 1 | 2 | 4 | 9 | 8 |
| 1 | 0 | 3 | 6 | 9 | 8 |
| 1 | 0 | 2 | 9 | 9 | 6 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 6 | 8 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 8 | 8 |
| 3 | 1 | 6 | 3 | 5 | 4 |
| 3 | 3 | 1 | 4 | 5 | 11 |
| 1 | 0 | 3 | 3 | 9 | 5 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 7 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 8 | 5 |
| 0 | 3 | 6 | 5 | 4 | 9 |
| 1 | 1 | 4 | 3 | 7 | 8 |
| 1 | 1 | 3 | 10 | 8 | 7 |
| 5 | 2 | 1 | 6 | 11 | 6 |
| 0 | 4 | 3 | 2 | 12 | 8 |

Abbildung 10: Messprotokoll Seite 2

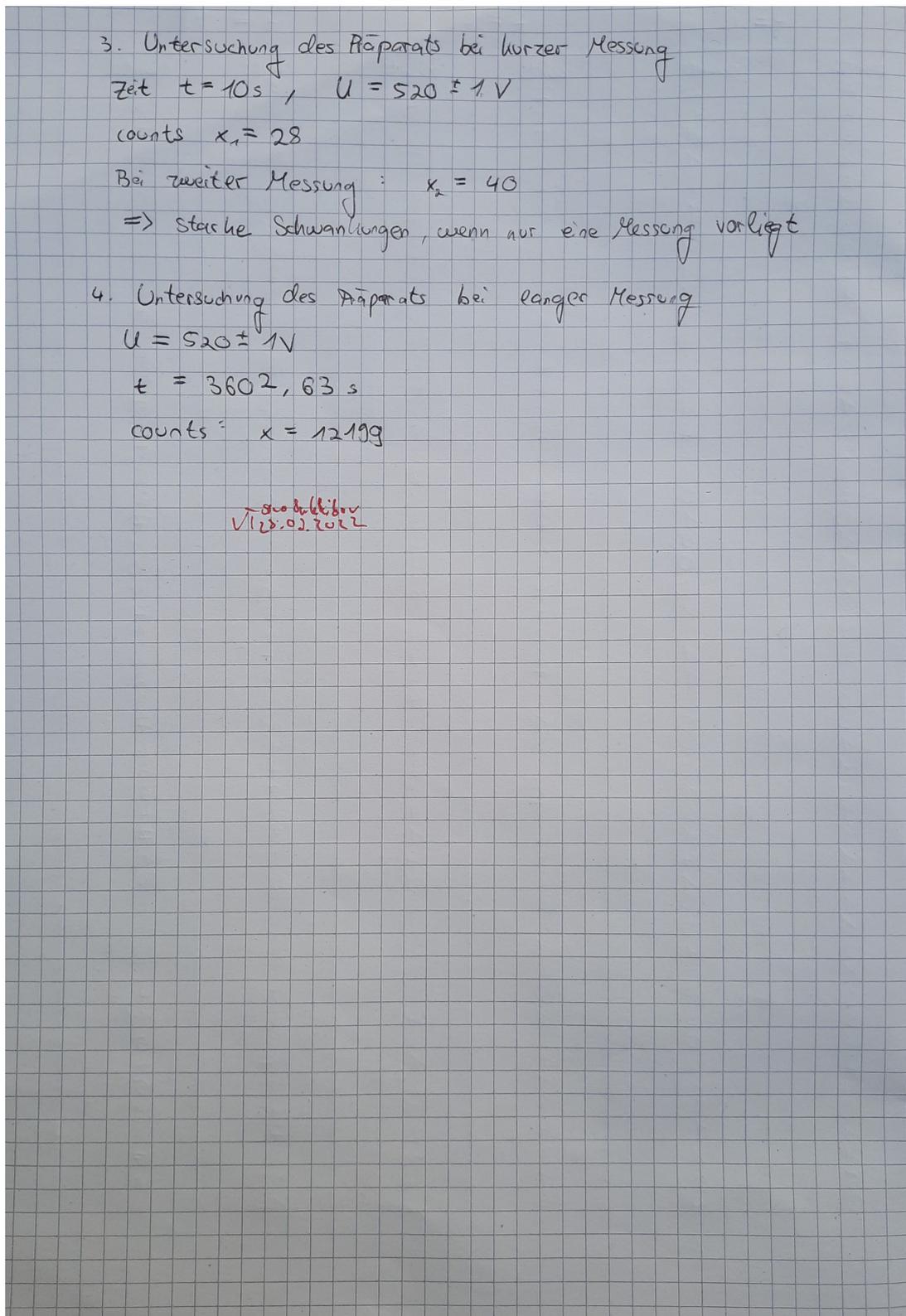


Abbildung 11: Messprotokoll Seite 3