

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG  
PHYSIKLABOR FÜR ANFÄNGER\*INNEN, TEIL 2  
WINTERSEMESTER 2021/22

VERSUCH 83 AM 31.03.2022

## Röntgenstrahlung

Gruppe 211:  
01.04.2022

Assistent:

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Ziel des Versuchs</b>	<b>2</b>
<b>2 Aufbau und Durchführung</b>	<b>2</b>
<b>3 Auswertung und Fehleranalyse</b>	<b>3</b>
3.1 Röntgenspektrum am LiF-Kristall . . . . .	3
3.2 Röntgenspektrum eines unbekanntes Kristalls . . . . .	6
<b>4 Diskussion der Ergebnisse</b>	<b>8</b>
4.1 Zusammenstellung der Ergebnisse . . . . .	8
4.2 Vergleich mit den aus der Theorie bekannten Gesetzen und Literaturwerten . . . . .	8
4.3 Fehlerdiskussion . . . . .	10
4.4 Verbesserte Messmethoden . . . . .	10
<b>5 Literatur</b>	<b>12</b>
<b>6 Anhang</b>	<b>13</b>
6.1 Tabellen und Grafiken . . . . .	13
6.2 Laborbuch . . . . .	15
6.3 Abbildungsverzeichnis . . . . .	17

## 1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch soll mithilfe einer Röntgenröhre die Bragg-Reflexion an Netzebenen verschiedener Kristalle untersucht werden. Dazu wird zunächst anhand eines bekannten LiF-Kristalls das Röntgenspektrum der verwendeten Kupferanode analysiert und die berechneten Werte für Grenzwellenlänge und charakteristische Linien des Röntgenspektrums mit der Theorie verglichen. In einem zweiten Versuchsteil kann dann anhand der bestimmten Daten für die Anode der Netzebenenabstand eines unbekanntes Kristalls bestimmt werden.

## 2 Aufbau und Durchführung

Um die oben genannten Ziele zu erreichen, wird der in [Abbildung 1](#) dargestellte Versuchsaufbau verwendet. Hiermit können Kristalle in verschiedenen Winkeln  $\theta$  mit Röntgenstrahlung bestrahlt werden.

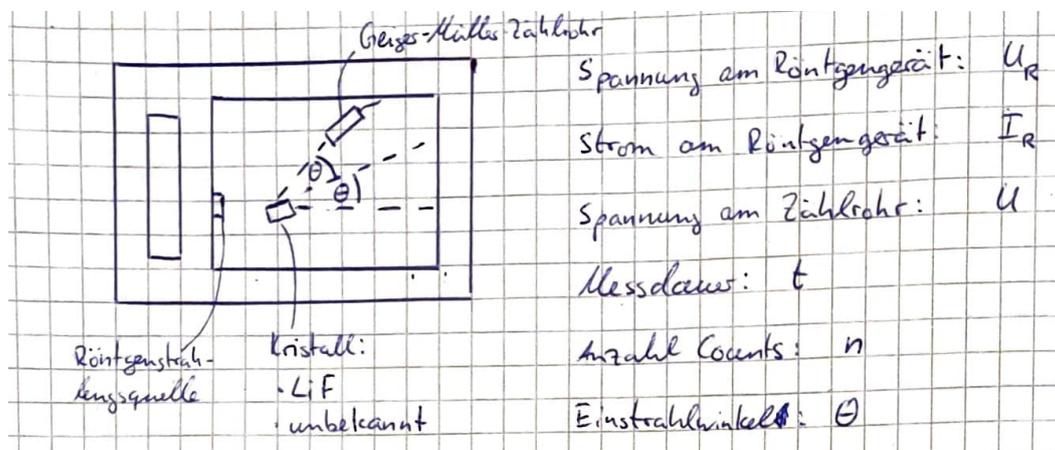


Abb. 1: Skizze des Versuchsaufbaus aus dem Laborbuch ([Abbildung 8](#)) mit allen relevanten Größen für die Messung. Zu sehen ist das verwendete Röntgengerät mit Röntgenstrahlungsquelle, Geiger-Müller-Zählrohr und eingebautem Kristall. Zudem sind die Größen Spannung am Röntgengerät  $U_R$ , Strom am Röntgengerät  $I_R$ , Spannung am Zählrohr  $U$ , Messdauer  $t$ , Anzahl an Counts  $n$  und Einstrahlwinkel  $\theta$  definiert.

Es wird zunächst ein LiF-Kristall mit Netzebenenabstand  $d_{\text{LiF}}$  eingespannt. Am Röntgengerät werden die Anodenspannung  $U_R$  und der Strom  $I_R$  verwendet. Der Winkel  $\theta$  zwischen Röntgenstrahl und Kristalloberfläche kann eingestellt und auf einer digitalen Skala abgelesen werden. Im gleichen Winkel  $\theta$  zum Kristall wird ein Geiger-Müller-Zählrohr positioniert, welches die Anzahl  $n$  an Anregungen durch die Röntgenstrahlung registriert. Das Zählrohr wird mit der Zählrohrspannung  $U$  betrieben. Es wird darauf geachtet, einen Bereich zwischen  $2^\circ$  und  $30^\circ$  in  $1^\circ$ -Schritten abzudecken. Dort, wo hieraus ein Extremum zu vermuten ist, werden weitere Messwerte in kleineren Winkelabständen aufgenommen.

Anschließend wird anstelle des LiF-Kristalls ein unbekannter Kristall auf die gleiche Weise vermessen.

Die Ableseunsicherheiten der Winkel  $\theta$  sowie der Spannungs- und Strommessung werden aufgrund der digitalen Skalen mit Rechtecksverteilung der letzten Nachkommastelle mit Formeln aus [1] ermittelt. Der Fehler auf die Anzahl  $n$  an Anregungen wird durch  $\sqrt{n}$  abgeschätzt.

### 3 Auswertung und Fehleranalyse

Zur Emission der Röntgenstrahlung werden mit der Spannung  $U_R$  Elektronen aus einer Glühkathode beschleunigt. Gelangen diese Elektronen in die Kupferanode, so werden sie zum einen an positiv geladenen Atomkernen abgebremst. Die hierdurch entstehenden Verluste an kinetischer Energie werden durch Röntgenstrahlung emittiert. Dies kann als sogenannte Bremsstrahlung im Röntgenspektrum beobachtet werden. Dieses beginnt bei der Grenzwellenlänge  $\lambda_g$ , welche entsteht, wenn ein Elektron seine gesamte kinetische Energie bei einer Abbremsung abgibt. Sie hängt von der Geschwindigkeit der Elektronen, also der Anodenspannung  $U_R$  ab. Dann steigt die Intensität an, um für große Wellenlängen  $\lambda$  wieder abzufallen.

Hinzu kommt, dass durch die eingestrahlenen Elektronen Elektronen in den Kupferatomen aus dem niedrigsten Energieniveau in die äußerste Schale angehoben werden. Um die Lücke in der untersten Schale auszugleichen, fällt ein Elektron aus dem zweiten oder dritten Energieniveau in das unterste Energieniveau zurück. Dabei wird ebenfalls Röntgenstrahlung emittiert, die im Spektrum als  $K_\alpha$ - beziehungsweise  $K_\beta$ -Peak zu sehen ist. Der  $K_\alpha$ -Übergang findet dabei häufiger statt, sollte im Spektrum also einen höheren Peak ergeben.

Der soeben beschriebene theoretische Verlauf des Röntgenspektrums ist in [Abbildung 5](#) im Anhang zu sehen.

#### 3.1 Röntgenspektrum am LiF-Kristall

Die soeben beschriebenen charakteristischen Punkte im Spektrum werden nun beim LiF-Kristall bestimmt. Hierfür werden die folgende Anodenspannung  $U_R$ , der Strom  $I_R$  und die Zählrohrspannung  $U$  verwendet:

$$\begin{aligned} U_R &= (35,00 \pm 0,06) \text{ kV}, \\ I_R &= (1,000 \pm 0,006) \text{ mA}, \\ U &= (500,0 \pm 0,6) \text{ V}. \end{aligned}$$

Es werden die Anzahl an Anregungen  $n$  bei einer Messdauer von  $t = 20$  s und variierten Einstrahlwinkeln  $\theta$  gemessen.

Die Röntgenstrahlung trifft im Winkel  $\theta$  auf den Kristall. Man kann näherungsweise annehmen, dass der Kristall aus mehreren Ebenen mit Abstand  $d$  besteht. An jeder dieser Ebenen werden Teile des Strahls reflektiert. Diese interferieren nach der Reflexion miteinander. Die Bedingung für ein Interferenzmaximum lautet:

$$m\lambda = 2d \cdot \sin(\theta) \quad \text{mit } m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Für Winkel, bei denen diese Bedingung für eine Wellenlänge  $\lambda$  nicht erfüllt ist, gelangt kaum Intensität aus dieser Wellenlänge in den Geiger-Müller-Zähler. Somit können die Anregungen  $n$  unter jedem Winkel  $\theta$  einer Wellenlänge  $\lambda$  zugeordnet werden, wenn der Gitterebenenabstand  $d$  bekannt ist. Da nur Maxima erster Ordnung beobachtet werden, können so die Wellenlängen und ihre Unsicherheit durch Fehlerfortpflanzung mit Formeln aus [\[1\]](#) wie folgt aus den gemessenen Winkeln  $\theta$  berechnet werden:

$$\lambda = 2d_{\text{LiF}} \cdot \sin(\theta), \tag{1}$$

$$\Delta\lambda = |2d_{\text{LiF}} \cos(\theta) \cdot \Delta\theta|. \tag{2}$$

Der Wert für den Netzebenenabstand  $d_{\text{LiF}}$  wird dabei [\[2\]](#) entnommen. Die so erhaltenen Wellenlängen  $\lambda$  sind in [Abbildung 2](#) gegen die Anzahl an Anregungen aufgetragen.

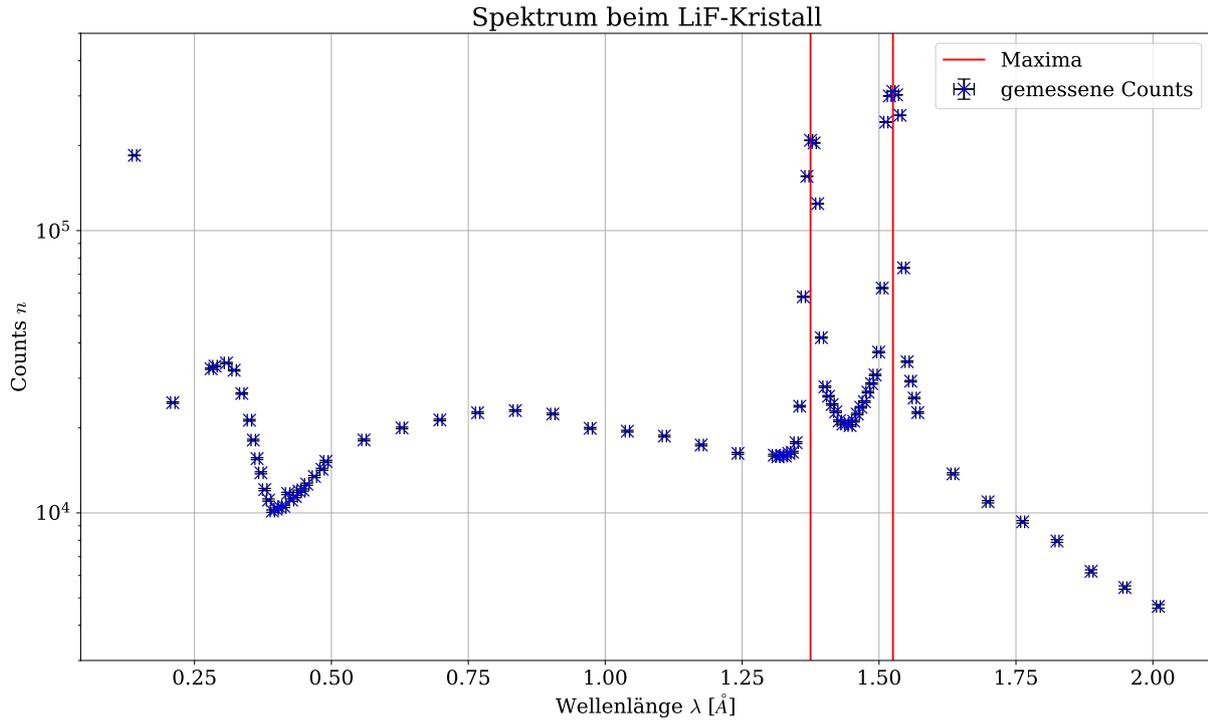


Abb. 2: Abgebildet ist das Spektrum beim LiF-Kristall mit eingezeichnetem  $K_\beta$ - beziehungsweise  $K_\alpha$ -Peak. Dabei sind die Counts  $n$  des Geiger-Müller-Zählrohrs gegen die Wellenlänge  $\lambda$  in  $\text{\AA}$  aufgetragen. Die  $y$ -Achse ist dabei logarithmisch skaliert.

Man sieht für kleine Werte von  $\lambda$ , also kleine Winkel  $\theta$ , eine hohe Anzahl  $n$  an Anregungen. Dies ist nach der oben beschriebenen Theorie nicht zu erwarten, da das Bremsspektrum erst ab einer Grenzwellenlänge  $\lambda_g$  Anregungen erklärt. Es wird vermutet, dass dieser Anstieg dadurch zustande kommt, dass der Röntgenstrahl aufgrund seiner zu großen Ausdehnung zum Teil am Kristall vorbei, direkt auf das Geiger-Müller-Zählrohr trifft.

Außerdem sind der  $K_\alpha$ - und der  $K_\beta$ -Peak zu sehen und in [Abbildung 2](#) mit roten Linien eingezeichnet, wobei der maximale Wert von  $n$  verwendet wird. Der rechte Peak kommt dabei durch den  $K_\alpha$ -Übergang zustande. Hierbei springt das Elektron nur um ein Energieniveau zurück und emittiert hierdurch Photonen einer kleineren Energie, also größeren Wellenlänge  $\lambda$ , als beim  $K_\beta$ -Übergang.

Für die Unsicherheit auf die Wellenlänge werden zwei Punkte im Spektrum gesucht, bei denen sich mit Sicherheit sagen lässt, dass hier nicht das Maximum ist, da hier schon deutlich weniger Anregungen  $n$  gezählt werden. Innerhalb dieses Vertrauensintervalls wird eine Rechteckverteilung angenommen und die Unsicherheit wie in [1] ermittelt.

Für den  $K_\alpha$ - und  $K_\beta$ -Peak werden somit folgende Werte ermittelt:

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha &= (1,525 \pm 0,011) \text{\AA}, \\ \lambda_\beta &= (1,375 \pm 0,011) \text{\AA}.\end{aligned}$$

Die Grenzwellenlänge  $\lambda_g$  des Bremsspektrums kann aufgrund des oben beschriebenen steilen Anstiegs der Anregungen  $n$  für kleine Winkel nur schlecht bestimmt werden. Da keine Nullstelle im Spektrum beobachtet wird, wird die Grenzwellenlänge  $\lambda_g$  wie folgt abgeschätzt. Als obere

Grenze wird die Wellenlänge  $\lambda_{g, \max}$  bestimmt, bei der die geringste Anzahl an Anregungen  $n$  gemessen wird, bevor diese Anzahl für noch kleinere Wellenlängen wieder ansteigt. Für die untere Grenze wird eine gewichtete lineare Regression der Werte des Bremsspektrums rechts des fraglichen Minimums durchgeführt. Da das Bremsspektrum in diesem Bereich konkav verläuft, ist der tatsächliche Nulldurchgang vermutlich bei einer größeren Wellenlänge als die Nullstelle  $\lambda_{g, \min}$  der Ausgleichsgeraden. Die mit Formeln aus [3] durchgeführte gewichtete lineare Regression ist in [Abbildung 3](#) zu sehen.

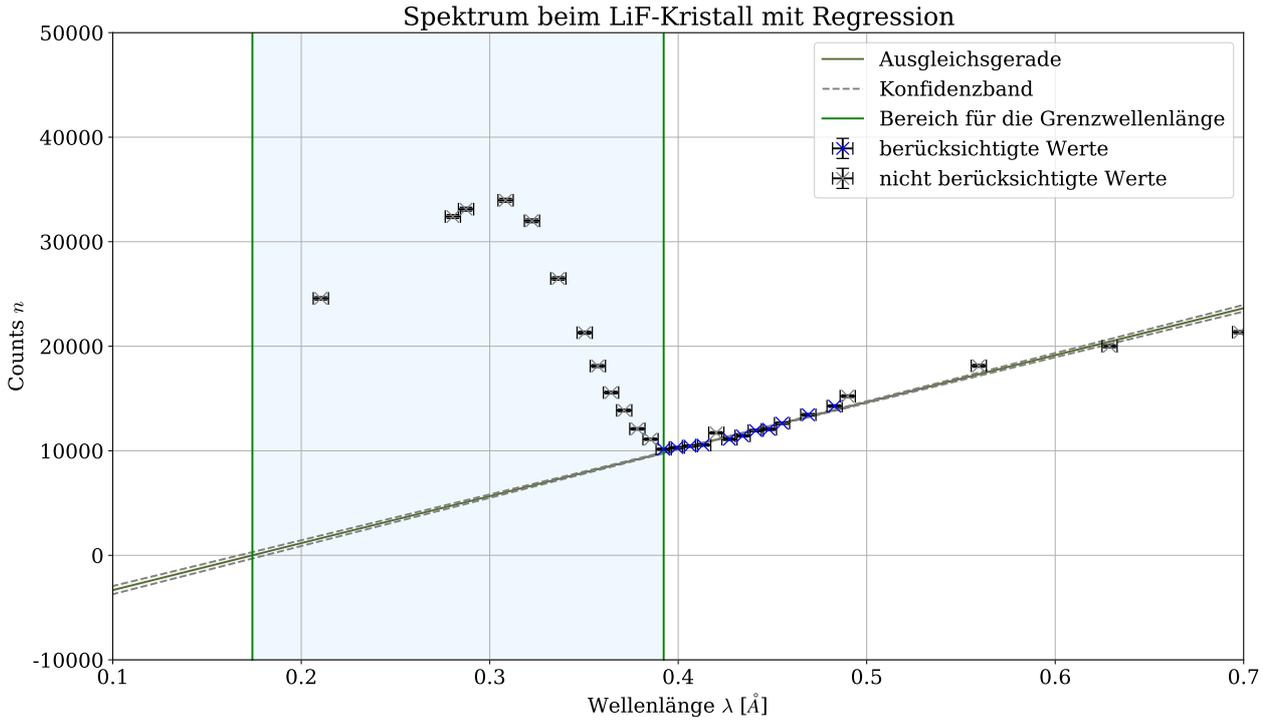


Abb. 3: Abgebildet ist das Spektrum des LiF-Kristalls in der Nähe der vermuteten Grenzwellenlänge  $\lambda_g$ . Zusätzlich ist eine gewichtete lineare Regression mit einem  $1\sigma$ -Konfidenzband aufgetragen, wobei nur die blau markierten Werte berücksichtigt werden. Die grünen Begrenzungslinien des blau hinterlegten Grenzwellenlängenbereichs markieren dabei die aus linearer Regression bestimmte Grenzwellenlänge beziehungsweise den minimalen gemessenen Wert.

Für die Steigung  $m$  und den  $y$ -Achsenabschnitt  $c$  der Ausgleichsgeraden werden folgende Werte ermittelt:

$$c = -7800 \pm 500,$$

$$m = (44\,900 \pm 1200) \text{ \AA}^{-1}.$$

Für die Nullstelle dieser Ausgleichsgeraden und ihre Unsicherheit gilt:

$$n(\lambda) = m \cdot \lambda + c \stackrel{!}{=} 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \lambda_{g, \min} = -\frac{c}{m} \quad (4)$$

$$\Delta\lambda_{g, \min} = \sqrt{\left(-\frac{\Delta c}{m}\right)^2 + \left(\frac{c \cdot \Delta m}{m^2}\right)^2} \quad (5)$$

Es ergibt sich hierdurch folgender Bereich für die Grenzwellenlänge  $\lambda_g$ , der in [Abbildung 3](#) blau hinterlegt ist:

$$\lambda_{g,\min} = (0,174 \pm 0,012) \text{ \AA},$$

$$\lambda_{g,\max} = (0,392 \pm 0,012) \text{ \AA}.$$

Der Vergleich der ermittelten Wellenlängen für den  $K_\alpha$ - und den  $K_\beta$ -Peak sowie für die Grenzwellenlänge mit den aus dem Moseley-Gesetz und Duane-Hunt-Gesetz berechneten Werten wird in der Diskussion angestellt. Hier wird auch die Sinnhaftigkeit des Vorgehens bei der Bestimmung dieser Wellenlängen diskutiert.

### 3.2 Röntgenspektrum eines unbekanntes Kristalls

Da nun die Wellenlängen des  $K_\alpha$ - und des  $K_\beta$ -Peaks bekannt sind, kann mithilfe dieser Peaks im Spektrum eines unbekanntes Kristalls, der dabei eingestellte Winkel  $\theta$  mit den Wellenlängen  $\lambda_\alpha$  beziehungsweise  $\lambda_\beta$  identifiziert werden.

Hierfür werden erneut die Anzahl an Anregungen  $n$  bei unterschiedlichen Winkeln  $\theta$  gemessen. Die Anregungen  $n$  sind in [Abbildung 4](#) gegen die eingestellten Winkel  $\theta$  aufgetragen.

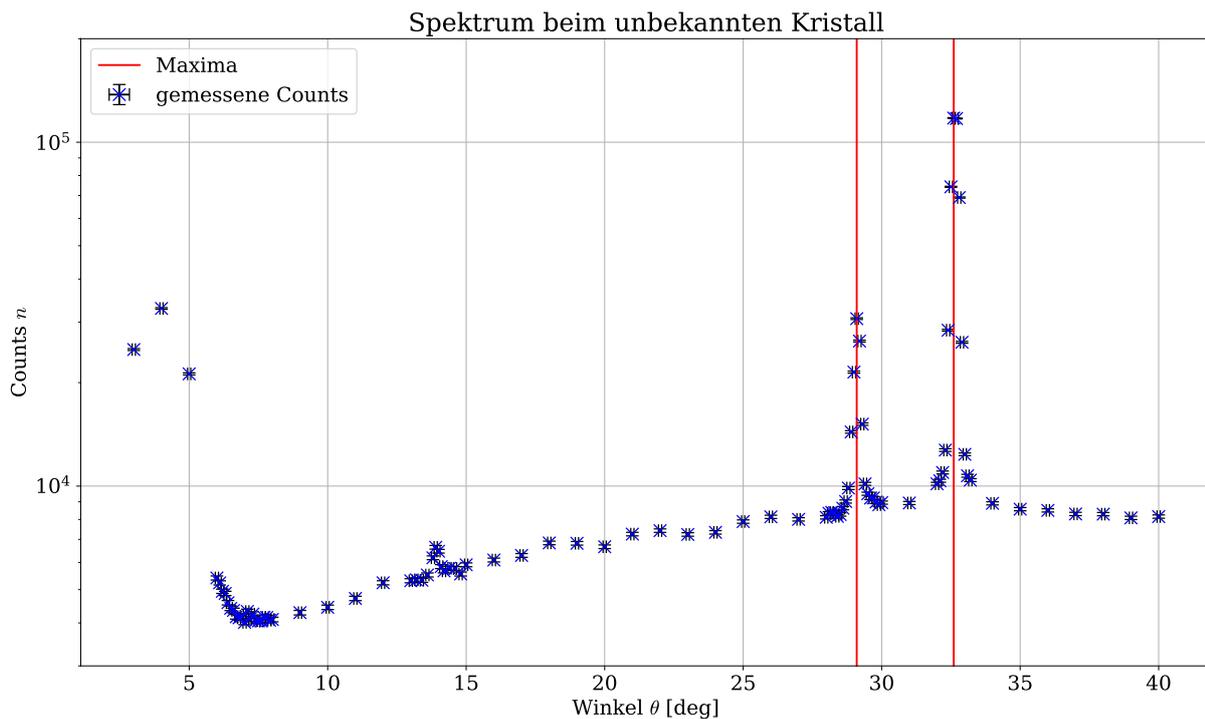


Abb. 4: Abgebildet ist das Spektrum beim unbekanntes Kristall mit eingezeichnetem  $K_\beta$ - beziehungsweise  $K_\alpha$ -Peak. Dabei sind die Counts  $n$  des Geiger-Müller-Zählrohrs gegen den Winkel  $\theta$  in Grad aufgetragen. Die  $y$ -Achse ist dabei logarithmisch skaliert.

Das erhaltene Spektrum sieht ähnlich aus wie das des LiF-Kristalls. Allerdings ist das Bremspektrum flacher ausgeprägt und die Peaks sind weniger hoch und vor dem Maximum des Bremspektrums gelegen. Die Winkel, bei denen die Peaks vorkommen, werden analog zu [Unterabschnitt 3.1](#) bestimmt, nur dass anstatt der Wellenlänge  $\lambda$  der Maximawinkel  $\theta$  bestimmt

wird. Es ergeben sich folgende Werte mit Unsicherheiten:

$$\begin{aligned}\theta_\alpha &= (32,60 \pm 0,17)^\circ, \\ \theta_\beta &= (29,10 \pm 0,17)^\circ.\end{aligned}$$

Aus der Maximumsbedingung, die in [Gleichung 1](#) zu finden ist, kann nun der Gitternetzabstand  $d_{\text{unb}}$  bestimmt werden. Für  $d_{\text{unb}}$  gilt folgender Zusammenhang, wobei die Unsicherheit aus Fehlerfortpflanzung berechnet wird [1]:

$$d_{\text{unb}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_{\alpha/\beta}}{\sin(\theta_{\alpha/\beta})}, \quad (6)$$

$$\Delta d_{\text{unb}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta \lambda_{\alpha/\beta}}{\sin(\theta_{\alpha/\beta})}\right)^2 + \left(-\frac{\lambda_{\alpha/\beta} \cos(\theta_{\alpha/\beta}) \cdot \Delta \theta_{\alpha/\beta}}{\sin^2(\theta_{\alpha/\beta})}\right)^2}. \quad (7)$$

Es wird für die  $K_\alpha$ - und die  $K_\beta$ -Linie jeweils ein Wert für  $d_{\text{unb}}$  ermittelt und dann der Mittelwert gebildet. Als Unsicherheit wird die Standardabweichung des Mittelwertes verwendet. Alternativ kann eine lineare Regression mit den zwei Wellenlängen-Winkel-Wertepaaren durchgeführt und  $d_{\text{unb}}$  aus der Steigung berechnet werden. Da eine lineare Regression aus zwei Werten jedoch wenig sinnvoll ist, da hier immer eine optimale Anpassung möglich ist, wird diese Möglichkeit verworfen. Es ergeben sich folgende Werte für die Netzebenenabstände und ihren Mittelwert:

$$\begin{aligned}d_{\text{unb}, \alpha} &= (1,416 \pm 0,012) \text{ \AA}, \\ d_{\text{unb}, \beta} &= (1,414 \pm 0,014) \text{ \AA}, \\ d_{\text{unb}} &= (1,4146 \pm 0,0010) \text{ \AA}.\end{aligned}$$

Die Sinnhaftigkeit des hier gewählten Vorgehens zur Bestimmung des Netzebenenabstandes  $d_{\text{unb}}$  wird in der Fehlerdiskussion erörtert.

Da der Netzebenenabstand nun bekannt ist, kann das Spektrum auch in Abhängigkeit von der Wellenlänge  $\lambda$  dargestellt werden. Dabei werden wie in [Gleichung 2](#) der Winkel  $\theta$  und seine Unsicherheit in Wellenlängen  $\lambda$  umgerechnet. Das entsprechende Diagramm ist im Anhang in [Abbildung 6](#) zu sehen.

Zuletzt soll noch aus der Messung des unbekanntes Kristalls die Grenzwellenlänge  $\lambda_g$  bestimmt werden. Da die gleiche Anodenspannung  $U_R$  angelegt ist, sollte sich die Grenzwellenlänge nicht geändert haben. Dafür wird analog zu [Unterabschnitt 3.1](#) eine lineare Regression zur Bestimmung der unteren Grenze durchgeführt. Diese ist in [Abbildung 7](#) im Anhang zu sehen. Die Werte für die Steigung  $m$  und den  $y$ -Achsenabschnitt  $c$  betragen:

$$\begin{aligned}c &= 2580 \pm 80, \\ m &= (4100 \pm 200) \text{ \AA}^{-1}.\end{aligned}$$

Man sieht bereits hier, dass aufgrund des positiven  $y$ -Achsenabschnittes  $c$  der Nulldurchgang der Ausgleichsgeraden im negativen Bereich liegt. Da negative Wellenlängen unphysikalisch sind, kann hierdurch keine untere Grenze ermittelt werden.

Das Minimum im Spektrum befindet sich bei einer Wellenlänge von:

$$\lambda_{g, \text{max}} = (0,490 \pm 0,012) \text{ \AA}.$$

Über die Grenzwellenlänge  $\lambda_g$  kann also nur ausgesagt werden, dass sie unterhalb von  $(0,490 \pm 0,012) \text{ \AA}$  liegt.

## 4 Diskussion der Ergebnisse

### 4.1 Zusammenstellung der Ergebnisse

Bei der Aufnahme der Emissionsspektren im ersten Versuchsteil konnte der erwartete Verlauf, der auch in der aus [2] entnommenen **Abbildung 5** im Anhang erkennbar ist, bestätigt werden. Besonders im Bereich kleiner Winkel kommt es jedoch zu Abweichungen, da Teile der Röntgenstrahlung das Geiger-Müller-Zählrohr direkt und nicht erst nach Reflexion am Kristall treffen. Für die minimale Bremsstrahlung kann deshalb nur ein ungefährender Bereich angegeben werden:

$$\begin{aligned}\lambda_{g,\min} &= (0,174 \pm 0,012) \text{ \AA}, \\ \lambda_{g,\max} &= (0,392 \pm 0,012) \text{ \AA}.\end{aligned}$$

Für die Wellenlängen der für die Kupferanode charakteristischen Linien können zusätzlich die folgenden Werte ermittelt werden:

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha} &= (1,525 \pm 0,011) \text{ \AA}, \\ \lambda_{\beta} &= (1,375 \pm 0,011) \text{ \AA}.\end{aligned}$$

Auch im zweiten Versuchsteil kann ein ähnliches Spektrum beobachtet werden. Die Peaks werden dabei bei  $\theta_{\alpha} = (32,60 \pm 0,17)^{\circ}$  und  $\theta_{\beta} = (29,10 \pm 0,17)^{\circ}$  beobachtet, wodurch folgender Netzebenenabstand  $d_{\text{unb}}$  errechnet werden kann:

$$d_{\text{unb}} = (1,4146 \pm 0,0010) \text{ \AA}.$$

In einem letzten Schritt kann auch bei diesem Kristall ein Bereich für die Wellenlänge der minimalen Bremsstrahlung bestimmt werden. Da sich als untere Schranke jedoch ein negativer Wert ergibt, erscheint nur die Angabe eines Maximums sinnvoll:

$$\lambda_{g,\max} = (0,490 \pm 0,012) \text{ \AA}.$$

### 4.2 Vergleich mit den aus der Theorie bekannten Gesetzen und Literaturwerten

Die bestimmten Ergebnisse sollen im Folgenden noch mit den aus der Theorie bekannten Gesetzen verglichen werden. In einem ersten Schritt wird dabei die minimale Wellenlänge der Bremsstrahlung untersucht. Als Vergleichswert wird dabei die Grenzwellenlänge aus dem Duane-Hunt-Gesetz berechnet [2]:

$$eU_{\text{R}} = hf_{g,\text{Lit}} = h \frac{c}{\lambda_{g,\text{Lit}}}, \quad (8)$$

$$\Rightarrow \lambda_{g,\text{Lit}} = \frac{hc}{eU_{\text{R}}}, \quad (9)$$

$$\Delta\lambda_{g,\text{Lit}} = \left| -\Delta U_{\text{R}} \frac{hc}{eU_{\text{R}}^2} \right|. \quad (10)$$

Neben der Anodenspannung  $U_{\text{R}} = (35,00 \pm 0,06) \text{ kV}$  werden also die Naturkonstanten Elementarladung  $e = 1,602\,177 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , Planck'sches Wirkungsquantum  $h = 6,662\,607\,0 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  und Lichtgeschwindigkeit  $c = 299\,792 \text{ km s}^{-1}$  benötigt, die alle aus [4] genommen werden. Es wird folgender Wert ermittelt:

$$\lambda_{g,\text{Lit}} = (0,3542 \pm 0,0006) \text{ \AA}.$$

Dieser Wert liegt damit in dem bestimmten Bereich zwischen  $\lambda_{g,\min} = (0,174 \pm 0,012) \text{ \AA}$  und  $\lambda_{g,\max} = (0,392 \pm 0,012) \text{ \AA}$ . Er ist jedoch deutlich näher an dem Maximalwert als an dem Minimalwert, was darauf schließen lässt, dass der eigentliche Verlauf in diesem Bereich deutlich steiler

ist als die bei der Regression verwendete Gerade. Dies kann auch anhand der Verträglichkeiten beider Werte mit dem Vergleichswert bestätigt werden, die mithilfe von  $t$ -Werten mit Formeln aus [1] beurteilt werden. Ein  $t$ -Wert von über zwei deutet auf eine schlechte Verträglichkeit hin, während ein  $t$ -Wert von unter zwei auf eine gute Verträglichkeit schließen lässt. Der Maximalwert ist mit  $t_{g,\max} = 3,1$  verträglicher als der Minimalwert mit  $t_{g,\max} = 14,6$ . Es sind jedoch beide Werte nicht mit dem Vergleichswert verträglich, was jedoch auch erwartbar ist, da es sich um obere beziehungsweise untere Grenzen handelt.

Auch bei der Betrachtung der Grenze  $\lambda_{g,\max} = (0,490 \pm 0,012) \text{ \AA}$ , die für die minimale Wellenlänge der Bremsstrahlung aus dem zweiten Versuchsteil ermittelt wurde, ergibt sich, dass der Literaturwert wieder im bestimmten Bereich liegt, aber erneut nicht mit der oberen Schranke verträglich ist. In diesem Fall ist mit einem  $t$ -Wert von  $t = 11,2$  eine noch größere Unverträglichkeit zu beobachten als im ersten Versuchsteil, was darauf schließen lässt, dass ein insgesamt flacherer Verlauf für den Bereich kleiner Winkel zu erwarten wäre.

Nun sollen in einem zweiten Schritt die Wellenlängen der charakteristischen Linien mit den Vorhersagen des Moseley-Gesetzes [2] verglichen werden. Dabei gilt für die  $K_\alpha$ -Linie folgender Zusammenhang:

$$\Delta E_{12} = \frac{3}{4} h R_y (Z - 1)^2 = h f_\alpha = h \frac{c}{\lambda_\alpha}, \quad (11)$$

$$\Rightarrow \lambda_\alpha = \frac{c}{\frac{3}{4} R_y (Z - 1)^2}. \quad (12)$$

Die Rydbergfrequenz  $R_y = 3,289\,841 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  wird dabei aus [5] genommen, während die Kupferkernladungszahl  $Z = 29$  aus [2] kommt. Für die  $K_\beta$ -Linie gilt analog:

$$\lambda_\beta = \frac{c}{\frac{8}{9} R_y (Z - 1,8)^2}. \quad (13)$$

Dabei ergibt sich  $8/9$  aus dem Übergang von der dritten in die erste Schale [2] und der Korrekturterm  $1,8$  aus der Abschirmkonstante  $\sigma$  [2], die für den  $K_\beta$  Übergang nicht mehr als 1 genähert werden kann [6]. Es werden die folgenden Vergleichswerte berechnet:

$$\lambda_\alpha = 1,550 \text{ \AA},$$

$$\lambda_\beta = 1,386 \text{ \AA}.$$

Auch hier kann nun als Maß für die Verträglichkeit ein  $t$ -Wert berechnet werden. Es ergeben sich folgende Werte:

$$t_\alpha = 2,2,$$

$$t_\beta = 0,9.$$

Damit weicht nur der eine Wert leicht von der Verträglichkeit ab. Da die relativen Fehler von  $0,7\%$  bei  $K_\alpha$  und  $0,8\%$  bei  $K_\beta$  jedoch extrem klein sind, ist auch die leichte Unverträglichkeit dieses Wertes zu erklären.

In einem letzten Schritt sollen nun mögliche Kristallstrukturen betrachtet werden, die für den zweiten Kristall in Frage kommen. Generell ist zunächst zu bemerken, dass der gemessene Wert von  $d_{\text{unb}} = (1,4146 \pm 0,0010) \text{ \AA}$  in der ungefähren Größenordnung typischer Kristalle liegt [7]. Betrachtet man die in [7] zusammengestellte Tabelle, in der die doppelten Netzaabstände verschiedener Stoffe aufgelistet sind, ist nur der Stoff Chromcarbid mit dem bestimmten Wert mit einem  $t$ -Wert von  $t = 0,4$  verträglich. Da der errechnete Fehler jedoch extrem klein ist und dieser auch deutlich unterschätzt worden sein kann, kommt auch eine Reihe anderer Stoffe in Frage, da der Großteil aller Werte in einem Bereich von  $1,3 \text{ \AA}$  bis  $1,5 \text{ \AA}$  liegt. Dadurch und durch die Unvollständigkeit der verwendeten Liste, ist es schwierig zu bestimmen, um welchen Kristall es sich tatsächlich handelt.

### 4.3 Fehlerdiskussion

Es fällt auf, dass der Verlauf der Röntgenspektren zwar in beiden Versuchsteilen grob mit den erwarteten Verläufen übereinstimmt, es aber vor allem bei Wellenlängen rund um die erwartete Grenzwellenlänge  $\lambda_g$  große Abweichung gibt und die Anzahl an Anregungen nicht gegen Null geht. Eine mögliche Ursache hierfür könnte, wie bereits erwähnt, ein zu breiter Röntgenstrahl sein, der bei kleinen Eintrittswinkeln teilweise den Kristall verfehlt und direkt auf das Geiger-Müller-Zählrohr trifft. Dadurch gibt es in Teilen des Röntgenstrahls keine Interferenzen durch Bragg-Reflexion am Kristall und alle Wellenlängen werden als Anregung aufgenommen, wodurch die Anzahl an Anregungen auch bei immer kleiner werdenden Winkeln steigt, da immer mehr Anteile des Röntgenstrahls den Kristall verfehlen.

Infolgedessen kann die Grenzwellenlänge nicht exakt bestimmt werden, da ein sehr steiler Intensitätsabfall erwartet wird, der jedoch nicht gemessen werden kann. Die Bestimmung eines möglichen Bereichs mithilfe des gemessenen Minimums, sowie der aus linearer Regression bestimmten unteren Grenze der Grenzwellenlänge, erscheint daher sinnvoll. Allerdings ist dieses Vorgehen sehr ungenau, da das gemessene Minimum nicht exakt der Grenzwellenlänge entsprechen kann und die lineare Regression flacher als theoretisch vorhergesehen verläuft. Trotzdem konnte festgestellt werden, dass die theoretische Grenzwellenlänge in diesem Bereich liegt und deutlich näher an der oberen als an der unteren Schranke liegt. Mit dem gewählten Verfahren kann die Grenzwellenlänge also nicht genau bestimmt, aber ein einschränkender Bereich gefunden werden. Mit den aus dem verwendeten Messverfahren ermittelten Werten ist eine genauere Bestimmung aber generell schwerlich möglich.

Bei der Bestimmung der Wellenlängen der charakteristischen Linien der Kupferanode sind die beiden Peaks sehr schmal, wodurch nur wenige relevante Messwerte in diesen Bereichen aufgenommen werden konnten. Zusätzlich liegen die Peaks auf dem Bremskontinuum, das einen abfallenden Verlauf hat, wodurch zusätzliche Unsicherheiten durch unterschiedliche Untergründe hinzukommen. Des Weiteren liegen die Maxima nah beieinander, womit eine Zuweisung der Messwerte zu einem bestimmten Peak erschwert wird. Daher ist eine Anpassung der Peaks an eine Gauß-Kurve nur wenig sinnvoll, weshalb versucht wurde eine, Halbwertsbreite abzuschätzen. Die  $t$ -Werte der Wellenlängen der beiden charakteristischen Linien deuten trotz relativen Fehlern von 0,7% beziehungsweise 0,8% auf eine gute Verträglichkeit hin, was dieses Vorgehen legitimiert.

Die Bestimmung des Netzebenenabstands  $d$  des unbekanntes Kristalls mithilfe einer linearen Regression scheint wenig sinnvoll, da nur zwei Messwerte zur Verfügung stehen. Dadurch wäre der Fehler Null und eine Schätzung des Fehlers nur schwer möglich und ungenau. Stattdessen wurde aus den beiden charakteristischen Linien mithilfe der im ersten Versuchsteil bestimmten Wellenlängen jeweils ein Netzebenenabstand bestimmt und anschließend gemittelt. Ein Vergleich der beiden Einzelwerte zeigt außerdem eine hohe Verträglichkeit mit  $t$ -Wert von  $t = 0,11$ , was darauf schließen lässt, dass diese Methode sinnvoll ist. Insbesondere ist damit überhaupt erst eine Abschätzung der Fehler möglich. Der dennoch sehr geringe relative Fehler von 0,07% lässt vermuten, dass der wahre Fehler dennoch unterschätzt wird.

### 4.4 Verbesserte Messmethoden

Um eine Verbesserung der Spektrumsmessung zu realisieren, wäre es sinnvoll einen fokussierteren Röntgenstrahl zu erzeugen, damit dieser erst bei kleineren Winkeln den Kristall verfehlt. Dadurch könnte man rund um den Bereich der Grenzwellenlänge  $\lambda_g$  weitere Werte aufnehmen, die eventuell den charakteristischen steilen Verlauf in diesem Bereich besser beschreiben. Infolgedessen würde man mithilfe der linearen Regression einen exakteren Wert für  $\lambda_g$  erhalten und man könnte auf das ungenaue Grenzwellenlängenintervall verzichten.

---

Eine Möglichkeit, die Bestimmung des Netzebenenabstands  $d$  des unbekanntes Gitters zu optimieren, wäre, eine größere Winkelspanne zu messen, um die Peaks zweiter, beziehungsweise noch höherer Ordnung, aufzunehmen. Dadurch könnte man statt dem Mittelwertverfahren eine lineare Regression der Messwerte durchführen, da diese erst mit mehreren Datenpunkten sinnvoll wird. Hierdurch kann zusätzlich herausgefunden werden, ob es einen Winkeloffset gibt.

## Literatur

- [1] Dr. Christof Bartels, Dr. Lukas Bruder, Dr. Thomas Pfohl: *Datenanalyse Teil A - Skript zur Vorlesung am 06.09.2021*, (Freiburg im Breisgau, 2021/22)
- [2] Hans Joachim Eichler, Heinz-Detlef Kronfeldt, Jürgen Sahn: *Das neue Physikalische Grundpraktikum*, (2016), Kapitel 45 „Röntgenstrahlung“
- [3] Dr. Christof Bartels, Dr. Lukas Bruder, Dr. Thomas Pfohl: *Datenanalyse Teil B - Skript zur Vorlesung am 28.02.2022*, (Freiburg im Breisgau, 2021/22)
- [4] BIPM: *The International System of Units (SI): Defining constants* <https://www.bipm.org/en/measurement-units/si-defining-constants> (aufgerufen am: 31.03.2022)
- [5] James G. Kushmerick: *The NIST Reference on Constants, Units and Uncertainty* <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?rydchz> (aufgerufen am: 31.03.2022)
- [6] Hans-Peter Willig: *Physik für alle! Moseleysches Gesetz* [https://physik.cosmos-indirekt.de/Physik-Schule/Moseleysches\\_Gesetz](https://physik.cosmos-indirekt.de/Physik-Schule/Moseleysches_Gesetz) (aufgerufen am: 01.04.2022)
- [7] *Wikipedia: Lattice constant* [https://en.wikipedia.org/wiki/Lattice\\_constant](https://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_constant) (aufgerufen am: 01.04.2022)
- [8] Dr. Christof Bartels, Dr. Lukas Bruder, Dr. Thomas Pfohl: *Versuch 83 - Röntgenstrahlung, Versuchsbeschreibung des Physiklabors für Anfänger\*innen*, (Freiburg im Breisgau, 2022)

## 6 Anhang

### 6.1 Tabellen und Grafiken

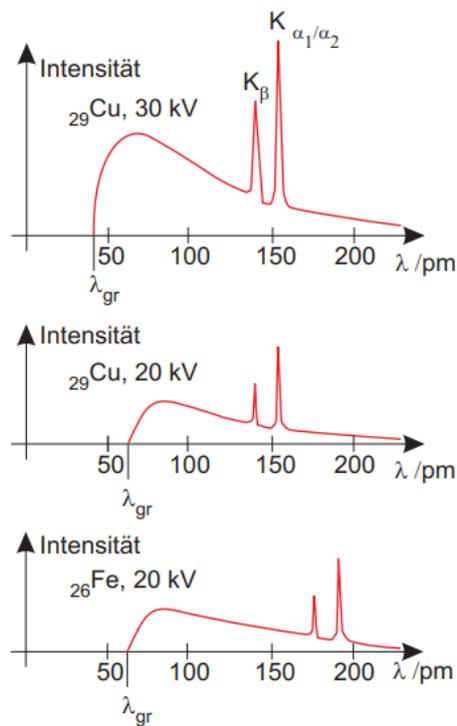


Abb. 5: Dargestellt sind drei typische Röntgenspektren aus [2] (Abbildung 45.2) für Kupfer- und Eisenanoden bei verschiedenen Anodenspannungen. Dabei ist die  $y$ -Achse logarithmisch skaliert und die Intensität in willkürlichen Einheiten gegen die Wellenlänge  $\lambda$  in pm aufgetragen. Zusätzlich sind die Grenzwellenlänge  $\lambda_{\text{gr}}$  sowie die beiden charakteristischen Linien  $K_{\alpha}$  beziehungsweise  $K_{\beta}$  dargestellt.

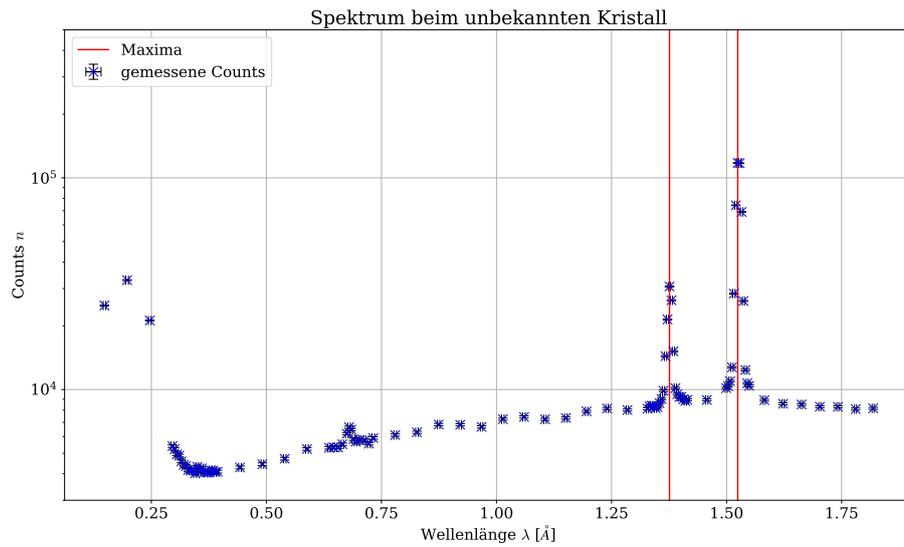


Abb. 6: Abgebildet ist das Spektrum beim unbekanntem Kristall mit eingezeichnetem  $K_\beta$ - beziehungsweise  $K_\alpha$ -Peak. Dabei sind die Counts  $n$  des Geiger-Müller-Zählrohrs gegen die Wellenlänge  $\lambda$  in  $\text{\AA}$  aufgetragen. Die  $y$ -Achse ist dabei logarithmisch skaliert.

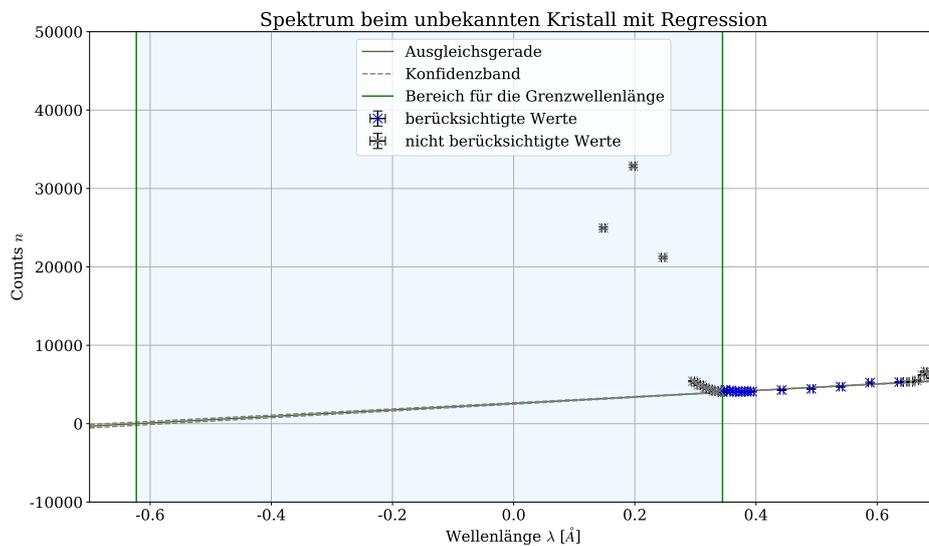


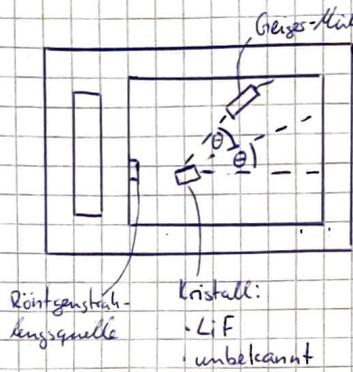
Abb. 7: Abgebildet ist das Spektrum des unbekanntem Kristalls in der Nähe der vermuteten Grenzwellenlänge  $\lambda_g$ . Zusätzlich ist eine gewichtete lineare Regression mit einem  $1\sigma$ -Konfidenzband aufgetragen, wobei nur die blau markierten Werte berücksichtigt werden. Die grünen Begrenzungslinien des blau hinterlegten Grenzwellenlängenbereichs markieren dabei die aus linearer Regression bestimmte Grenzwellenlänge beziehungsweise den minimalen gemessenen Wert.

## 6.2 Laborbuch

### Versuch 83 - Röntgenstrahlung

31.03.22

#### 1) Versuchsaufbau



Spannung am Röntgengerät:  $U_R$

Strom am Röntgengerät:  $I_R$

Spannung am Zählrohr:  $U$

Messdauer:  $t$

Anzahl Counts:  $n$

Einstrahlwinkel:  $\theta$

#### 2) Messungen

##### 2.1 LiF-Kristall

$$U_e = (35,0 \pm ) \text{ kV} \quad I_e = (1,00 \pm ) \text{ mA} \quad U = (500 \pm ) \text{ V} \quad t = 20 \text{ s}$$

Winkel $\theta_{in}^\circ$ mit $\Delta\theta = \frac{0,1^\circ}{\sqrt{n}}$	Counts $n$ mit $\Delta n = \sqrt{n}$	Winkel $\theta_{in}^\circ$ mit $\Delta\theta = \frac{0,1^\circ}{\sqrt{n}}$	Counts $n$ mit $\Delta n = \sqrt{n}$
2,0	184.287	29,0	5.440
3,0	24.579	30,0	4.665
4,0	32.409	4,1	33.114
5,0	21.296	4,4	33.964
6,0	11.717	4,6	32.081
7,0	15.223	4,8	26.483
8,0	12.129	5,1	12.108
9,0	20.004	5,2	15.569
10,0	21.346	5,3	13.862
11,0	22.634	5,4	12097
12,0	23.039	5,5	11.105
13,0	22.410	5,6	10.148
14,0	19.934	5,7	10.311
15,0	19.472	5,8	10.449
16,0	18.715	5,9	10.547
17,0	17.396	6,1	11.100
18,0	16.247	6,2	11.427
19,0	16.005	6,3	11.934
20,0	209.925	6,4	12.052
21,0	20.720	6,5	12.637
22,0	62.580	6,7	13.451
23,0	22.663	6,9	14.274
24,0	13.747	19,1	15.804
25,0	10.948	19,2	15.930
26,0	9.297	19,3	15.897
27,0	7.951	19,4	16.243
28,0	6.209	19,5	16.405

Abb. 8: Laborbuch, Seite 1



## Abbildungsverzeichnis

1	Versuchsaufbau . . . . .	2
2	Spektrum beim LiF-Kristall . . . . .	4
3	Spektrum beim LiF-Kristall mit gewichteter linearer Regression . . . . .	5
4	Winkelabhängiges Spektrum beim unbekanntem Kristall . . . . .	6
5	Erwartete Röntgenspektren . . . . .	13
6	Spektrum beim unbekanntem Kristall . . . . .	14
7	Spektrum beim unbekanntem Kristall mit gewichteter linearer Regression . . . . .	14
8	Laborbuch, Seite 1 . . . . .	15
9	Laborbuch, Seite 2 . . . . .	16