

Physiklabor für Anfänger*innen 2
Ferienpraktikum im Wintersemester 2018/19

Versuch 80: Bestimmung der spezifischen Elektronenladung e/m_e

(durchgeführt am 25. März 2019 bei)

26. März 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuchs	4
2	Physikalische Grundlagen	5
3	Aufbau und Durchführung	6
3.1	Aufbau	6
3.2	Durchführung	6
4	Messung	6
4.1	Qualitative Untersuchung	6
4.2	Bestimmung der spezifischen Elektronenladung	8
4.3	Abhängigkeit vom Einschusswinkel	9
5	Auswertung	9
5.1	Bestimmung der spezifischen Elektronenladung	9
5.2	Bestimmung der kinetischen Energie	12
5.3	Abhängigkeit vom Einschusswinkel	14
6	Diskussion	17
6.1	Bestimmung der spezifischen Elektronenladung	17
6.2	Berechnung der kinetischen Energie	19
6.3	Abhängigkeit vom Einschusswinkel	20
A	Anhang	22

In Tabelle 1 ist eine Übersicht über alle in diesem Versuchsprotokoll verwendeten Symbole gegeben.

Größensymbol	Bedeutung
E	Elektrische Feldstärke, (kinetische) Energie
E_v, E_U	Kinetische Energie aus Geschwindigkeit, bzw. Spannung berechnet
B	Magnetische Flussdichte
U	Spannung
U_A	Anodenspannung
m	Masse
v, \mathbf{v}	Geschwindigkeit
v_{\parallel}, v_{\perp}	Geschwindigkeitskomponenten
ν	Frequenz
ω	Kreisfrequenz
ν_Z	Zyklotronfrequenz
m_e	Elektronenmasse
q	Ladung
e	Elementarladung
I_B	Magnetfeld-Stromstärke
h	Ganghöhe
r	Radius
d	Durchmesser
α	Winkel, siehe Abschnitt 2
α_0	Offset auf α
α'	Mit Offset behaftetes α
n	12
N	Wingungsanzahl in einer Spule
l	Spulenlänge
t	Studentsches t
t_{krit}	Kritischer t -Wert
P	P -Wert
\aleph, \beth	Regressionsparameter
s_x	Unsicherheit auf (Mess-) Größe x
σ_x	Standardabweichung auf x
$\langle x \rangle$	Mittelwert der Messreihe x_i

Tabelle 1: Symbole, die in diesem Versuchsprotokoll verwendet wurden.

1 Ziel des Versuchs

Das Ziel dieses Versuchs ist, dass zuerst die Beeinflussung des Elektronenstrahls durch das elektrische und das magnetische Feld sowie durch die Einschussrichtung untersucht werden soll. Außerdem ist die spezifische Elektronenladung $\frac{e}{m_e}$ zu bestimmen. Zudem soll auch der Zusammenhang zwischen Einschusswinkel, Radius und Ganghöhe der Spiralbahn untersucht werden.

2 Physikalische Grundlagen

Beim Durchlaufen eines elektrischen Feldes erhält ein Elektron durch die Spannung, für die

$$U = E \cdot d \quad (1)$$

gilt, die kinetische Energie

$$\frac{1}{2}mv^2 = e \cdot U. \quad (2)$$

Durch die Lorentzkraft, welche in einem Magnetfeld als Zentrifugalkraft wirkt, erhalten wir aus dem Kräftegleichgewicht

$$evB = \frac{mv^2}{r}. \quad (3)$$

Die Umlauffrequenz von geladenen Teilchen in magnetischen Feldern berechnet sich aus

$$\omega_z = 2\pi\nu_Z = \frac{|q|B}{m}. \quad (4)$$

Gleichung (3) bezieht sich auf Geschwindigkeiten, die senkrecht zum ma-

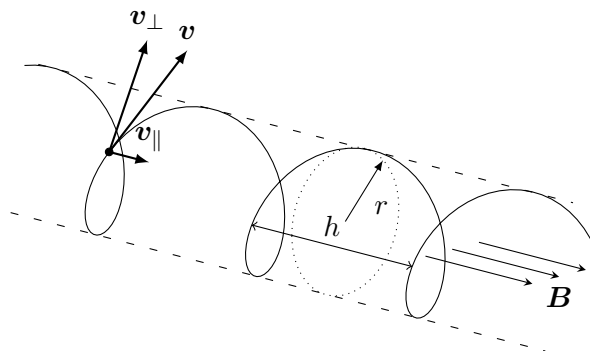


Abbildung 1: Geladenes Teilchen auf einer Spiralbahn

gnetischen Feld stehen. Betritt ein Teilchen mit einem Winkel α ein magnetisches Feld, so beschreibt es eine Spiralbahn (siehe Abb. 1). Den Winkel α können wir dank $v_{\parallel} = h \cdot \nu$ und $v_{\perp} = 2\pi r \cdot \nu$, wobei ν die Umlauffrequenz ist, schreiben als

$$\tan \alpha = \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} = \frac{h}{2\pi r}. \quad (5)$$

Das Magnetfeld einer stromdurchflossenen langen Spule ist im Inneren beschreibbar durch:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}. \quad (6)$$

In unserem Versuch gilt nach der Versuchsanleitung [2] für das Magnetfeld in einem Helmholtzspulenpaar das Verhältnis

$$B = 0,78 \cdot 10^{-3} \frac{\text{T}}{\text{A}} \cdot I. \quad (7)$$

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Aufbau

Zunächst bauten wir die Schaltung gemäß Abbildung 2 auf. Zusätzlich zur „reinen“ Schaltung ist in Abbildung 3 der Aufbau skizziert. Dafür verbanden wir über Kabel die Ausgänge vom Netzgerät mit den Anschlüssen am Fadenstrahlrohr. Die Heizung dient dazu, dass Elektronen aus einem Glühdraht austreten. Die Stromstärke des Magnetfeldes, die Wehneltspannung, die Anodenspannung sowie die Spannung an den Ablenkplatten ließen sich per Hand über ein Rädchen in jeweils einem bestimmten Bereich variieren. Über zwei Multimeter konnten wir die Anodenspannung, sowie die Stromstärke des Magnetfeldes messen.

3.2 Durchführung

Am Anfang stellten wir die Anoden- und die Wehneltspannung auf null. Nachdem sich die Kathode etwa eine Minute aufheizen konnte, stellten wir die Anodenspannung höher.

Nun untersuchten wir erst einmal qualitativ den Einfluss der Beschleunigungsspannung, des Magnetfeldes, der Wehnelt-Spannung und der Ablenkplatten auf die Elektronenbahn. Daraufhin nahmen wir mehrere Wertepaare von der Anodenspannung, der Stromstärke, der Magnetfeldstärke und des Durchmessers der Kreisbahn auf.

Im nächsten Teil des Versuchs brachten wir die Elektronen bei konstantem Spulenstrom durch Variation der Anodenspannung auf eine Kreisbahn mit festem Radius. Wieder dokumentierten wir die Werte von der Anodenspannung, der Stromstärke und des Durchmessers der Kreisbahn. Anschließend drehten wir den Elektronenstrahl soweit aus seiner senkrechten Ebene, dass wir eine spiralförmige Bahn erhielten. So konnten wir für mehrere Winkel die Ganghöhe und den Durchmesser der Spiralbahn untersuchen.

4 Messung

4.1 Qualitative Untersuchung

Zuerst untersuchten wir qualitativ, wie sich verschiedene Einstellparameter auf die Elektronenbahn auswirken. Dabei stellten wir fest, dass bei Erhöhung

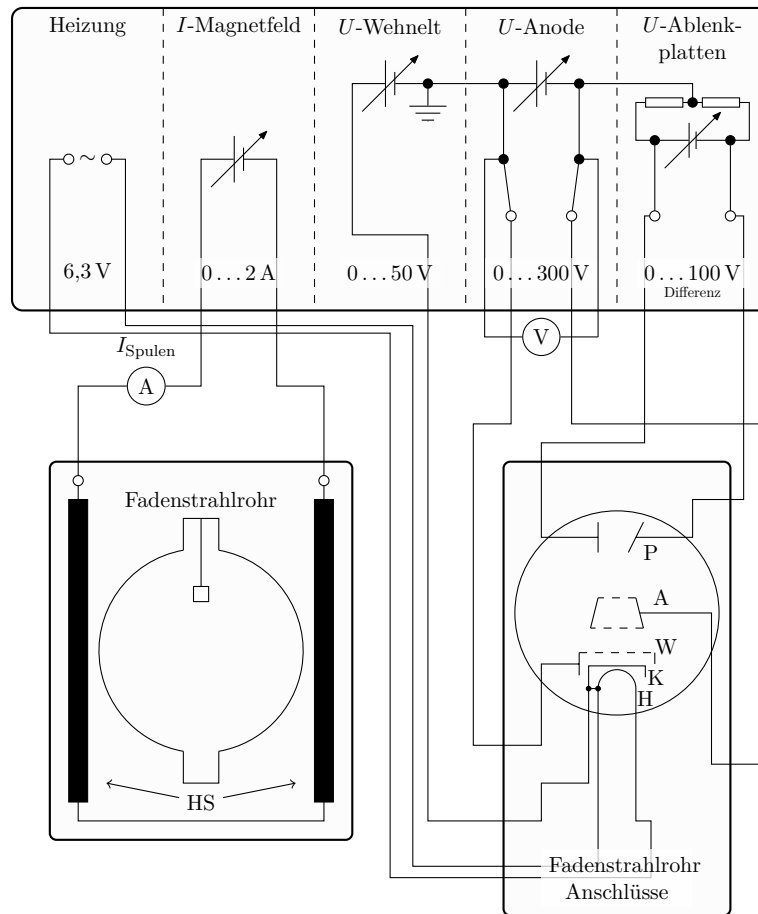


Abbildung 2: Schematisches Schaltbild des Versuchsaufbaus. Die in der Abbildung verwendeten Abkürzungen sind im Folgenden erklärt: HS: Helmholtzspulenpaar, H: Heizung für die Glühkathode, K: Kathode, W: Wehneltzylinder, A: Anode, P: Ablenkplatten.

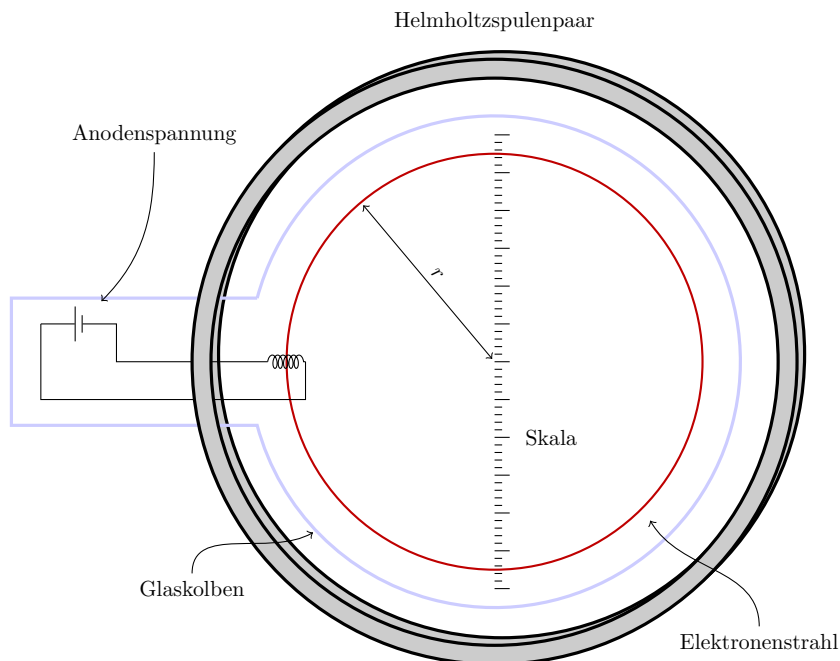


Abbildung 3: Skizze des Versuchs mit seitlicher Ansicht

der Stromstärke der Radius der Elektronenbahn kleiner wird. Bei Erhöhung der Beschleunigungsspannung wird der Radius dagegen größer. Bei Änderung der Wehnelt-Spannung verändert sich nichts an der Elektronenbahn, aber durch Variation der Ablenkspannung wird der Kreis, den die Elektronenbahn beschreibt, am Ausgangspunkt gedreht.

4.2 Bestimmung der spezifischen Elektronenladung

In diesem Teil des Versuchs maßen wir zu 12 Wertepaaren von Anodenspannung und Stromstärke den Durchmesser der Kreisbahn. Dabei änderten wir entweder die Spannung oder die Stromstärke. Den Durchmesser der Elektronenbahn konnten wir messen, indem wir die Punkte d_1 und d_2 , also den minimalen und maximalen Wert der Höhe der Kreisbahn, bestimmten. Der Fehler auf die Werte d_1 und d_2 schätzten wir mit $\pm 0,1$ cm ab. Dabei ist noch anzumerken, dass sich mit Variation von Spannung und Strom der Kreismittelpunkt verschob und es daher zu Ungenauigkeiten beim Ablesen des Kreisdurchmessers gekommen sein kann. Der Fehler auf die mit dem Multimeter gemessenen Werte beträgt für den Strom 1,5% des Messwertes + 1 Digit und für die Spannung 0,8% des Messwertes + 2 Digits. Die Ergebnisse unserer Messung sind in Tabelle 2 aufgeführt.

U_A in V	I_B in A	d_1 in cm	d_2 in cm
201 ± 4	$1,427 \pm 0,022$	$5,6 \pm 0,1$	$13,7 \pm 0,1$
212 ± 4	$1,427 \pm 0,022$	$5,5 \pm 0,1$	$14,0 \pm 0,1$
260 ± 4	$1,427 \pm 0,022$	$4,8 \pm 0,1$	$14,5 \pm 0,1$
297 ± 4	$1,427 \pm 0,022$	$4,6 \pm 0,1$	$15,0 \pm 0,1$
199 ± 4	$1,250 \pm 0,020$	$5,0 \pm 0,1$	$14,4 \pm 0,1$
250 ± 4	$1,249 \pm 0,020$	$4,3 \pm 0,1$	$15,1 \pm 0,1$
292 ± 4	$1,249 \pm 0,020$	$3,9 \pm 0,1$	$15,7 \pm 0,1$
150 ± 3	$1,249 \pm 0,020$	$5,5 \pm 0,1$	$13,6 \pm 0,1$
100 ± 3	$1,000 \pm 0,016$	$5,2 \pm 0,1$	$13,1 \pm 0,1$
133 ± 3	$1,001 \pm 0,016$	$4,5 \pm 0,1$	$14,0 \pm 0,1$
167 ± 3	$1,001 \pm 0,016$	$4,1 \pm 0,1$	$14,8 \pm 0,1$
200 ± 4	$1,001 \pm 0,016$	$3,5 \pm 0,1$	$15,4 \pm 0,1$

Tabelle 2: Messdaten

4.3 Abhängigkeit vom Einschusswinkel

Zunächst regelten wir die Spulenstromstärke I_B auf $(1,499 \pm 0,032)$ A und die Anodenspannung U_A auf (216 ± 5) V. Danach überprüften wir anhand der im Boden des Versuchsaufbaus eingebauten Skala, wie groß der Offset des Winkels ist, bei dem die Elektronenbahn geschlossen ist. Nach Betrachten der Skala am Rand des Aufbaus fanden wir den geschlossenen Kreis bei $\alpha_0 = (-4,0 \pm 0,5)^\circ$. Auf dieselbe Weise wie im vorigen Abschnitt bestimmten wir die maximale und minimale Höhe d_1 , bzw. d_2 , des Kreises mit einer Unsicherheit von $s_{d_1} = s_{d_2} = 0,1$ cm. Die Ganghöhe h bestimmten wir anhand zwei Punkten h_1 und h_2 bzw. h_1 und $h_{1/2}$ die wir auf einer Skala am Boden des Aufbaus ablesen konnten und der Position von zwei Kreispunkten entsprechen, die einen bzw. einen halben Umlauf voneinander entfernt sind. Für kleinere Winkel bot es sich als Ablesestrategie an, eine Kreisunterseite horizontal zwischen zwei Kreisoberseiten zu plazieren, um ein parallaxenfreies Ablesen zu garantieren. Dies klappte allerdings nur für die kleinen Winkel gut, da für größere Winkel nicht genug Kreisumläufe innerhalb der Vakuumkammer waren. Wegen der großen Anfälligkeit auf Parallaxenfehler schätzten wir die Unsicherheit auf die Skalenpunkte auf $s_{h_1} = s_{h_2} = 0,3$ cm ab. Die Messung liefert die Werte in Tabelle 3.

5 Auswertung

5.1 Bestimmung der spezifischen Elektronenladung

In diesem Abschnitt sind die Ergebnisse aus Tabelle 4 auszuwerten. Dafür berechnen wir zunächst aus unseren Skalenwerten d_1, d_2 den Radius der

α in $^\circ$	d_1 in cm	d_2 in cm	h_1 in cm	h_2 in cm	$h_{1/2}$ in cm
$-20,0 \pm 0,5$	$7,0 \pm 0,1$	$13,9 \pm 0,1$	$5,5 \pm 0,3$	–	$1,4 \pm 0,3$
$-10,0 \pm 0,5$	$6,2 \pm 0,1$	$14,5 \pm 0,1$	$3,0 \pm 0,3$	$5,9 \pm 0,3$	–
$-4,0 \pm 0,5$	$5,6 \pm 0,1$	$13,8 \pm 0,1$	$6,4 \pm 0,3$	$6,4 \pm 0,3$	–
$0,0 \pm 0,5$	$6,1 \pm 0,1$	$14,5 \pm 0,1$	$7,5 \pm 0,3$	$9,6 \pm 0,3$	–
$5,0 \pm 0,5$	$6,3 \pm 0,1$	$14,2 \pm 0,1$	$7,8 \pm 0,3$	–	$10,0 \pm 0,3$
$10,0 \pm 0,5$	$6,3 \pm 0,1$	$14,1 \pm 0,1$	$6,1 \pm 0,3$	–	$9,0 \pm 0,3$
$10,0 \pm 0,5$	$6,4 \pm 0,1$	$13,9 \pm 0,1$	$6,1 \pm 0,3$	–	$10,4 \pm 0,3$
$15,0 \pm 0,5$	$6,8 \pm 0,1$	$14,1 \pm 0,1$	$5,8 \pm 0,3$	–	$2,1 \pm 0,3$

Tabelle 3: Durchmesser und Ganghöhe der Spiralbahn in Abhängigkeit des Winkels α

Elektronenbahn über

$$r = \frac{d}{2}, \quad \text{mit} \quad d = d_2 - d_1, \quad (8)$$

wobei d der Bahndurchmesser ist. Die Unsicherheiten auf r bzw. d berechnen sich wie folgt:

$$s_r = \frac{s_d}{2}, \quad \text{und} \quad s_d = \sqrt{s_{d_1}^2 + s_{d_2}^2} \quad (9)$$

Nun muss die Stärke des magnetischen Feldes berechnet werden. Dies geschieht über ???. Dabei ergibt sich der Fehler für B über

$$s_B = s_{I_B} \cdot 0,78 \cdot 10^{-3} \frac{\text{T}}{\text{A}}, \quad (10)$$

mit $s_I=1,5\%$ des Messwertes + 1 Digit, wie sich auch aus Tabelle 4 ablesen lässt. Aus Kombination von Gleichungen (2) und (3) erhalten wir für die spezifische Elektronenladung

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2U_A}{r^2 B^2}. \quad (11)$$

Der Fehler auf die spezifische Elektronenladung ergibt sich damit zu

$$s_{\frac{e}{m_e}} = \sqrt{\left(\frac{2}{r^2 B^2} s_U\right)^2 + \left(\frac{4U}{r^2 B^3} s_B\right)^2 + \left(\frac{2}{r^3 B^2} s_r\right)^2}. \quad (12)$$

Die spezifische Elektronenladung ist für jedes Datentupel in Tabelle 4 mit-samt Hilfsgrößen und Unsicherheiten auf obige Weise berechnet worden.

Der Mittelwert der spezifischen Elektronenladung berechnet sich als

$$\left\langle \frac{e}{m_e} \right\rangle = (1,89 \pm 0,09) \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}. \quad (13)$$

U_A in V	I_B in A	r in cm	B in mT	$\frac{e}{m_e}$ in $\frac{C}{kg}$
201 ± 4	$1,427 \pm 0,022$	$4,05 \pm 0,07$	$1,113 \pm 0,017$	$(1,98 \pm 0,10) \cdot 10^{11}$
212 ± 4	$1,427 \pm 0,022$	$4,25 \pm 0,07$	$1,113 \pm 0,017$	$(1,89 \pm 0,09) \cdot 10^{11}$
260 ± 4	$1,427 \pm 0,022$	$4,85 \pm 0,07$	$1,113 \pm 0,017$	$(1,78 \pm 0,08) \cdot 10^{11}$
297 ± 4	$1,427 \pm 0,022$	$5,20 \pm 0,07$	$1,113 \pm 0,017$	$(1,77 \pm 0,08) \cdot 10^{11}$
199 ± 4	$1,250 \pm 0,020$	$4,70 \pm 0,07$	$0,975 \pm 0,015$	$(1,90 \pm 0,09) \cdot 10^{11}$
250 ± 4	$1,249 \pm 0,020$	$5,40 \pm 0,07$	$0,974 \pm 0,015$	$(1,81 \pm 0,08) \cdot 10^{11}$
292 ± 4	$1,249 \pm 0,020$	$5,90 \pm 0,07$	$0,974 \pm 0,015$	$(1,77 \pm 0,07) \cdot 10^{11}$
150 ± 3	$1,249 \pm 0,020$	$4,05 \pm 0,07$	$0,974 \pm 0,015$	$(1,93 \pm 0,10) \cdot 10^{11}$
100 ± 3	$1,000 \pm 0,016$	$3,95 \pm 0,07$	$0,780 \pm 0,012$	$(2,11 \pm 0,12) \cdot 10^{11}$
133 ± 3	$1,001 \pm 0,016$	$4,75 \pm 0,07$	$0,781 \pm 0,012$	$(1,93 \pm 0,10) \cdot 10^{11}$
167 ± 3	$1,001 \pm 0,016$	$5,35 \pm 0,07$	$0,781 \pm 0,012$	$(1,91 \pm 0,09) \cdot 10^{11}$
200 ± 4	$1,001 \pm 0,016$	$5,95 \pm 0,07$	$0,781 \pm 0,012$	$(1,85 \pm 0,08) \cdot 10^{11}$

Tabelle 4: Spezifische Elektronenladung mitsamt Hilfsgrößen aus den Daten aus Tabelle 2

Die Unsicherheit auf diesen Wert ließ sich durch Gaußsche Fehlerfortpflanzung berechnen¹:

$$s_{\langle \frac{e}{m_e} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{s_{\frac{e}{m_e}, i}}{n} \right]^2} = 2,61 \cdot 10^9 \frac{C}{kg} \quad (14)$$

Zusätzlich zu den Unsicherheiten auf die spezifische Elektronenladung, die in Tabelle 4 aufgeführt sind, ermitteln wir die Streuung durch Berechnung des erwartungstreuen Schätzers für die Standardabweichung $\sigma_{\frac{e}{m_e}}$ der Größe $\frac{e}{m_e}$,

$$\sigma_{\frac{e}{m_e}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{e}{m_e} \right)_i - \left\langle \frac{e}{m_e} \right\rangle \right]^2} = 9,85 \cdot 10^9 \frac{C}{kg}. \quad (15)$$

Die Standardabweichung des Mittelwertes berechnet sich nun über

$$s_{\langle \frac{e}{m_e} \rangle} = \frac{\sigma_{\frac{e}{m_e}}}{\sqrt{n}} = 2,84 \cdot 10^9 \frac{C}{kg}. \quad (16)$$

Um eine – auf die Fehlerrechnung bezogen – möglichst konservative Weiterrechnung zu ermöglichen, behalten wir die Unsicherheit, die sich aus der statistischen Streuung $\sigma_{\frac{e}{m_e}}$ ergeben hat, bei.

Um einen Vergleich mit dem angegebenen Wert [2] von $1,759 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$ zu bekommen, führen wir an dieser Stelle noch einen Hypothesentest durch.

¹Da hier zwei Unsicherheiten (statistische und über Gaußsche Fehlerfortpflanzung berechnete) miteinander verglichen werden sollen, wird die Anzahl an Nachkommastellen bei der Angabe der reinen Unsicherheit auf zwei gesetzt.

Da uns die (wahre) Standardabweichung der Messwerte unbekannt ist, ist ein Studentischer t -Test durchzuführen. Mit dem oben geschätzten $\sigma_{\frac{e}{m_e}}$ von oben lässt sich die Teststatistik berechnen:

$$t = \frac{\left\langle \frac{e}{m_e} \right\rangle - 1,759 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}}{\sigma_{\frac{e}{m_e}} / \sqrt{n}} = 4,48 \quad (17)$$

Zu einem Signifikanzniveau von 5% bei einem beidseitigen Test liefert eine entsprechende Tabelle ein kritisches t_{krit} für eine t -Verteilung mit $n - 1$ Freiheitsgraden von [1]

$$t_{\text{krit}} = 2,20. \quad (18)$$

Da $4,48 > 2,20$ ist, muss die Hypothese, dass der angegebene Literaturwert korrekt ist, bei einem Signifikanzniveau von 5% verworfen werden.

Um herauszufinden, *wie* unwahrscheinlich das Ergebnis unserer Messung bei Vernachlässigung systematischer Fehler und unter Annahme des Literaturwerts ist, lässt sich der P -Wert berechnen. Mit dem R-Befehl

$$2*(1-\text{pt}(4.45, \text{df}=11))$$

erhalten wir einen P -Wert von

$$P = 9,314 \cdot 10^{-4}. \quad (19)$$

5.2 Bestimmung der kinetischen Energie

Unter Zugrundelegung des Literaturwertes $\frac{e}{m_e} = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$ berechnen wir über Gleichung (4) die Zyklotronfrequenz für das eingestellte Magnetfeld. Das eingestellte Magnetfeld hat die Stärke

$$B = 0,78 \cdot 10^{-3} \frac{\text{T}}{\text{A}} \cdot 1,499 \text{ A} = 1,169 \cdot 10^{-3} \text{ T} \quad (20)$$

mit dem Fehler

$$s_B = 0,78 \cdot 10^{-3} \frac{\text{T}}{\text{A}} \cdot s_I = 0,018 \cdot 10^{-5} \text{ T}. \quad (21)$$

s_I berechnet sich auf die in den Messungen (vgl. Abschnitt 4) erwähnte Weise. Damit ergibt sich auf die Zyklotronfrequenz

$$\nu_Z = 3,272 \cdot 10^7 \text{ Hz}, \quad (22)$$

auf welche der Fehler

$$s_{\nu_Z} = \frac{|q|}{2\pi m_e} s_B = 0,05 \cdot 10^7 \text{ Hz}. \quad (23)$$

beträgt. Für die Zyklotronfrequenz erhalten wir daher $(3,27 \pm 0,05) \cdot 10^7$ Hz.

Bevor wir uns der Winkelabhängigkeit zuwenden, wollen wir die kinetische Energie der Elektronen untersuchen. Dazu berechnen wir im vorherigen Teil den Bahndurchmesser der geschlossenen Kreisbahn aus $d = d_2 - d_1$ mit

$$s_d = \sqrt{s_{d_1}^2 + s_{d_2}^2}. \quad (24)$$

Unsere Werte für diese Rechnung können wir aus Tabelle 3 aus der zu den Messungen bei dem Drehwinkel von -4° entnehmen, da unser Fadenstrahlrohr bei Verkippung ein Offset von -4° aufwies und wir deswegen bei dieser Winkeleinstellung eine geschlossene Kreisbahn erhielten. Mit den Werten erhalten wir für den Durchmesser

$$d = (8,2 \pm 0,1) \text{ cm}. \quad (25)$$

Das entspricht einer Kreisbahn mit Radius

$$r_0 = (4,1 \pm 0,1) \text{ cm}. \quad (26)$$

Daraus können wir mit

$$v = 2\pi r_0 \nu_Z = 8,4 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (27)$$

die Geschwindigkeit der Elektronen berechnen. Der Fehler auf die Geschwindigkeit ist

$$s_v = 2\pi \sqrt{(r_0 s_{\nu_Z})^2 + (\nu_Z s_{r_0})^2} = 0,2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (28)$$

Nun können wir über Gleichung (2) die Energie der Elektronen mit dem Fehler

$$s_E = m_e \cdot v \cdot s_v \quad (29)$$

berechnen und erhalten

$$E_v = (3,21 \pm 0,16) \cdot 10^{-17} \text{ J} = (168 \pm 8) \text{ eV}. \quad (30)$$

Die Energie können wir zum Vergleich noch zusätzlich über Gleichung (2) aus der Anodenspannung

$$U_A = (216 \pm 4) \text{ V} \quad (31)$$

berechnen und erhalten inklusive der Berechnung des Fehlers aus

$$s_{E_U} = e \cdot s_{U_A} \quad (32)$$

für die Energie

$$E_U = (3,46 \pm 0,03) \cdot 10^{-17} \text{ J} = (181 \pm 2) \text{ eV}. \quad (33)$$

Was der Grund für die große Abweichung der beiden für den Wert der Energie bestimmten Werte voneinander ist, werden wir in der Diskussion erläutern.

5.3 Abhängigkeit vom Einschusswinkel

Nun sind die Messdaten aus Tabelle 3 auszuwerten. Zunächst werden dafür die Offset-belasteten Winkel α' , die sich an der Skala ablesen ließen, in die „realen“ Winkel α umgerechnet. Dafür subtrahieren wir den Offset $\alpha_0 = -4^\circ$:

$$\alpha = \alpha' - \alpha_0 \quad (34)$$

Der Fehler auf α beläuft sich demnach auf

$$s_\alpha = \sqrt{s_{\alpha'}^2 + s_{\alpha_0}^2} = 0,7^\circ. \quad (35)$$

Nun berechnen wir den Tangens von α , um diesen später mit der noch zu berechnenden $\frac{h}{2\pi r}$ graphisch aufzutragen. Der Tangens von α berechnet sich mit $\tan \alpha$ mit der Unsicherheit von

$$s_{\tan \alpha} = \frac{s_\alpha}{\cos^2(\alpha)}. \quad (36)$$

Nun ist die andere Größe zu berechnen. Aus h_1 und h_2 bzw. $h_{1/2}$ berechnen wir die Ganghöhe h :

$$h = h_2 - h_1, \quad \text{bzw.} \quad h = 2(h_{1/2} - h_1). \quad (37)$$

Die Fehler auf die Ganghöhe berechnen sich demnach ebenfalls auf unterschiedliche Arten:

$$s_h = \sqrt{s_{h_2}^2 + s_{h_1}^2}, \quad \text{bzw.} \quad s_h = 2\sqrt{s_{h_{1/2}}^2 + s_{h_1}^2}. \quad (38)$$

Die Art der Berechnung von h wird ganz einfach danach ausgewählt, ob in dem Datensatz $h_{1/2}$ oder h_2 vorhanden ist.

Der Radius r kann aus d_1 und d_2 mitsamt Fehler analog zu Gleichungen (8) und (9) berechnet werden. Aus Radius r und Ganghöhe h lässt sich nun die Größe $\frac{h}{2\pi r}$ nach Definition berechnen. Der Fehler darauf ergibt sich nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung zu

$$s_{\frac{h}{2\pi r}} = \sqrt{\left(\frac{s_h}{2\pi r}\right)^2 + \left(\frac{h}{2\pi r^2} s_r\right)^2}. \quad (39)$$

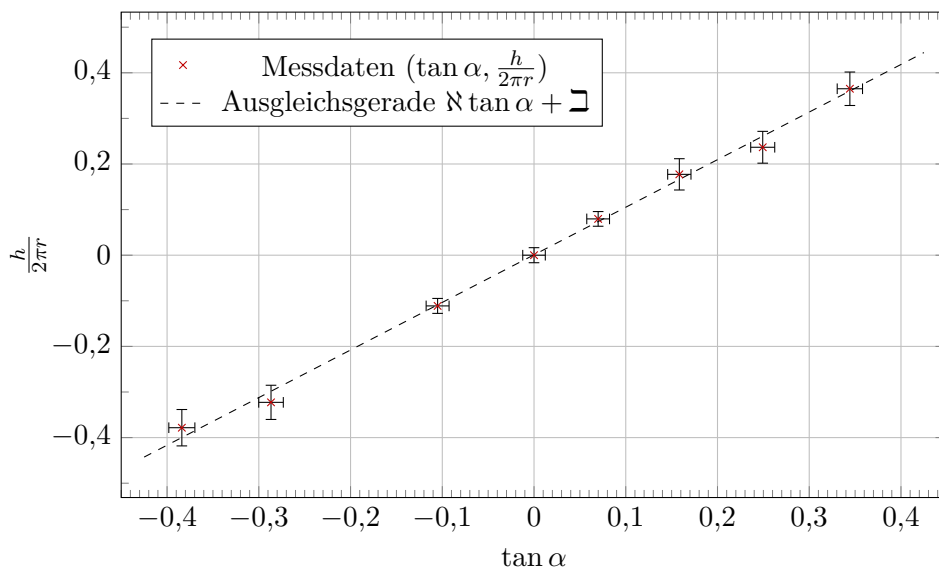
Die aufzutragenden Werte sind mitsamt zur Berechnung dieser notwendigen Hilfsgrößen in Tabelle 5 aufgetragen. Zusätzlich sind in Abbildung 4 die Wertepaare $(\tan \alpha, \frac{h}{2\pi r})$ graphisch mit Fehlern eingetragen².

Neben den Datenpaaren ist in Abbildung 4 auch eine Ausgleichsgerade eingetragen. Diese entstand durch eine in y -Richtung gewichtete lineare Regression der Form

$$\left[\frac{h}{2\pi r} \right] (\tan \alpha) = \aleph \tan \alpha + \beth. \quad (40)$$

²Zur Durchführung der Regression und wegen Gründen der Ästhetik wurden $\frac{h}{2\pi r}$ -Werte, die zu negativen Tangens-Werten gehören, mit -1 multipliziert, bevor diese in der Abbildung aufgetragen wurden.

$(\alpha' \pm 0,7^\circ)$ in $^\circ$	$(r \pm 0,07 \text{ cm})$ in cm	h in cm	$\frac{h}{2\pi r}$	$\tan \alpha$
0,0	4,10	$0,0 \pm 0,4$	$0,000 \pm 0,016$	$0,000 \pm 0,012$
4,0	4,20	$2,1 \pm 0,4$	$0,080 \pm 0,016$	$0,070 \pm 0,012$
9,0	3,95	$4,4 \pm 0,8$	$0,17 \pm 0,03$	$0,158 \pm 0,013$
-6,0	4,15	$2,9 \pm 0,4$	$-0,111 \pm 0,016$	$-0,105 \pm 0,012$
14,0	3,90	$5,8 \pm 0,8$	$0,23 \pm 0,03$	$0,249 \pm 0,013$
19,0	3,75	$8,6 \pm 0,8$	$0,36 \pm 0,03$	$0,344 \pm 0,014$
-16,0	3,65	$7,4 \pm 0,8$	$-0,32 \pm 0,03$	$-0,287 \pm 0,013$
-21,0	3,45	$8,2 \pm 0,8$	$-0,37 \pm 0,04$	$-0,384 \pm 0,014$

Tabelle 5: Wertepaare $\tan \alpha$ und $\frac{h}{2\pi r}$ mit HilfsgrößenAbbildung 4: $\frac{h}{2\pi r}$ als Funktion von $\tan \alpha$

Als Ergebnis der Regression erhalten wir die Regressionsparameter

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} &= 1,043 \pm 0,008, \\ \mathfrak{N} &= (0 \pm 5) \cdot 10^{-2}. \end{aligned} \quad (41)$$

Nun sind für jeden Winkel die Geschwindigkeitskomponenten v_{\parallel} und v_{\perp} zu berechnen. Geometrische Überlegungen legen die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} v_{\parallel} &= v \cdot \sin \alpha, \\ v_{\perp} &= v \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (42)$$

nahe. Der Fehler auf diese Messwerte berechnet sich gemäß Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned} s_{v_{\parallel}} &= \sqrt{(s_v \cos \alpha)^2 + (s_{\alpha} v \cdot \cos \alpha)^2} \\ s_{v_{\perp}} &= \sqrt{(s_v \sin \alpha)^2 + (s_{\alpha} v \cdot \sin \alpha)^2} \end{aligned} \quad (43)$$

Die Werte für die Geschwindigkeitskomponenten sind für jeden Winkel α aus Tabelle 3 zu berechnen. Dies geschieht über Gleichungen (42) und (43) und wird in Tabelle 6 eingetragen.

α in $^{\circ}$	v_{\parallel} in $10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	v_{\perp} in $10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$-21,0 \pm 0,7$	$-3,02 \pm 0,12$	$7,87 \pm 0,20$
$-16,0 \pm 0,7$	$-2,32 \pm 0,11$	$8,10 \pm 0,20$
$-6,0 \pm 0,7$	$-0,88 \pm 0,11$	$8,38 \pm 0,20$
$0,0 \pm 0,7$	$0,00 \pm 0,10$	$8,43 \pm 0,21$
$4,0 \pm 0,7$	$0,59 \pm 0,10$	$8,41 \pm 0,21$
$9,0 \pm 0,7$	$1,32 \pm 0,11$	$8,33 \pm 0,20$
$14,0 \pm 0,7$	$2,04 \pm 0,11$	$8,18 \pm 0,20$
$19,0 \pm 0,7$	$2,74 \pm 0,12$	$7,97 \pm 0,20$

Tabelle 6: Verschiedene Vektorkomponenten der Geschwindigkeit v bei verschiedenen Winkeln α .

Die Vektorkomponenten lassen sich auch graphisch visualisieren, indem wir für jeden Winkel den Vektor \boldsymbol{v} in ein Diagramm eintragen. Dies ist in Abbildung 5 getan.

Für größere, parallel zum Magnetfeld orientierten Geschwindigkeitskomponenten nimmt die Lorentzkraft, die das Teilchen auf einer Kreisbahn hält, ab. Wegen $v_{\perp} = v \cos \alpha$ und Gleichung (3) erwarten wir daher für den Bahnradius r :

$$\begin{aligned} r(\alpha) &= \frac{mv_{\perp}(\alpha)}{eB} \\ &= \frac{mv}{eB} \cos \alpha \\ &= r_0 \cos \alpha \end{aligned} \quad (44)$$

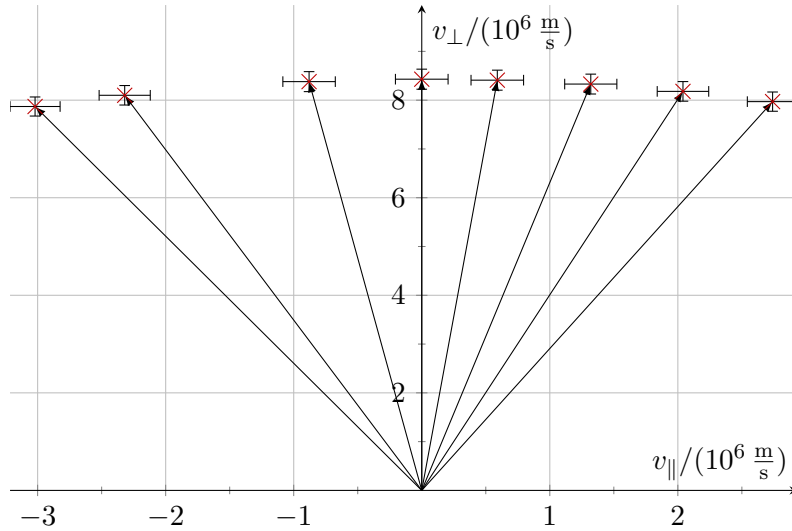


Abbildung 5: Vektordiagramm der Geschwindigkeitskomponenten aus Tabelle 6

Um diesen Zusammenhang zu verifizieren, tragen wir den Radius r auf den Winkel α graphisch auf, wobei wir von den Daten aus Tabelle 5 ausgehen. Die graphische Auswertung ist in Abb. 6 zu finden. Zusätzlich zu den Messdaten ist der erwartete $r_0 \cos \alpha$ -Verlauf eingetragen, wobei r_0 Gleichung (26) entnommen ist.

6 Diskussion

6.1 Bestimmung der spezifischen Elektronenladung

Aus unseren Wertepaaren berechneten wir jeweils das Magnetfeld und die spezifische Elektronenladung, welche in Tabelle 4 dokumentiert sind. Daraus erhielten wir für den Mittelwert der spezifischen Elektronenladung

$$\left\langle \frac{e}{m_e} \right\rangle = (1,887 \pm 0,026) \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}. \quad (45)$$

Die Standardabweichung des Mittelwertes ist:

$$s_{\langle \frac{e}{m_e} \rangle} = 2,84 \cdot 10^9 \frac{\text{C}}{\text{kg}}. \quad (46)$$

Um unser Ergebnis mit dem angegebenen Wert [2] von $1,759 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$ zu vergleichen, führten wir Hypothesentest durch. Mit der Teststatistik

$$t = 4,48 \quad (47)$$

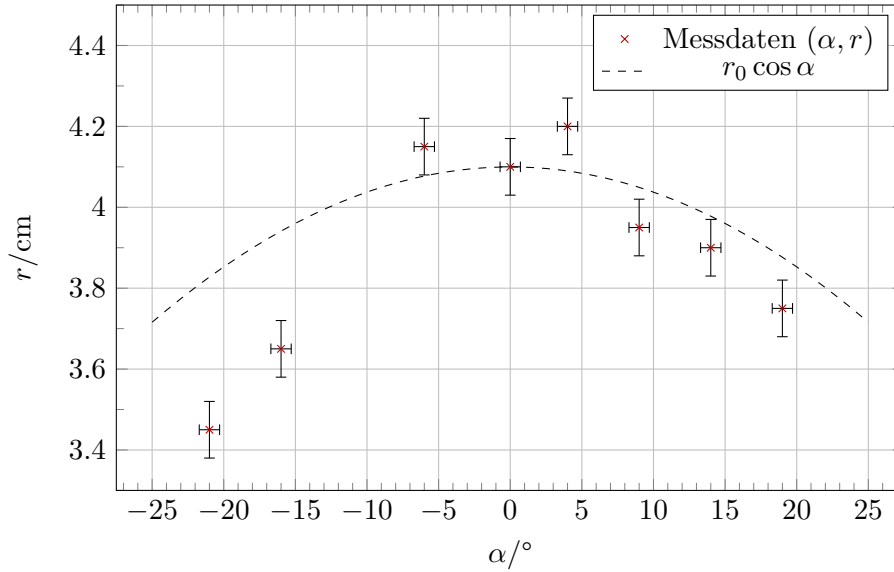


Abbildung 6: Radius r der Elektronenbahn in Abhängigkeit vom Winkel α .

zu einem Signifikanzniveau von 5% bei einem beidseitigen Test erhalten wir ein kritisches t_{krit} von

$$t_{\text{krit}} = 2,20. \quad (48)$$

Da $4,48 > 2,20$ ist, musste die Hypothese, dass der angegebene Literaturwert korrekt ist, bei einem Signifikanzniveau von 5% verworfen werden. Ferner erhielten wir einen P -Wert von $P = 9,314 \cdot 10^{-4}$, was auch bei einem Signifikanzniveau von 0,1% zu einer Verwerfung der Hypothese geführt hätte.

In unserer Berechnung sind wir allerdings davon ausgegangen, dass keine systematischen oder groben Fehler bei der Messung passiert sind. Dies muss aber nicht unbedingt der Fall sein. Besonders die Betrachtung der einzelnen berechneten Werte der spezifischen Elektronenladung in Tabelle 4 zeigt, dass alle berechneten Werte systematisch über dem Literaturwert liegen. Auch ist auffällig, dass die Streuung mehr als dreimal so groß wie der Fehler und die Standardabweichung des Mittelwertes ist. Auch dies lässt einen systematischen oder groben Fehler vermuten.

Obwohl sich Strom und Spannung mit einem sehr geringen statistischen Fehler (siehe Toleranzen in Abschnitt 4) einstellen ließen, ist nicht ausgeschlossen, dass ein Fehler in der Kalibrierung der Multimeter vorliegt. Da allerdings sowohl vor dem Versuchsaufbau als auch nach Einstecken der nötigen Kabel (aber immer noch vor Hochdrehen der Spannung am Netzteil) eine Nullspannung angezeigt wurde, halten wir einen systematischen Fehler eher für unwahrscheinlich³.

³Es kann natürlich sein, dass Netzteil *und* Multimeter gleichermaßen falsch kalibriert sind; diesen Fall schließen wir allerdings wegen der geringen Wahrscheinlichkeit guten

Auch das Magnetfeld zwischen den Helmholtz-Spulen ist relativ homogen, weswegen sich auch hier kein systematischer Fehler vermuten lässt. Deshalb vermuten wir die Hauptursache in einem sehr ungenauen Ablesen der Bahnradien auf der Spiegelskala. Dies erklärt auch, warum der berechnete Mittelwert der spezifischen Elektronenladung im Rahmen der Unsicherheit nicht mit dem Literaturwert $1,759 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$ übereinstimmt. Er liegt etwa 5σ -Umgebungen von diesem entfernt und ist demnach weitaus zu hoch. Es kann passiert sein, dass die abgelesenen Punkte für die Werte vom Radius nicht den tatsächlichen obersten und untersten Punkt der Kreisbahn entsprachen, wir deswegen stets einen systematisch zu kleinen Radius ablasen und somit eine systematisch zu große spezifische Elektronenladung erhielten. Somit liefert das Ergebnis des t -Testes nicht, dass der Literaturwert falsch ist⁴, sondern, dass in unseren Messungen ein systematischer Fehler vorliegt, welcher zumindest in Teilen aus der Ungenauigkeit beim Ablesen des Radius von der Spiegelskala hervorging.

6.2 Berechnung der kinetischen Energie

Aus unseren Messwerten erhielten wir die Zyklotronfrequenz

$$\nu_z = (3,27 \pm 0,05) \cdot 10^7 \text{ Hz.} \quad (49)$$

Daraus erhielten wir für die Geschwindigkeit der Elektronen

$$v = (8,4 \pm 0,2) \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (50)$$

Einerseits konnten wir den Betrag der kinetischen Energie aus der zuvor berechneten Geschwindigkeit berechnen. Das ergab:

$$E_v = (3,21 \pm 0,16) \cdot 10^{-17} \text{ J} = (164 \pm 5) \text{ eV.} \quad (51)$$

Andererseits konnten wir die Energie noch aus der Anodenspannung bestimmen und erhielten

$$E_U = (3,461 \pm 0,003) \cdot 10^{-17} \text{ Joule} = (216 \pm 2) \text{ eV.} \quad (52)$$

Es ist deutlich erkennbar, dass die beiden für den Wert der Energie bestimmten Werte stark voneinander abweichen. Genauer gesagt weichen sie um mindestens 3σ -Umgebungen voneinander ab. Wir haben zwar keinen dritten Vergleichswert, dennoch kann man aber sagen, dass der über die Anodenspannung bestimmte Wert für die Energie ein genaueres Ergebnis liefert. Diese These stützen wir, weil der Fehler auf die vom Multimeter gemessene Anodenspannung relativ gesehen weniger Einfluss auf die Berechnung der Energie hat als der Fehler beim Ablesen der Bahnradien: Es

Gewissens aus

⁴In diesem Fall wäre auch ein deutlich geringeres Signifikanzniveau zu wählen.

gestaltete sich als schwierig, die Bahnradien der Kreisbahn des Elektronenstrahls von der beleuchteten Skala auf der Hinterseite des Glaskastens, in dem sich das Fadenstrahlrohr befand, abzulesen, weil einerseits der Fadenstrahl ungünstig aufgeweitet und unscharf war, seine Auflösung sich zudem nicht optimieren ließ und andererseits der horizontale Abstand zwischen der Messskala und der Kreisbahn derart groß war, dass sich nur sehr schwer sagen lies, bei welchem Wert sich der Radius der Kreisbahn befindet. Um den Radius abzulesen, musste man immer wieder die Beleuchtung der Messskala einschalten; wo der Kreisring auf die Messskala gespiegelt wird, konnte man allerdings nur bei kompletter Dunkelheit erkennen. Obwohl wir schon darauf achteten, dass wir den Radius stets an der Stelle auf der Skala ablasen, an der sich die klar erkennbare Kreisbahn und deren Spiegelbild überlagerten, sprechen alle diese Ursachen – unter Ausschluss von Kalibrierungsfehlern – für systematisch zu klein abgelesene Bahnradien und damit zu geringen Elektronengeschwindigkeiten, was sich wiederum auf die Berechnung der Energie aus der Geschwindigkeit auswirkt.

6.3 Abhängigkeit vom Einschusswinkel

Zwischen $\tan \alpha$ und $\frac{h}{2\pi r}$ erwarten wir einen linearen Zusammenhang, weil mit zunehmenden Einschusswinkel die Ganghöhe zunimmt und der Radius der Kreisbahn abnimmt. Diesen Zusammenhang haben wir in Abb. 4 verifiziert. Dort ist erkennbar, dass alle unsere Messwerte innerhalb einer 1σ -Umgebung um den erwarteten Zusammenhang liegen. Trotzdem sind die Messwerte nicht alle wirklich genau. Auf die Ursachen gehen wir nach Betrachtung des Vektordiagramms noch genauer ein.

Für die Diskussion des in Abb. 6 erkennbaren Zusammenhangs zwischen abnehmendem Bahnradius mit zunehmenden Einschusswinkel ist relevant, dass mit zunehmenden Kippwinkel die zum Magnetfeld senkrechte Geschwindigkeitskomponente $v \cos \alpha$ der Elektronen abnimmt. Aber nur auf diese Komponente wirkt die Lorentzkraft. Da die Lorentzkraft, wie in den theoretischen Grundlagen beschrieben, als Zentrifugalkraft wirkt, nimmt so mit zunehmenden Einschusswinkel der Bahnradius ab. In den der Auswertung haben wir bereits beschrieben, dass der Radius der Kreisbahn mit dem Winkel α über $r = r_0 \cos \alpha$ zusammenhängt. Der Zusammenhang zwischen dem Radius und $\cos \alpha$ ist leider nicht sehr deutlich aus unseren Messdaten zu erkennen, weil unsere Messwerte etwa bis zu 3σ -Umgebungen um den erwarteten Wert liegen.

In beiden Teilen dieses Versuchsabschnitts und, wie eben erwähnt, besonders im zweiten Teil, in dem die Winkelabhängigkeit des Bahnradius zu untersuchen war, liegen wieder sehr starke Schwankungen der Messpunkte vor. Der Grund für die Ungenauigkeit ist analog zu den vorherigen Abschnitten die ungenaue Ablesbarkeit der Bahnradien von der Spiegelskala. Jetzt kommt aber noch erschwerend hinzu, dass vor allem für große Winkel

auf Grund von mehreren Schraubenbahnen in verschiedenen Abständen zur Spiegelskala das Ablesen des Radius zusätzlich erschwert wurde, vor allem, weil eine klare Zuordnung der Kreisbahnen zu den jeweiligen Spiegelbildern so nicht immer eindeutig möglich war. Die Messung der Ganghöhe stellte uns vor noch größere Probleme, weil wir nicht klar erkennen konnten, welche Punkte der Kreisbahn paarweise genau senkrecht miteinander verbunden werden können und somit den Wert der Ganghöhe liefern. Außerdem war das Ablesen der Werte für die Ganghöhe stark abhängig von unserem Blickwinkel. Es konnten also leicht Parallaxenfehler beim Ablesen auftreten. Besonders bei großen Einschusswinkeln war teilweise sogar nicht mehr eine komplette Schraubenbahn erkennbar, sodass wir die halbe Ganghöhe messen mussten. Wir versuchten schon die Messung der Ganghöhe zu optimieren, indem wir diese immer aus dem Blickwinkel ablasen, bei dem die untere Kante der Kreisbahn genau auf der Hälfte des Abstandes zwischen zwei oberen Kanten der Kreisbahn entlang verlief. Wir haben unsere Messungen also so gut wie möglich durchgeführt und auch wenn unsere Messwerte nicht alle im Rahmen ihrer Unsicherheit mit dem theoretisch erwarteten Verlauf übereinstimmen, können wir sagen, dass die erwarteten Zusammenhänge erkennbar geworden sind und wir unsere Messungen den Umständen entsprechend doch relativ gut ausgeführt haben.

A Anhang

Versuch 80: $\frac{e}{m}$ - Bestimmung 25.03

Aufbau: Am 1. mag. Wert $U_A = (0-300V)$ Rädchen auf
 Aufheizen + $U_A = 200V$
 2-3 min Intensität warten

• l_{mag} größer \Rightarrow Radius kleiner
 U_w
 U_c größer \Rightarrow Radius größer
 U_c ablenkt \Rightarrow Kreis wird am Ausgangspunkt gedreht

1.)

U_A (V)	I (mA)	d_1 (cm)	d_2 (cm)
201	1,427	5,6	13,7
212	1,427	5,5	14,0
260	1,427	4,8	14,5
297	1,427	4,6	15,0

 $S_{U_A} = 0,81 + 2,0 \text{ Bits}$
 $S_I = 1,51 + 1,0 \text{ Bits}$
 $S_{d_1} = S_{d_2} = \pm 0,1 \text{ cm}$
 $S_{S_1} = S_{S_2} = S_{S_3}$
 $= \pm 0,3 \text{ cm}$
 Summe $= 0,5$

2.) $I = 1,500 \text{ A}$ Winkeloffset (-4°) zu Nullstellung
 $U_A = 2,16 \text{ V}$

Winkel (°)	d_1 (cm)	d_2 (cm)	S_1 (cm)	S_2 (cm)	S_3 (cm)	zwischen S_1, S_2
-4	5,6	13,8	6,4	6,4		
0	6,1	14,5	7,5	9,6		
5	6,3	14,2	7,8	10,0	10,0	
-10	6,3	14,5	3,0	5,5		
10	6,3	14,1	6,0		9,0	
15	6,4	13,9	6,4		10,4	
-20	6,8	14,1	5,8		2,1	
-25	7,0	13,0	5,5		2,4	

25.3.2014

Literatur

- [1] o.V.: *Student's t-distribution* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Student%27s_t-distribution.
Version: 2019. – [Online; Aufgerufen 26. März 2019]
- [2] o.V.: *Versuchsanleitungen zum Physikkabor für Anfänger*innen, Teil 2*.
2019