

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziele des Versuchs</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Aufbau und Durchführung</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Auswertung und Fehleranalyse</b>	<b>3</b>
3.1	Absorptionsspektren der Cyanin-Farbstoffe . . . . .	3
3.2	Interpretation nach dem Teilchen-im-Kasten-Modell . . . . .	6
3.3	Abhängigkeit der Absorption von der Farbstoffkonzentration . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Diskussion der Ergebnisse</b>	<b>12</b>
4.1	Angabe und Diskussion der Endergebnisse . . . . .	12
4.2	Diskussion der verwendeten Messmethoden . . . . .	13
4.3	Verbesserte Messmethoden . . . . .	14
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>16</b>
	Abbildungsverzeichnis . . . . .	16
	Tabellenverzeichnis . . . . .	16
	Literaturverzeichnis . . . . .	16
A.1	Transmissionsspektren der einzelnen Farbstoffe . . . . .	17
A.2	Schematische Darstellung der Potentialkästen . . . . .	18
A.3	Messprotokoll . . . . .	21

## 1 Ziele des Versuchs

In diesem Versuch wird die Absorption von Licht durch Cyanin-Farbstoffe untersucht. Durch Untersuchung von Absorptionsspektren der Cyanin-Ethanol-Gemische werden die Wellenlängen  $\lambda$  bestimmt, bei denen die Farbstoffe maximal absorbieren. Daraufhin werden die Ergebnisse mit dem Teilchen-im-Kasten-Modell interpretiert. Zuletzt wird untersucht, wie der Absorptionsgrad von der Farbstoffkonzentration abhängt.

## 2 Aufbau und Durchführung

Der Versuchsaufbau für die Spektroskopie bestand aus einer Schiene, auf der eine Glühlampe, eine Linse, eine Klemmhalterung und ein Adapter mit F-SMA-Anschluss angebracht wurden. Die Bauteile wurden so justiert, dass das weiße Licht der Glühlampe mit der Linse kollimiert wurde. Eine auf der Klemmhalterung angebrachte Küvette wurde von dem kollimierten Licht durchleuchtet, das Licht traf daraufhin auf den Lichtleiter. Das damit verbundene Spektrometer (Typ: Ocean Optics Red Tide USB650) gab via USB-Schnittstelle die Messdaten an eine Messsoftware (OceanView) auf einem Laptop weiter. Gemessen wurde die Intensität  $I$  des Lichtes in counts über einen Wellenlängenbereich von  $350 \text{ nm} \leq \lambda \leq 1000 \text{ nm}$ .

Um die drei Farbstofflösungen zu präparieren standen drei Kunststoffküvetten, kleine Bechergläser, eine Spachtel und eine Kolbenhubpipette (Surepette, Modell: SPA-5000) mit Fassungsvermögen  $1 \text{ ml} \leq V \leq 5 \text{ mL}$  und Einwegspitzen zur Verfügung. Zu untersuchen waren die im festen Aggregatzustand vorliegenden Farbstoffe Cyaniniodid, Carbocyaniniodid und Dicarbo-cyaniniodid. Als Lösungsmittel stand Ethanol zur Verfügung. Um Hautkontakt mit dem Farbstoff zu vermeiden, wurden handelsübliche Gummihandschuhe getragen.

Im ersten Versuchsteil wurden die Absorptionsspektren der verschiedenen Farbstoffe untersucht. Zunächst wurde ein Referenzspektrum aufgenommen. Hierfür wurde eine Küvette mit Ethanol in die Klemmhalterung gespannt. Die Spannung an der Glühlampe wurde so eingestellt, dass das im Messprogramm sichtbare Spektrum den Intensitätsbereich maximal ausfüllte. Die Leuchtintensität der Glühbirne wurde daraufhin während der gesamten Versuchsdurchführung nicht mehr verändert. Als Referenz wurde nun eine Messreihe erstellt, in der 100 Spektren aufgenommen wurden. Über diese kann später gemittelt werden. Nun wurde pro Farbstoff eine Lösung mit Ethanol derart hergestellt, dass die Minima der Absorptionsspektren gut sichtbar waren. Die in den Küvetten befindlichen Lösungen wurden nacheinander in die Klemmhalterung gespannt. Es wurde erneut jeweils eine Messreihe mit 100 Spektren aufgenommen. Pro Messreihe erhält man durch Mittelwertbildung ein Absorptionsspektrum. Die Absorptionsspektren  $S_i$  der einzelnen Farbstoffe können in der Auswertung miteinander und mit dem Referenzspektrum  $S_0$  verglichen werden. Indem pro Farbstoff der Absorptionsgrad

$$A_i = 1 - \frac{S_i}{S_0} \quad (1)$$

gegen die Wellenlänge  $\lambda$  aufgetragen wird, können die Wellenlängen identifiziert werden, bei denen die Farbstoffe am stärksten absorbieren.

Im zweiten Versuchsteil werden die Ergebnisse aus Versuchsteil 1 auf das Teilchen-im-Kasten-Modell angewendet. Aus der chemischen Struktur der drei Farbstoffe wird zunächst abgeleitet, wie viele  $\pi$ -Elektronen pro Molekül zur Verfügung stehen. Die Kohlenstoffkette zwischen den beiden Stickstoffatomen wird dann als Kasten mit unendlich hohem Potential modelliert. Es wird betrachtet, wie sich die  $\pi$ -Elektronen im Kasten verhalten, wenn ein Molekül mit Licht angeregt wird. Mithilfe der absorbierten Wellenlängen aus Versuchsteil 1 können so Rückschlüsse auf die Kastenlänge gezogen werden.

Zuletzt wird untersucht, wie die Absorption von der Farbstoffkonzentration abhängt. Zunächst wurde eine Referenzlösung aus Carbocyaniniodid und Ethanol hergestellt, die etwas konzentrierter war als die in Versuchsteil 1 verwendete Lösung. Daraufhin wurde stets eine Messreihe aufgenommen und danach die Konzentration der Lösung mithilfe der Kolbenhubpipette so verringert, dass die Konzentration der Lösung pro Verdünnungsschritt um 33% im Vergleich zum vorigen Schritt verringert wurde. Insgesamt wurden 10 Messreihen aufgenommen. Durch Mittelwertbildung ergeben sich daraus 10 Spektren  $S_j$ . Aus diesen wird für eine fest gewählte Wellenlänge  $\lambda_{\max}$  abermals der jeweilige Absorptionsgrad im Vergleich zum Referenzspektrum  $S_0$  mit Gleichung (1) berechnet. Der Zusammenhang zwischen Konzentration und Absorptionsgrad wird im Anschluss untersucht und versucht durch ein mathematisches Modell zu beschreiben.

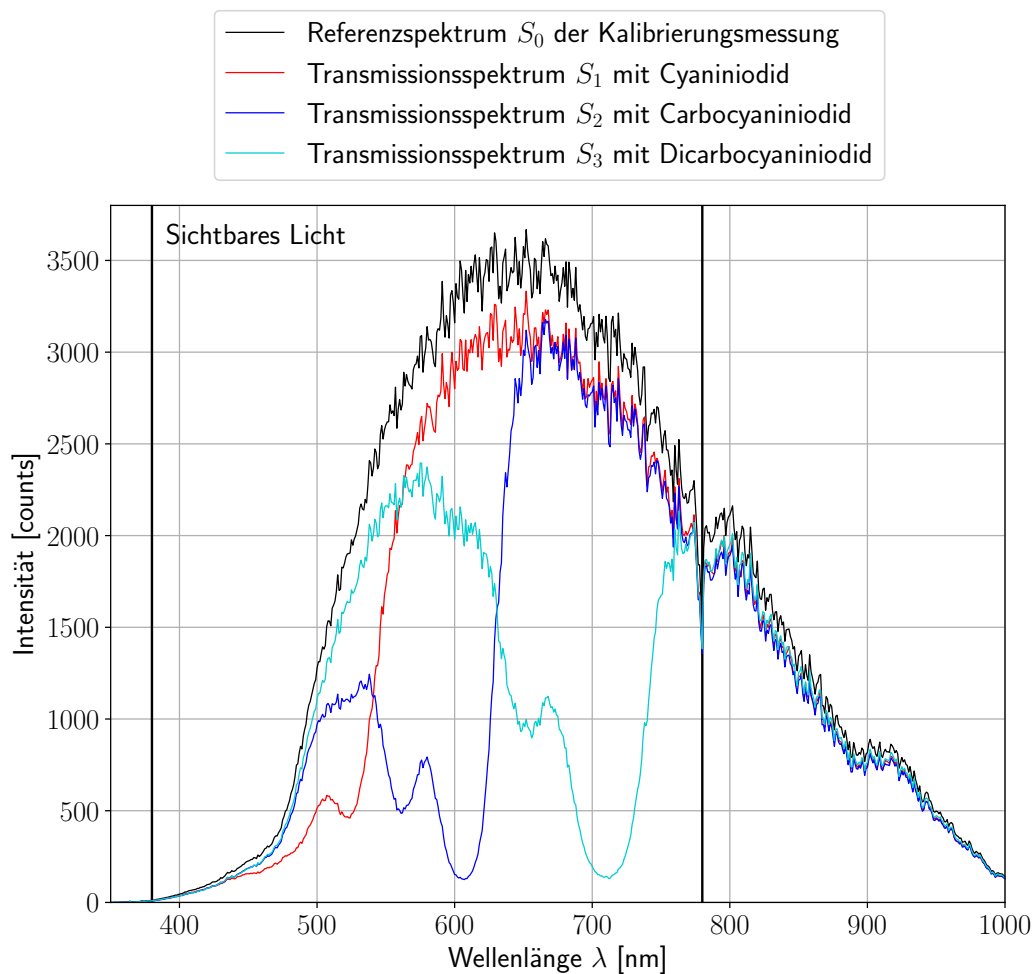
## 3 Auswertung und Fehleranalyse

### 3.1 Absorptionsspektren der Cyanin-Farbstoffe

Zunächst sollen in Versuchsteil 1 die Absorptionsspektren der drei vorliegenden Cyanin-Farbstoffe untersucht werden. Hierfür wird ein Referenzspektrum benötigt, weshalb zunächst 3 mL des Ethanols mit einer Kolbenhubpipette in die Küvette gegeben und mit der Glühlampe im oben beschriebenen Aufbau bestrahlt werden. Mit dem Lichtleiter und dem USB-Spektrometer wurde so das Transmissionsspektrum aufgezeichnet. Insgesamt wurden 100 Messungen des Spektrums mit jeweils 651 Messwerten im Bereich von 350 nm bis 1000 nm gemacht. Aus diesen 100 Aufzeichnungen wird jeweils der Mittelwert der Intensitäten  $\bar{S}_0(\lambda)$  für jede der Wellenlängen  $\lambda$  sowie die Standardabweichung des Mittelwerts nach den in [1] auf Seite 4 und 5 gegebenen Formeln berechnet. Mit den Mittelwerten ergibt sich das in [Abbildung 1](#) sichtbare Referenzspektrum.

Nach Aufzeichnung des Referenzspektrums wurden nacheinander die Spektren der verschiedenen Farbstoffe vermessen, wobei wieder jeweils 100 Aufzeichnungen der Spektren mit jeweils 651 Messwerten für Wellenlängen im Bereich 350 nm bis 1000 nm gemacht wurden. Zuerst wurde hierfür eine sehr geringe Menge Cyaniniodid im Ethanol gelöst, die entsprechende Küvette in den Versuchsaufbau eingebracht und mit der Glühlampe beleuchtet. Aus der Mittlung der einzelnen Messwerte ergibt sich das ebenfalls in [Abbildung 1](#) sichtbare Spektrum der rötlichen Lösung. Im Vergleich zum Referenzspektrum ist hier bereits ein deutliches Minimum zu erkennen. Als zweites wurde eine Lösung mit geringer Menge an Carbocyaniniodid hergestellt und das Transmissionsspektrum aufgezeichnet. Durch erneute Mittlung ergibt sich das zweite in [Abbildung 1](#) sichtbare Spektrum der dunkelblauen Lösung. Hier fällt auf, dass schon zwei deutlich sichtbare Minima im Vergleich zum Referenzspektrum sichtbar sind.

## Transmissionsspektren und Kalibriermessung der verschiedenen Farbstoffe



**Abbildung 1:** Sichtbar ist das Referenzspektrum  $S_0$  des mit einer Glühlampe beleuchteten Ethanol zur Kalibration sowie alle gemessenen Transmissionsspektren der drei Farbstoffe Cyaniniodid, Carbocyaniniodid und Dicarboyaniniodid. Die sichtbaren Spektren wurden dabei aus Mittelung der Messwerte über 100 Aufzeichnungen jedes Spektrums berechnet. Es sind bei den Farbstoffen jeweils zwei der, durch Absorption des Lichts bestimmter Wellenlängen, auftretenden Minima im Transmissionsspektrum zu erkennen.

Zuletzt wurde das Spektrum von in Ethanol gelöstem Dicarboyaniniodid aufgezeichnet, welches nach Mittelung ebenfalls [Abbildung 1](#) zu sehen ist. Hier sind erneut zwei Minima im Transmissionsspektrum zu erkennen.

Zu den einzelnen Mittelwerten aller drei Farbstoffe wurde ebenfalls die Standardabweichung berechnet. Aufgrund der großen Menge an Daten wird hier nur ein Bereich der relativen Unsicherheiten der Mittelwerte angegeben. Diese befinden sich in einem Bereich von

$$\frac{s_{\bar{S}_i(\lambda)}}{\bar{S}_i(\lambda)} = 0,04 \% \text{ bis } 0,54 \% \quad \text{mit } i = 0, 1, 2, 3$$

für Wellenlängen von 450 nm bis 800 nm in den aufgezeichneten Spektren.

Aufgrund der sehr kleinen Intensitäten außerhalb dieses Bereichs fallen die relativen Fehler aufgrund höherer statistischer Schwankungen für Wellenlängen kleiner als 450 nm und größer als 800 nm erheblich größer aus. Für die Untersuchung der Absorptionsspektren waren diese Bereiche jedoch nicht relevant, da sich hier die Werte aller drei Spektren mit denen des Referenzspektrums nahezu decken und für diese Wellenlängen allgemein nur sehr geringe Intensitäten vorliegen. Die Absorptionsgrade der einzelnen Farbspektren lassen sich durch Gleichung (1) berechnen. Die Unsicherheiten der Absorptionsgrade ergeben sich mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung und den Standardabweichungen der Mittelwerte  $s_{\bar{S}_i(\lambda)}$  durch

$$\Delta A_i(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{S}_0(\lambda)} s_{\bar{S}_i(\lambda)}\right)^2 + \left(\frac{\bar{S}_i}{\bar{S}_0^2} s_{\bar{S}_0(\lambda)}\right)^2}. \quad (2)$$

Aufgrund der großen Menge an Daten wird auch hier nur ein Wertebereich der relativen Unsicherheiten angegeben. So befinden sich diese für Wellenlängen von 450 nm bis 800 nm zwischen

$$\frac{\Delta A_i(\lambda)}{A_i(\lambda)} = 0,01 \% \text{ bis } 1,9 \% \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 .$$

Mithilfe der so berechneten Absorptionsgrade können nun die Absorptionsspektren in Abhängigkeit der Wellenlängen aufgetragen werden. Diese sind im Anhang sichtbar. [Abbildung 6](#) zeigt dabei das Absorptionsspektrum für Cyaniniodid, [Abbildung 7](#) das Absorptionsspektrum für Carboocyaniniodid und [Abbildung 8](#) das Absorptionsspektrum für Dicarboocyaniniodid. Es sind überall deutlich zwei Peaks der am stärksten absorbierten Wellenlängen zu erkennen, die sich mit den Minima in den zuvor betrachteten Spektren  $S_i$  decken.

An den Peaks ist außerdem zu erkennen, dass es stets eine Wellenlänge  $\lambda_i$  gibt für die der Absorptionsgrad maximal ist. Die Wellenlängen maximaler Absorption wurden dabei numerisch anhand der verschiedenen berechneten Absorptionsgrade mit Python bestimmt. Es ergeben sich als globale Maxima die Wellenlängen und Absorptionsgrade

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 524 \text{ nm} & A_1(\lambda_1) = 75,8 \% & \text{für Cyaniniodid} \\ \lambda_2 = 605 \text{ nm} & A_2(\lambda_2) = 96,3 \% & \text{für Carboocyaniniodid} \\ \lambda_3 = 710 \text{ nm} & A_3(\lambda_3) = 95,5 \% & \text{für Dicarboocyaniniodid.} \end{array} \quad (3)$$

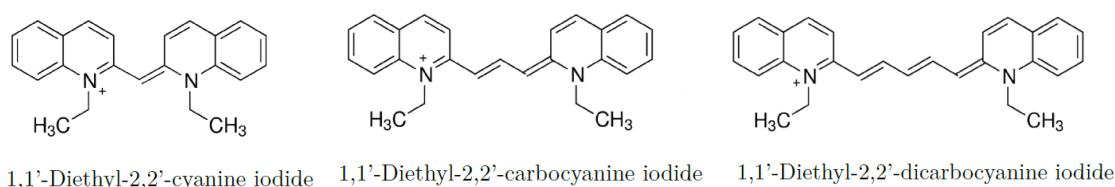
Zusätzlich werden ebenfalls numerisch die Nebenmaxima der weiteren, kleineren Peaks des Absorptionsspektrums der verschiedenen Farbstoffe bestimmt. Für die Wellenlängen und Absorptionsgrade dieser Maxima ergibt sich

$$\begin{array}{lll} \lambda_{1,n} = 492 \text{ nm} & A_{1,n}(\lambda_1) = 62,1 \% & \text{für Cyaniniodid} \\ \lambda_{2,n} = 563 \text{ nm} & A_{2,n}(\lambda_2) = 82,1 \% & \text{für Carboocyaniniodid} \\ \lambda_{3,n} = 653 \text{ nm} & A_{3,n}(\lambda_3) = 73,0 \% & \text{für Dicarboocyaniniodid.} \end{array} \quad (4)$$

Man sieht, dass alle diese Wellenlängen etwas unter der Wellenlänge des Hauptmaximums liegen, also im Wellenlängenbereich höherer Energie. Dies wird nun bei der Interpretation anhand des Teilchen-im-Kasten-Modells relevant.

### 3.2 Interpretation nach dem Teilchen-im-Kasten-Modell

Die aus Versuchsteil 1 erhaltenen Ergebnisse zur Absorption der Farbstoffe sollen nun nach dem Teilchen-im-Kasten-Modell interpretiert werden. Für diese Interpretation wird zunächst der Aufbau der Cyanin-Moleküle der verschiedenen Farbstoffe betrachtet, welcher in [Abbildung 2](#) sichtbar ist.



**Abbildung 2:** Darstellung des Molekularen Aufbaus der Farbstoffe. Deutlich sichtbar sind die unterschiedlich langen Kohlenstoffketten, für die das Modell eines Potentialkastens eingeführt wird. Die Abbildung wurde aus [2] entnommen.

Jeweils zwischen den beiden Stickstoffatomen (N) können sich  $\pi$ -Elektronen frei in der Kohlenstoff-Kette bewegen, allerdings nicht darüber hinaus. Im Modell kann diese Kette daher als unendlich hoher Potentialtopf beschrieben werden.

Die Anzahl der  $\pi$ -Elektronen ergibt sich dabei aus der Anzahl der Bindungen der Kette zwischen den Stickstoffatomen. Für Cyaniniodid liegen somit 4, für Carbocyaniniodid 6 und für Dicarboyaniniodid 8  $\pi$ -Elektronen vor. Wie in [Abbildung 3](#) gezeigt, besetzen diese Elektronen im Modell der Potentialtöpfe verschiedene Energieniveaus, welche sich wie in [2] auf Seite 3 gegeben, durch

$$E_n = \frac{h^2}{8m_e L^2} n^2 \quad (5)$$

für  $n = 1, 2, 3, \dots$  als  $n$ -tes Energieniveau berechnen lassen.  $L$  gibt hierbei die Kastenlänge des Potentialkastens an. Insbesondere könne also nur diskrete Energieniveaus im Molekül vorliegen.

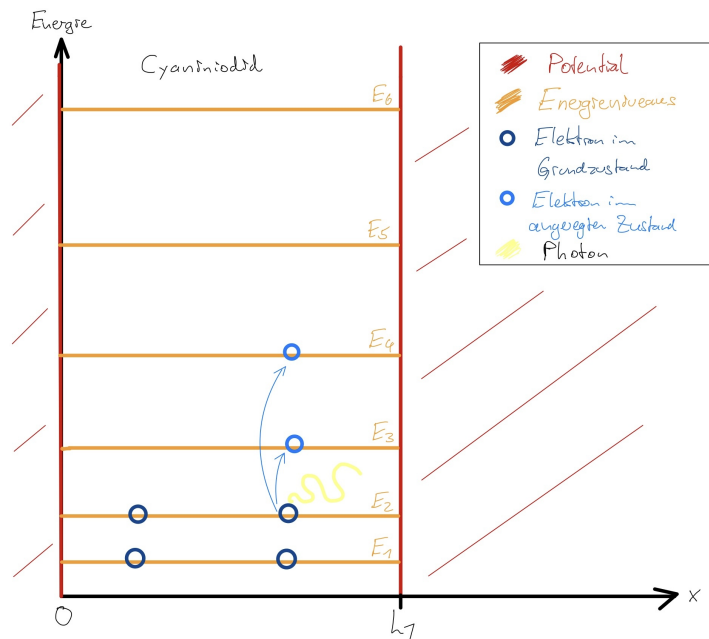
Nach dem Pauli-Prinzip können sich hierbei maximal immer nur 2 Elektronen auf demselben Energieniveau befinden. Durch Beleuchtung der Moleküle, wie in Versuchsteil 1, kann ein Elektron in einen angeregten Zustand gelangen, also in ein höheres Energieniveau gebracht werden. Dies geschieht durch Absorption eines Photons mit der passenden Wellenlänge  $\lambda$ , sodass die Photonenenergie gerade der Energiedifferenz  $\Delta E_{m, n}$  zwischen Anfangs- ( $n$ ) und End-Energieniveau ( $m$ ) des Elektrons entspricht. Mit der Photonenenergie

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} \quad (6)$$

und der Energiedifferenz

$$\Delta E_{m, n} = |E_m - E_n| = \frac{h^2}{8m_e L^2} |m^2 - n^2| \quad (7)$$

zwischen  $m$ -ten und  $n$ -ten Energieniveau lässt sich bei bekannter Wellenlänge  $\lambda$  die Kastenlänge des Potentialtopfs berechnen.



**Abbildung 3:** Schematische Darstellung des Potentialkastens für Cyaniniodid mit 4 freien  $\pi$ -Elektronen, die nach dem Pauli-Prinzip und aus energetischen Gründen auf den beiden unteren Energieniveaus verteilt sind. Die Potentialkästen für die beiden anderen Farbstoffmoleküle sind im Anhang in [Abbildungen 10](#) und [11](#) zu finden.

Hierzu wird die Formel

$$L = \sqrt{\frac{h\lambda}{8m_e c} |m^2 - n^2|} \quad (8)$$

verwendet. Nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ergibt sich für die Unsicherheit der Kastenlänge

$$\Delta L = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda} \frac{h}{8m_e c} |m^2 - n^2|} \Delta \lambda \quad (9)$$

Da auf dem Spektrometer keine Unsicherheit für die gemessene Wellenlänge angegeben war, kann  $\Delta L$  hier leider nicht berechnet werden. Die Längen werden also ohne Unsicherheiten angegeben.

Bei der Anregung der Moleküle durch Licht ist dabei ein Sprung des Elektrons in das jeweils nächst höhere, freie Energieniveau am wahrscheinlichsten, tritt also statistisch am häufigsten auf. Im Zusammenhang mit Versuchsteil 1 bedeutet dies, dass das Licht der Wellenlänge, das gerade diese für den Sprung notwendige Energie aufweist, am stärksten von dem Farbstoff absorbiert wird. Es handelt sich also hierbei gerade um das Licht der oben bestimmten Wellenlängen  $\lambda_i$  für  $i = 1, 2, 3$  der Hauptmaxima in den Absorptionsspektren, sichtbar in [Gleichung \(3\)](#). Die Nebenmaxima im Absorptionsspektrum entsprechen dahingegen den Wellenlängen des Lichts durch welche ein Elektron in das zweit höhere Energieniveau übergeht.

Besetzt man in den Potentialtöpfen der Farbstoffmoleküle die Energieniveaus nach dem Pauli-Prinzip mit den  $\pi$ -Elektronen, so ergibt sich folgendes:

In Cyaniniodid sitzen jeweils zwei der 4  $\pi$ -Elektronen im Grundzustand auf dem ersten und auf dem zweiten Energieniveau. Diese sind damit vollständig besetzt. Die niedrigste Anregung erfolgt also über das Anheben eines Elektrons vom zweiten in das dritte Energieniveau. Das Licht der Wellenlänge im Nebenmaximum des Absorptionsspektrums führte hier zu einem Übergang vom zweiten in das vierte Energieniveau.

In Carbocyaniniodid sitzen je 2 der 6 beweglichen  $\pi$ -Elektronen im Grundzustand auf dem ersten, auf dem zweiten und auf dem dritten Energieniveau. Da auch hier diese Energieniveaus daher vollständig besetzt sind, erfolgt die niedrigste Anregung durch den Übergang eines Elektrons vom dritten zum vierten Energieniveau. Das Licht der Wellenlänge im Nebenmaximum des Absorptionsspektrums führte hier zu einem Übergang vom dritten in das fünfte Energieniveau.

In Dicarbo-cyaniniodid sind im Grundzustand von den 8  $\pi$ -Elektronen jeweils 2 auf dem ersten, zweiten, dritten und vierten Energieniveau. Hier kann bei der niedrigsten Anregung also nur ein Übergang vom vierten in das fünfte Energieniveau stattfinden, da alle Energieniveaus zunächst vollständig besetzt sind. Das Licht der Wellenlänge im Nebenmaximum des Absorptionsspektrums führte hier zu einem Übergang vom vierten in das sechste Energieniveau.

Diese Zusammenhänge sind schematisch in den [Abbildungen 9 bis 11](#) gezeigt.

Für die verschiedenen Kastenlängen der Farbstoffe ergibt sich aus [Gleichung \(8\)](#) für Cyaniniodid

$$\begin{array}{ll} L_1 = 8,9 \text{ \AA} & \text{für das Hauptmaximum } (n = 2 \text{ und } m = 3) \\ L_{1,n} = 13,4 \text{ \AA} & \text{für das Nebenmaximum } (n = 2 \text{ und } m = 4) \end{array}$$

für Carbocyaniniodid

$$\begin{array}{ll} L_2 = 11,3 \text{ \AA} & \text{für das Hauptmaximum } (n = 3 \text{ und } m = 4) \\ L_{2,n} = 16,5 \text{ \AA} & \text{für das Nebenmaximum } (n = 3 \text{ und } m = 5) \end{array}$$

und für Dicarbo-cyaniniodid

$$\begin{array}{ll} L_3 = 13,9 \text{ \AA} & \text{für das Hauptmaximum } (n = 4 \text{ und } m = 5) \\ L_{3,n} = 19,9 \text{ \AA} & \text{für das Nebenmaximum } (n = 4 \text{ und } m = 6) . \end{array}$$

Die verschiedenen berechneten Kastenlängen  $L_i$  in Abhängigkeit der Bindungsanzahl  $n_i$  der relevanten Ketten der Farbstoffmoleküle ist in [Abbildung 4](#) sichtbar.

Trägt man die berechnete Kastenlänge gegen die Anzahl der  $\pi$ -Elektronen auf und führt an den Werten eine lineare Regression durch, so erhält man die ebenfalls in [Abbildung 4](#) sichtbare Ausgleichsgerade mit dem dazugehörigen Konfidenzband, welche sich beschreiben lässt durch

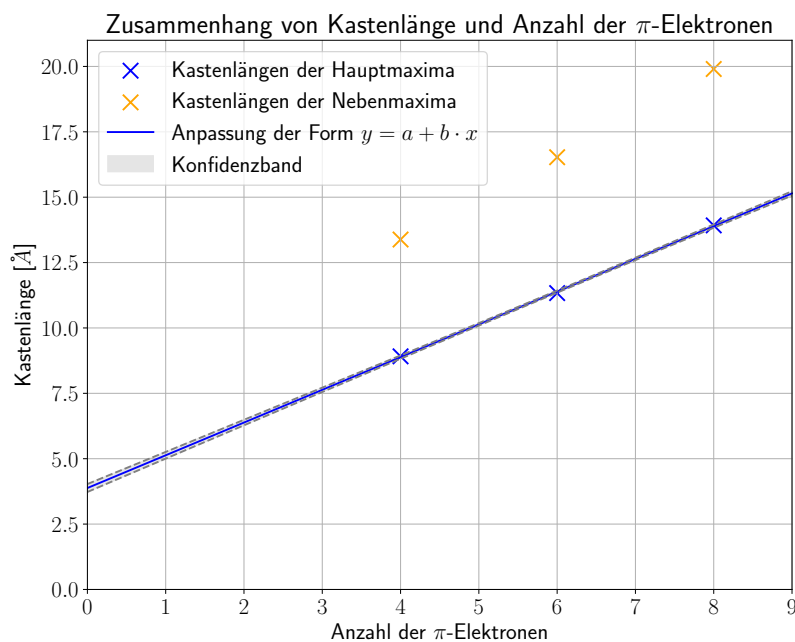
$$L = a + b \cdot n_i \quad (10)$$

mit

$$a = (3,88 \pm 0,15) \text{ \AA} \quad (10a)$$

$$b = (1,25 \pm 0,02) \text{ \AA} . \quad (10b)$$





**Abbildung 4:** Darstellung der nach Gleichung (8) berechneten Kastenlänge gegen die Anzahl der  $\pi$ -Elektronen an der Kohlenstoffkette. Die drei Messpunkte ergeben sich für die drei untersuchten Farbstoffe. Um den Verlauf qualitativ zu beschreiben, wurde eine lineare Regression durchgeführt. Das Ergebnis ist in Gleichung (10) zu finden. Das zugehörige Konfidenzband ist aufgrund der geringen Schwankungen der Messwerte um das Modell kaum sichtbar.

Hierbei fällt auf, dass der y-Achsenabschnitt  $a$  positiv und damit insbesondere ungleich Null ist.  $a$  entspricht dem Fall, dass keine Bindung also kein  $\pi$ -Elektron vorliegt. Die betrachtete Molekülkette besteht also nur aus den zwei Stickstoffmolekülen. Physikalisch interpretiert liefert  $a$  damit also einen Maßstab für die minimale Bindungslänge zweier Stickstoffatome und damit für den Durchmesser eines solchen Moleküls. Diese Vermutung wird durch Vergleich mit dem nominellen Durchmesser eines Stickstoff-Moleküls von  $a_N = 3,14 \text{ \AA}$  (Quelle [3]) bekräftigt. Die Steigung  $b$  der Ausgleichsgeraden ist in Kastenlänge pro Bindung und damit pro  $\pi$ -Elektron gegeben. Damit liefert dieser Wert einen Maßstab für die hinzukommende Kastenlänge pro weiterer C-C-Bindung im Farbstoffmolekül und hat damit die Interpretation einer Bindungslänge der Kohlenstoffatome.

### 3.3 Abhängigkeit der Absorption von der Farbstoffkonzentration

Im letzten Versuchsteil wird beispielhaft an Carbocyaniniodid die Abhängigkeit des Absorptionsgrades von der Farbstoffkonzentration untersucht. Die hierfür erstellte Referenzlösung hat eine Konzentration  $c_0$ . Die erste Messreihe wurde mit  $(3,00 \pm 0,03) \text{ mL}$  der Referenzlösung erstellt. Für alle weiteren Messreihen wurde die Konzentration der Lösung verringert, indem  $(1,000 \pm 0,015) \text{ mL}$  von der sich in der Küvette befindlichen Lösung entnommen und  $(1,000 \pm 0,015) \text{ mL}$  pures Ethanol in die Küvette eingefüllt wurden. Die  $j$ -te Messreihe

weist also eine relative Konzentration

$$c_{j,\text{rel}} = \frac{c_j}{c_0} = \left(\frac{2}{3}\right)^j \quad (11)$$

auf. Es wurden 10 Messreihen mit jeweils 100 Aufnahmen des Spektrums erstellt. Durch Mittelwertbildung innerhalb der einzelnen Messreihen ergeben sich zehn Spektren  $S_j$ . Die Mittelwertbildung erfolgt hierbei analog zu Versuchsteil 1. Der Absorptionsgrad der einzelnen Spektren wird mit Hilfe von [Gleichung \(1\)](#) und dem Referenzspektrum  $S_0$  des Ethanols bestimmt. Die Wellenlänge

$$\lambda_{\text{max}} = 605 \text{ nm} \quad , \quad (12)$$

für die die Absorptionsänderung untersucht werden wird, wird als Wellenlänge des Maximums des Absorptionsspektrums  $S_1$  gewählt, da hier die Absorptionsänderung besonders relevant ist. Die Werte des Absorptionsgrads  $A_j$  für die Wellenlänge  $\lambda_{\text{max}}$  der Spektren  $S_j$  sind in [Tabelle 1](#) aufgelistet. Dort sind auch die relativen Konzentrationen  $c_{j,\text{rel}}$  der für die Spektren verwendeten Proben zu finden.

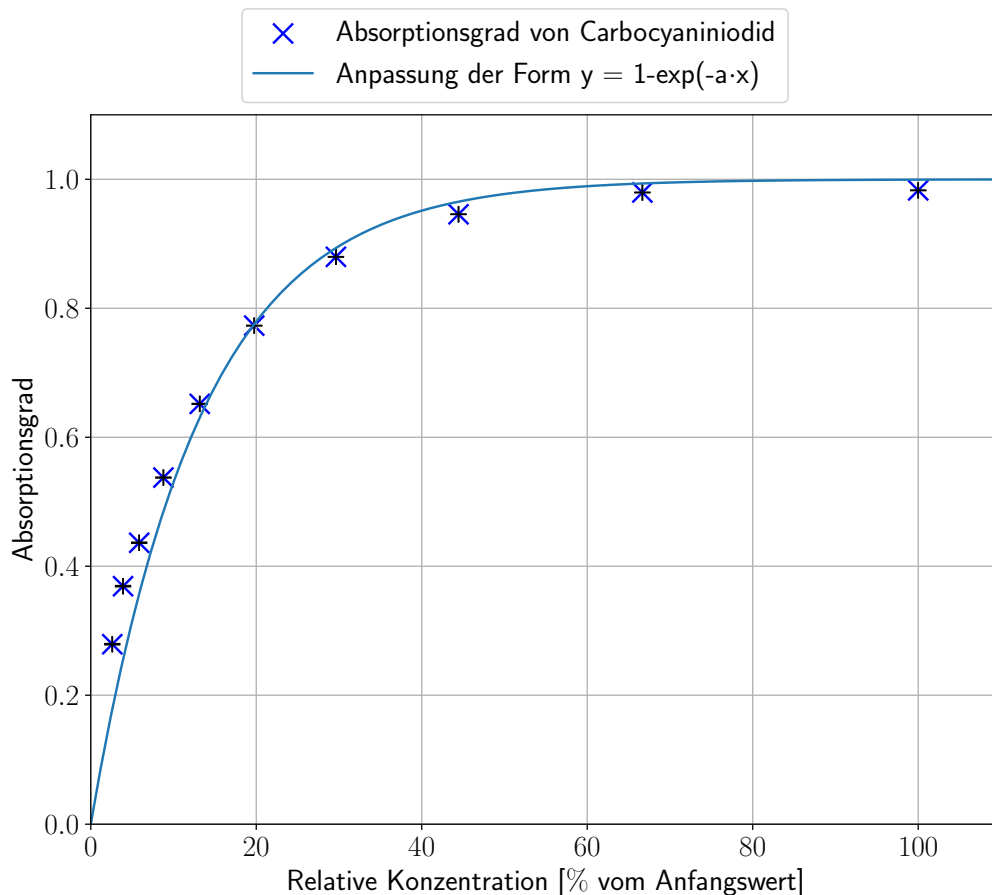
j	$c_{j,\text{rel}}$ [%]	$A_j$	$\Delta A_j$
0	100	0,98284	0,00010
1	66,6	0,97953	0,00012
2	44,4	0,94575	0,00016
3	29,6	0,8798	0,0002
4	19,8	0,7731	0,0003
5	13,2	0,6518	0,0005
6	8,8	0,5375	0,0006
7	5,9	0,4364	0,0007
8	3,9	0,3691	0,0008
9	2,6	0,2791	0,0008

**Tabelle 1:** Dargestellt sind die relativen Konzentrationen  $c_{j,\text{rel}}$  der Messreihen  $j$  und die zugehörigen Absorptionsgrade  $A_j$  für die Wellenlänge  $\lambda_{\text{max}}$ . Die Werte wurden mit [Gleichungen \(1\), \(2\)](#) und [\(11\)](#) berechnet.

In [Abbildung 5](#) ist der Absorptionsgrad gegen die jeweilige Farbstoffkonzentration aufgetragen. Das dargestellte Modell wurde mit dem Ansatz  $y = 1 - \exp^{-ax}$  durch numerische  $\chi^2$ -Minimierung bestimmt.

Es ist erkennbar, dass der Absorptionsgrad bei Wellenlänge  $\lambda_{\text{max}}$  mit steigender Farbstoffkonzentration zunimmt. Diese Zunahme war bei der Datenauswertung auch für die Wellenlängen um  $\lambda_{\text{max}}$  vorhanden. Außerdem ist zu erkennen, dass die Zunahme des Absorptionsgrads mit zunehmender Farbstoffkonzentration geringer wird. Der Absorptionsgrad scheint gegen 1 zu konvergieren. Bei einer Stoffmenge von  $c_{\text{rel}, 1}$  wird nahezu die komplette Intensität des Lichts mit Wellenlänge  $\lambda_{\text{max}}$  von der Farbstofflösung absorbiert.

## Absorptionsgrad von Carbocyaniniodid bei verschiedenen Konzentrationen



**Abbildung 5:** Dargestellt ist der Absorptionsgrad  $A_j$  bei der Wellenlänge  $\lambda_{\max}$  in Abhängigkeit der relativen Farbstoffkonzentration  $c_{j,\text{rel}}$ . Die hierfür verwendeten Werte sind in [Tabelle 1](#) aufgelistet. Die Farbstoffkonzentrationen wurden mit [Gleichung \(11\)](#) bestimmt. Die Absorptionsgrade wurden aus den Absorptionsspektren ermittelt. Dem Modell liegt eine numerische  $\chi^2$ -Minimierung mit  $y = 1 - \exp^{-ax}$  zugrunde, welche in [Gleichung \(13\)](#) beschrieben ist. Die Fehlerbalken des Absorptionsgrades sind in schwarz dargestellt, allerdings kaum sichtbar.

Aus dem Modell ergibt sich

$$A(c_{\text{rel}}) = 1 - e^{-ac_{\text{rel}}} \quad (13)$$

mit

$$a = (7,560 \pm 0,005) . \quad (13a)$$

Das Modell lässt also vermuten, dass es Konzentrationen gibt für den der Farbstoff das Licht bestimmter Wellenlängen nahezu vollständig absorbiert. Da eine beschränkte Zunahme als Verlauf vermutet wird, kann dieser Wert der vollständigen Absorption nie ganz erreicht werden. Dies ist auch physikalisch sinnvoll.

## 4 Diskussion der Ergebnisse

### 4.1 Angabe und Diskussion der Endergebnisse

Ziel des ersten Versuchsteils war die Vermessung der Transmissionsspektren der drei gegebenen Cyaninfarbstoffe. Hierfür wurden für das Referenzspektrum und die Farbstoffe jeweils 100 Spektren aufgenommen und anschließend gemittelt, um die statistischen Schwankungen zu minimieren. Die so berechneten Transmissionsspektren sind in [Abbildung 1](#) zu sehen. Durch die großen Messreihen und die Mittelung, liegen die relativen Unsicherheiten für den relevanten Wellenlängenbereich von 450 nm bis 800 nm nur in einem Bereich von 0,04 % bis 0,54 %. Dabei handelt es sich nur um statistische Unsicherheiten. Da keine Kalibrierung der Messachse der Intensitäten vorgenommen wurde, lässt sich hierfür kein eventueller systematischer Fehler angeben.

Aus der Differenz zum Referenzspektrum lassen sich die Absorptionsspektren der einzelnen Farbstoffe bestimmen. Diese sind im Anhang in [Abbildungen 6 bis 8](#) zu finden. Bei allen drei Farbstoffen sieht man deutlich zwei Maxima, denen die Wellenlängen der maximalen Absorption zugeordnet werden können. Die Haupt- und Nebenmaxima befinden sich dabei jeweils bei

$\lambda_1 = 524 \text{ nm}$	$A_1(\lambda_1) = 75,8 \%$	für Cyaniniodid
$\lambda_{1,n} = 492 \text{ nm}$	$A_{1,n}(\lambda_1) = 62,1 \%$	für Cyaniniodid
$\lambda_2 = 605 \text{ nm}$	$A_2(\lambda_2) = 96,3 \%$	für Carbocyaniniodid
$\lambda_{2,n} = 563 \text{ nm}$	$A_{2,n}(\lambda_2) = 82,1 \%$	für Carbocyaniniodid
$\lambda_3 = 710 \text{ nm}$	$A_3(\lambda_3) = 95,5 \%$	für Dicarboyaniniodid
$\lambda_{3,n} = 653 \text{ nm}$	$A_{3,n}(\lambda_3) = 73,0 \%$	für Dicarboyaniniodid.

Die physikalische Interpretation dieser Maxima soll nun mit dem Teilchen-im-Kasten-Modell erfolgen. Schematische Darstellungen hierzu sind im Anhang in [Abbildungen 9 bis 11](#) zu finden. Indem die Absorption der Photonen als Anregung der Elektronen auf höhere Energieniveaus betrachtet wird, kann ein Modell untersucht werden, in dem die Elektronen im unendlich hohen Potentialkasten auf unterschiedliche Energieniveaus angeregt werden und bei dieser Anregung Photonen spezifischer Wellenlängen absorbieren. Diese Absorptionen entsprechen den im Absorptionsdiagramm betrachteten Maxima. Aus dieser Anschauung kann die Länge eines solchen Potentialkastens bestimmt werden. Für die verschiedenen Farbstoffe ergeben sich diese für Cyaniniodid zu

$$L_1 = 8,9 \text{ \AA} \quad \text{für das Hauptmaximum } (n = 2 \text{ und } m = 3)$$

$$L_{1,n} = 13,4 \text{ \AA} \quad \text{für das Nebenmaximum } (n = 2 \text{ und } m = 4)$$

für Carbocyaniniodid zu

$$L_2 = 11,3 \text{ \AA} \quad \text{für das Hauptmaximum } (n = 3 \text{ und } m = 4)$$

$$L_{2,n} = 16,5 \text{ \AA} \quad \text{für das Nebenmaximum } (n = 3 \text{ und } m = 5)$$

und für Dicarbocyaniniodid zu

$$\begin{array}{ll} L_3 = 13,9 \text{ \AA} & \text{für das Hauptmaximum } (n = 4 \text{ und } m = 5) \\ L_{3,n} = 19,9 \text{ \AA} & \text{für das Nebenmaximum } (n = 4 \text{ und } m = 6) . \end{array}$$

Zuletzt wurde die Abhängigkeit der Absorption von der Konzentration des Farbstoffes im Ethanol untersucht. Dabei fiel auf, dass bereits eine sehr geringe Farbstoffkonzentration eine deutlich sichtbare Auswirkung auf das Spektrum hatte. Dies sieht man auch am Verlauf der Absorptionen in [Abbildung 5](#) gegen die relative Konzentration. Ebenfalls auffällig ist, dass die Absorption relativ schnell in die Nähe des Maximalwerts steigt und sich diesem als Grenzwert annähert. Der Verlauf folgt theoretisch einer  $y = 1 - \exp(-ax)$  Kurve, für die der Parameter  $a$  zu  $a = (7,560 \pm 0,005)$  bestimmt wurde.

## 4.2 Diskussion der verwendeten Messmethoden

Zu Beginn des Versuches wurde eine Lösung des Farbstoffs mit Ethanol hergestellt. Dabei fiel auf, dass sich nicht der komplette Farbstoff löste. Kleine Stückchen setzten sich am Boden der Küvette ab. Dadurch wäre die Farbstoffkonzentration nicht konstant gewesen, sondern hätte mit der Zeit leicht zunehmen können. Diese Fehlerursache wurde behoben, indem daraufhin Farbstoff in den Bechergläsern gemischt wurde. Erst das fertige Gemisch wurde in die Küvetten gefüllt. Außerdem konnte so übriger Farbstoff mit den anderen Praktikumsgruppen geteilt werden.

Das im Messprogramm angezeigte Spektrum unterlag leichten Schwankungen. Nicht nur schwankten die Messwerte einzelner Punkte leicht, was wie oben beschrieben auf statistische Unsicherheiten zurückzuführen ist, sondern auch das gesamte Spektrum hatte leichte Intensitätsschwankungen, wurde also leicht nach oben und unten verschoben. Die Ursache dieser Schwankung wurde nicht genauer untersucht. Möglicherweise handelte es sich um Schwankungen im Netzteil, sodass die Glühbirne mal stärker mal schwächer leuchtete. Möglicherweise folgte die Unsicherheit auch aus der Messung mit dem Spektrometer. Dass ein Verwackeln am Tisch das Spektrum in relevanter Weise beeinflusste, wurde durch ausprobieren ausgeschlossen. Ebenso verhielt es sich mit dem Umgebungslicht. Das Spektrum veränderte sich nicht merklich, wenn das Licht im Praktikumsraum ausgeschaltet wurde.

Die erwähnte statistische Unsicherheit konnte unabhängig von ihrem Ursprung dadurch stark verringert werden, dass pro Messreihe 100 Spektren aufgezeichnet wurden. Die beschriebenen Schwankungen passierten in Zeitintervallen, die viel kürzer als die Messzeit einer Messreihe waren. Durch Mittelwertbildung über die hundert Spektren wurde der Einfluss dieser Unsicherheit auf die Messergebnisse sehr gering.

Neben der gerade beschriebenen statistischen Unsicherheit könnte es auch eine systematische Unsicherheit beim Aufzeichnen der Spektren gegeben haben. Das Spektrometer wurde vor Versuchsbeginn nicht kalibriert. Auf die gemessene Intensität hatte dies wohl kaum einen Einfluss, da diese lediglich in counts gemessen wurde, was einer beliebigen Einheit entspricht. Die zugehörigen Wellenlängen wären aber sehr wohl durch eine ungenaue Kalibrierung verfälscht. Sind Spektrometer oder Messprogramm falsch eingestellt, so kommt es zu einer Verschiebung des Spektrums entlang der Wellenlänge.

Das im zweiten Versuchsteil verwendete Teilchen-im-Kasten-Modell ist eine starke Vereinfachung eines komplexen chemischen und physikalischen Zusammenhangs. Die Annahme ist, dass sich mehrere Elektronen in einem Potentialkasten bewegen, welcher außerhalb des Kastens ein unendlich hohes, innerhalb des Kastens ein konstantes Potential hat. Abgesehen davon, dass, wenn man die untersuchten chemischen Elemente betrachtet, nicht einmal eindeutig ist, wie viele Elektronen genau an diesem Prozess beteiligt sind, hat der Bereich in dem sich die Elektronen bewegen auch keine scharf begrenzte Kastengrenze, bei der das Potential sprunghaft ins Unendliche ansteigt. Außerdem gilt zu beachten, dass das Potential in der Kohlenstoffkette, die durch den Kasten modelliert wird, wohl kaum konstant sein wird. Das Potential in der unmittelbaren Umgebung der Atomkerne ist wohl geringer als in den Bereichen dazwischen. Schon anhand dieser kurzen Ausführung wird deutlich, dass das betrachtete Problem viel zu komplex ist, um durch ein Teilchen-im-Kasten-Modell mit unendlich hohen Randpotentialen in guter Exaktheit beschrieben zu werden. Die berechneten Kastenlängen stellen also eine Art Abschätzung dar und dienen dem grundlegenden Verständnis der Zusammenhänge, die zu den beobachteten Absorptionsspektren führen.

Die Unsicherheit der Kolbenhubpipette beeinflusst die relative Konzentration der Carbocyaniniodid-Lösung im letzten Versuchsteil. Da die Anpassung des Volumens rekursiv vorgenommen wurde, war eine exakte Quantifizierung dieser Unsicherheit nur schwer möglich. Zudem sind hier eventuelle Rückstände in der Pipette oder in der Küvette zu berücksichtigen, die Einfluss auf die Konzentration haben könnten. Diese Angaben sind also vergleichsweise fehleranfällig.

### 4.3 Verbesserte Messmethoden

Um einen systematischen Fehler des Spektrometers zu vermeiden, sollte dieses vor Erstellung der Messreihen kalibriert werden. Hierzu bietet es sich an, ein Spektrum des Sonnenlichts zu messen. Das Sonnenlicht hat einige charakteristische Absorptionslinien über einen großen Wellenlängenbereich. Die hierfür gemessenen Wellenlängen können mit den genau bestimmten Literaturwerten verglichen werden, um zu überprüfen, ob das Spektrometer Wellenlängen korrekt misst. Diese Kalibrierung erfordert wenig Zeit und gibt den Messergebnissen zusätzliche Sicherheit.

Bezüglich der Bauteile auf der optischen Bank, hätte die Kollimation des einfallenden Lichts durch die Linse nochmals genauer überprüft und justiert werden können. Zwar wurde hier kurz mit einem Blatt Papier die Aufweitung des Strahls untersucht, allerdings war die Brennweite der Linse nicht bekannt und auf der optischen Bank keine Skala angebracht. Wäre dies der Fall gewesen, so könnte man das Licht noch genauer kollimieren.

Auch die Interpretation des Teilchen-im-Kasten Modells könnte verbessert werden. Zum einen wäre es hier sinnvoll mehr Absorptionsmaxima der Farbstoffe zu messen, um genauere Ergebnisse für die Kastenlängen zu erhalten. Dies könnte erreicht werden, indem eine Lichtquelle mit größerem Spektrum im UV-Bereich verwendet wird. So könnten höhere Anregungen untersucht werden. Des weiteren war es im vorliegenden Modell uneindeutig, welche Anregungen tatsächlich stattfanden, da sich die Ergebnisse der Kastenlängen ver-

schiedener Maxima unterschieden und auch die Anzahl der  $\pi$ -Elektronen kann anhand der Bindungen oder aber anhand der vorliegenden C-Atome bestimmt werden. Um das Modell zu verbessern, wäre es also möglich die Ergebnisse von verschiedenen möglichen Elektronenzahlen und Anregungen zu vergleichen und zu diskutieren, welches Ergebnis am plausibelsten erscheint.

Des Weiteren würde hier auch ein anderes, komplexeres Modell eine bessere Beschreibung der Ergebnisse liefern, da beispielsweise nur näherungsweise von einem unendlichen Potentialtopf ausgegangen werden kann und das Teilchen-im-Kasten-Modell stark vereinfacht ist. Hierbei ist jedoch zu bedenken, dass dadurch die physikalische Interpretation der Ergebnisse erheblich komplizierter werden würde.

Eine weitere Unsicherheit des Versuchs, gerade für Teil 3 kam durch das Bestimmen und Variieren der Konzentration der Farbstoffe im Ethanol zustande. Diese könnte unter anderem durch die Bestimmung einer absoluten anstelle einer relativen Konzentration verbessert werden. Hierfür könnte durch abwiegen der verwendeten Farbstoffmasse sowie durch bestimmen des Volumens des jeweils verwendeten Ethanols in der Lösung auf die exakte Konzentration geschlossen werden. Dies würde zum einen eine präzisere Variation der Konzentration in Versuchsteil 3 ermöglichen und daher einen genaueren Verlauf der Absorptionsgrade abhängig von der Konzentration ermöglichen. Dadurch könnte noch besser überprüft werden, ob der Verlauf geeignet durch eine Anpassung der Form  $A = 1 - \exp(-ac)$  beschrieben wird. Zudem könnte dadurch der absolute Absorptionsgrad des Farbstoffes bestimmt werden.

Zur Variation der Konzentrationen wurde außerdem stets etwas Lösung aus der Küvette genommen und dafür Ethanol zur Verdünnung hinzugegeben, wobei jede Entnahme und Hinzugabe von Flüssigkeit zu einer Unsicherheit führt. Diese Unsicherheit könnte dadurch verringert werden, dass man lediglich in einem der Bechergläser die Anfangskonzentration durch Ethanol hätte verdünnen und dann jedes Mal einen Teil dieser verdünnten Lösung in die Küvette hätte geben können. So wäre bei jeder Konzentrationsveränderung nur die Unsicherheit des beim Hinzugeben des Ethanols zu berücksichtigen, was ein Bestimmen der Unsicherheit der relativen Konzentration erleichtert hätte.

Zusätzlich ist beim Mischen der Konzentrationen zu berücksichtigen, dass kleine Rückstände der Lösung in der Pipette als auch in der Küvette zu Unsicherheiten beim Bestimmen der relativen Konzentration führten, welche durch ein Säubern dieser Gefäße nach jeder Verwendung hätten verringert werden können, was aber ein großer Aufwand bei diesem kleinen Beitrag zur Gesamtunsicherheit wäre.

## A Anhang

### Abbildungsverzeichnis

1	Transmissionsspektren der Farbstoffe . . . . .	4
2	Molekularer Aufbau der Farbstoffe . . . . .	6
3	Darstellung eines Potentialkastens . . . . .	7
4	Zusammenhang von Kastenlänge und Anzahl der $\pi$ -Elektronen . . . . .	9
5	Absorptionsgrad in Abhängigkeit der Farbstoffkonzentration . . . . .	11
6	Absorptionsspektrum Cyaniniodid . . . . .	17
7	Absorptionsspektrum Carbocyaniniodid . . . . .	17
8	Absorptionsspektrum Dicarbocyaniniodid . . . . .	18
9	Potentialkasten für Cyaniniodid . . . . .	19
10	Potentialkasten für Carbocyaniniodid . . . . .	19
11	Potentialkasten für Dicarbocyaniniodid . . . . .	20
12	Messprotokoll Seite 1 . . . . .	21
13	Messprotokoll Seite 2 . . . . .	22

### Tabellenverzeichnis

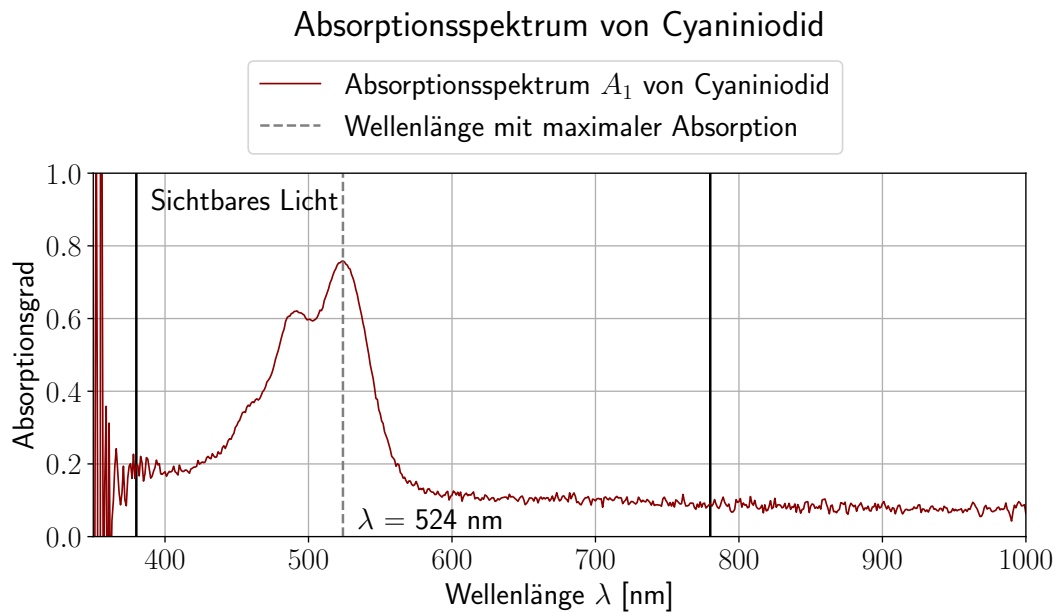
1	relative Konzentration und Absorptionsgrad . . . . .	10
---	--	----

### Literaturverzeichnis

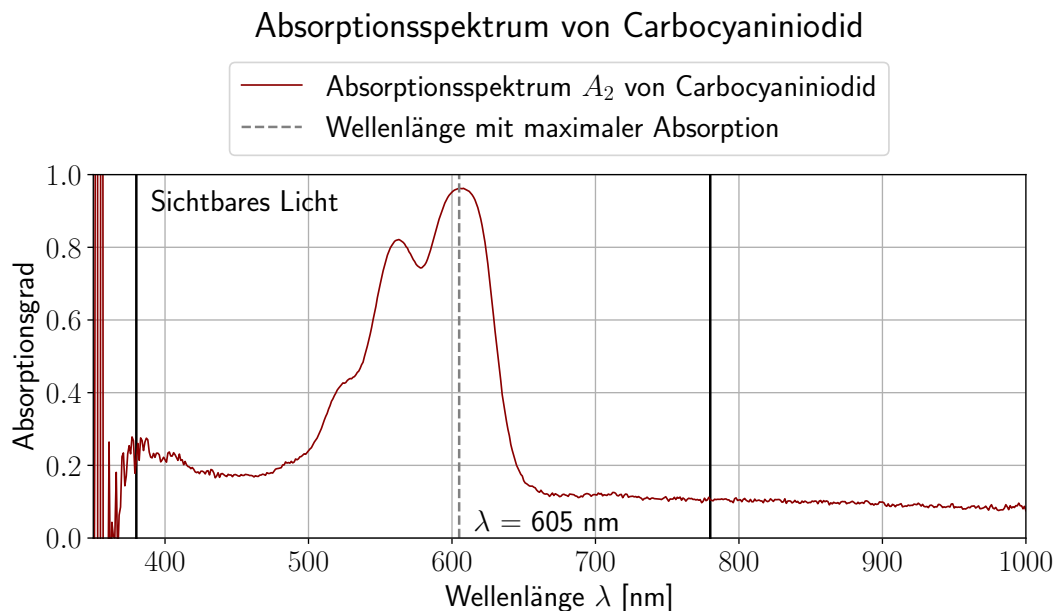
- [1] *Physiklabor für Anfänger\*innen Teil 2, Datenanalyse A* (Physikalisches Institut, Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2022, 9. März 2022).
- [2] *Physiklabor für Anfänger\*innen Teil 2, Anleitung Versuch 78, Farbstoffe* (Physikalisches Institut, Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2022, 9. März 2022).
- [3] Hans Christoph Wolf & Hermann Haken, (2006) *Mechanische Eigenschaften von Molekülen, Größe, Masse*. In: *Molekülphysik und Quantenchemie*. (Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, Heidelberg, 10. März 2022), [https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-30315-4\\_2?noAccess=true](https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-30315-4_2?noAccess=true).
- [4] *Physiklabor für Anfänger\*innen Teil 2, Aufbau Versuch 78* (Physikalisches Institut, Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2022, 9. März 2022), <https://omnibus.uni-freiburg.de/~phypra/ap/78/>.
- [5] *Physiklabor für Anfänger\*innen Teil 2, Datenanalyse B* (Physikalisches Institut, Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2022, 9. März 2022).



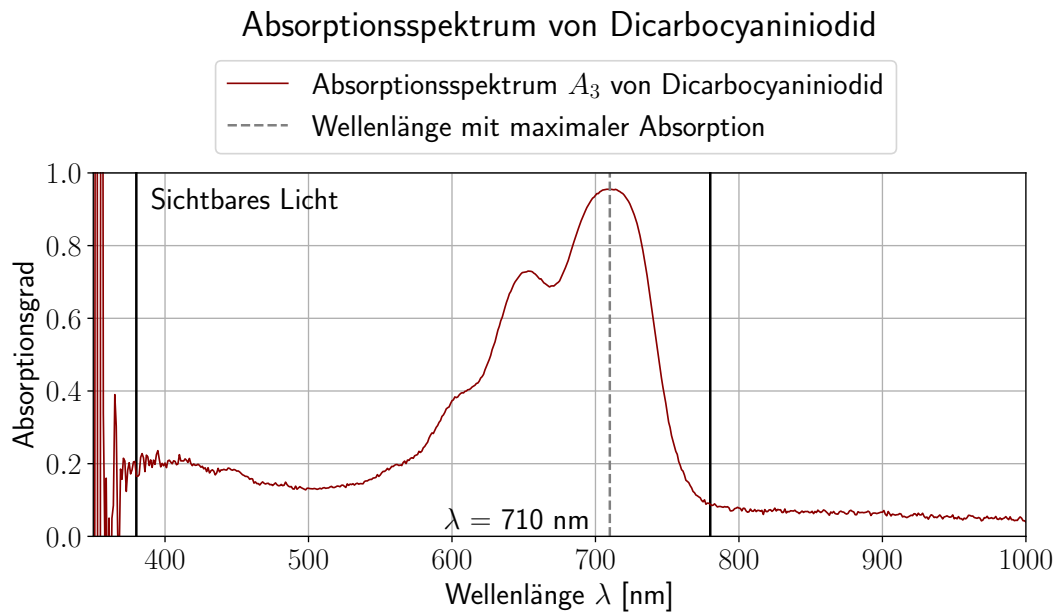
## A.1 Transmissionsspektren der einzelnen Farbstoffe



**Abbildung 6:** Dargestellt ist das Absorptionsspektrum des roten Farbstoffs Cyaniniodid mitsamt der Wellenlänge  $\lambda_1$  bei dem die Absorption maximal ist. Die Absorptionsgrade wurden dabei nach Gleichung (1) mit Hilfe der Werte des Transmissionsspektrums des Farbstoffes sowie des Referenzspektrums berechnet.

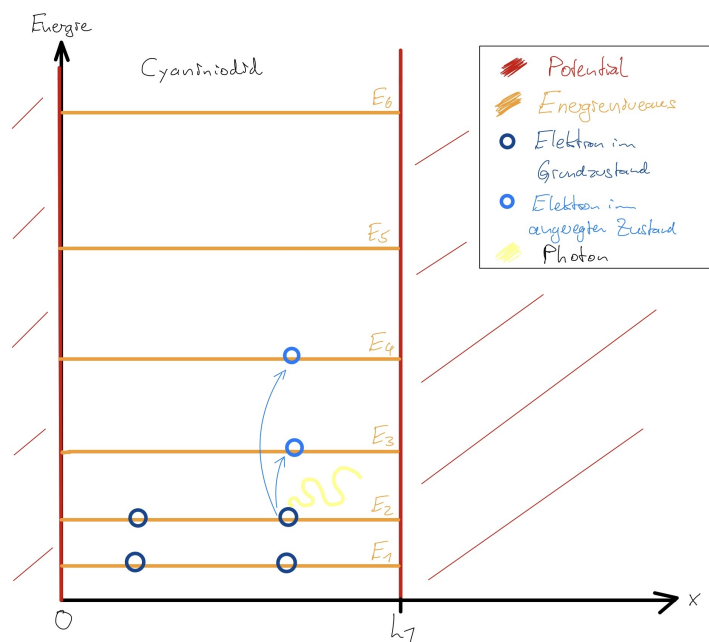


**Abbildung 7:** Dargestellt ist das Absorptionsspektrum des dunkelblauen Farbstoffs Carbocyaniniodid mitsamt der Wellenlänge  $\lambda_2$  bei dem die Absorption maximal ist. Die Absorptionsgrade wurden dabei nach Gleichung (1) mit Hilfe der Werte des Transmissionsspektrums des Farbstoffes sowie des Referenzspektrums berechnet.

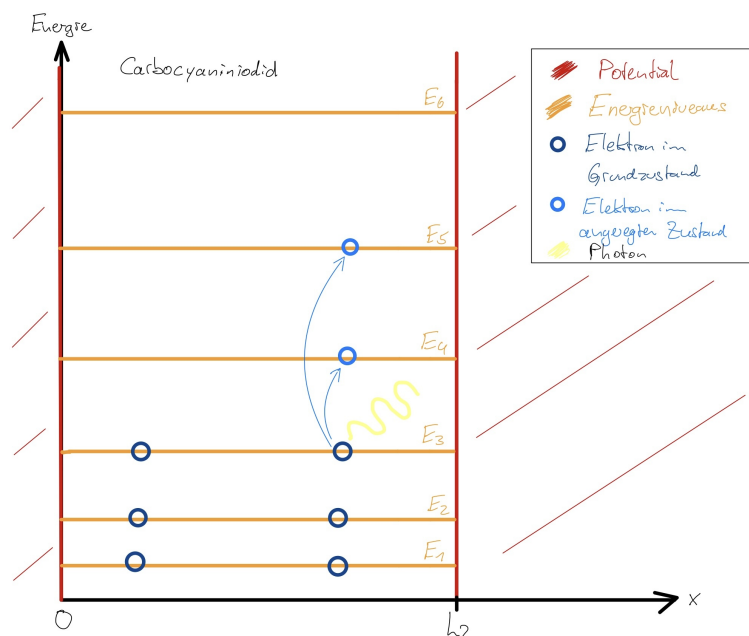


**Abbildung 8:** Dargestellt ist das Absorptionsspektrum des türkisen Farbstoffs Dicarboocyaniniodid mitsamt der Wellenlänge  $\lambda_3$  bei dem die Absorption maximal ist. Die Absorptionsgrade wurden dabei nach [Gleichung \(1\)](#) mit Hilfe der Werte des Transmissionsspektrums des Farbstoffes sowie des Referenzspektrums berechnet.

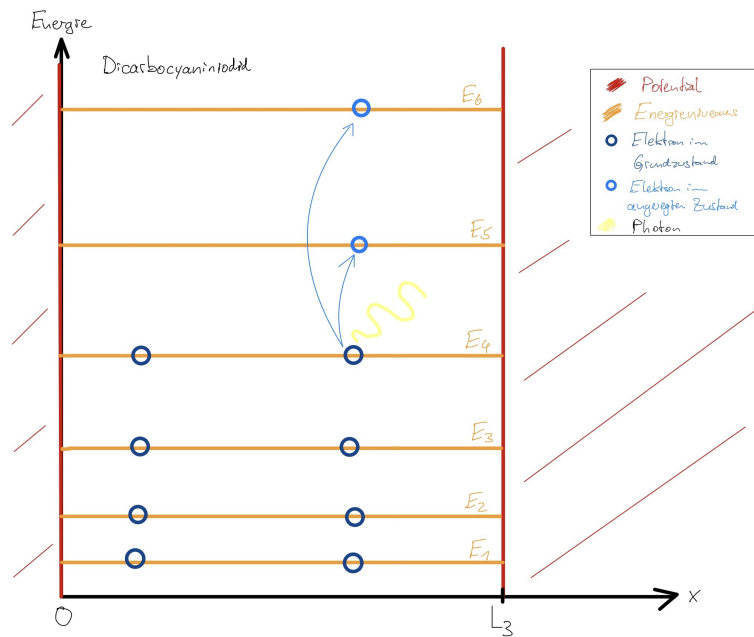
## A.2 Schematische Darstellung der Potentialkästen



**Abbildung 9:** Schematische Darstellung des Potentialkastens für Cyaniodid mit 4 freien  $\pi$ -Elektronen, die nach dem Pauli-Prinzip und aus energetischen Gründen auf den beiden unteren Energieniveaus verteilt sind.



**Abbildung 10:** Schematische Darstellung des Potentialkastens für Carbocyaniodid mit 6 freien  $\pi$ -Elektronen, die nach dem Pauli-Prinzip und aus energetischen Gründen auf den drei unteren Energieniveaus verteilt sind.



**Abbildung 11:** Schematische Darstellung des Potentialkastens für Dicyanobenzol mit 8 freien  $\pi$ -Elektronen, die nach dem Pauli-Prinzip und aus energetischen Gründen auf den vier unteren Energieniveaus verteilt sind.

## A.3 Messprotokoll

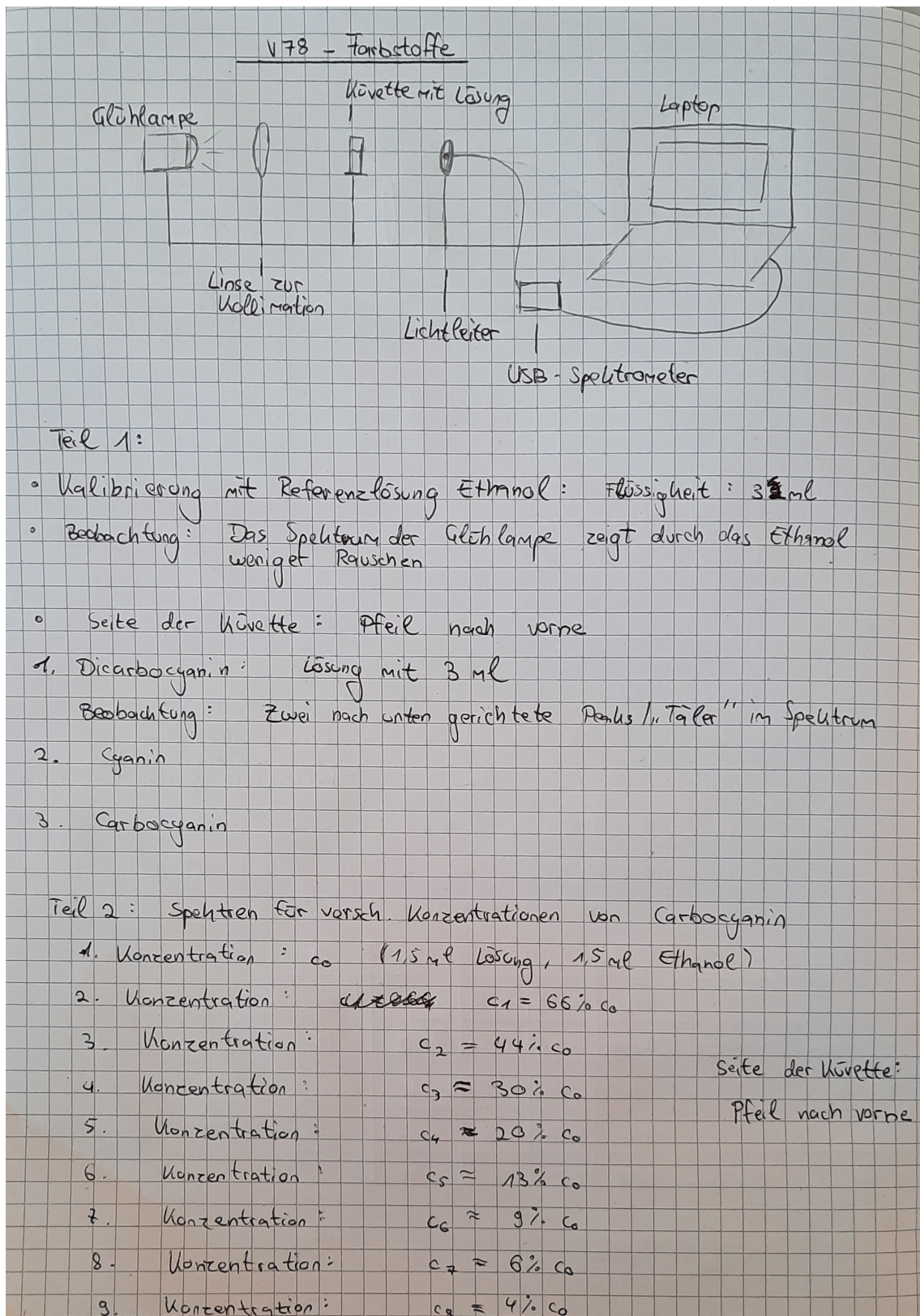


Abbildung 12: Messprotokoll Seite 1

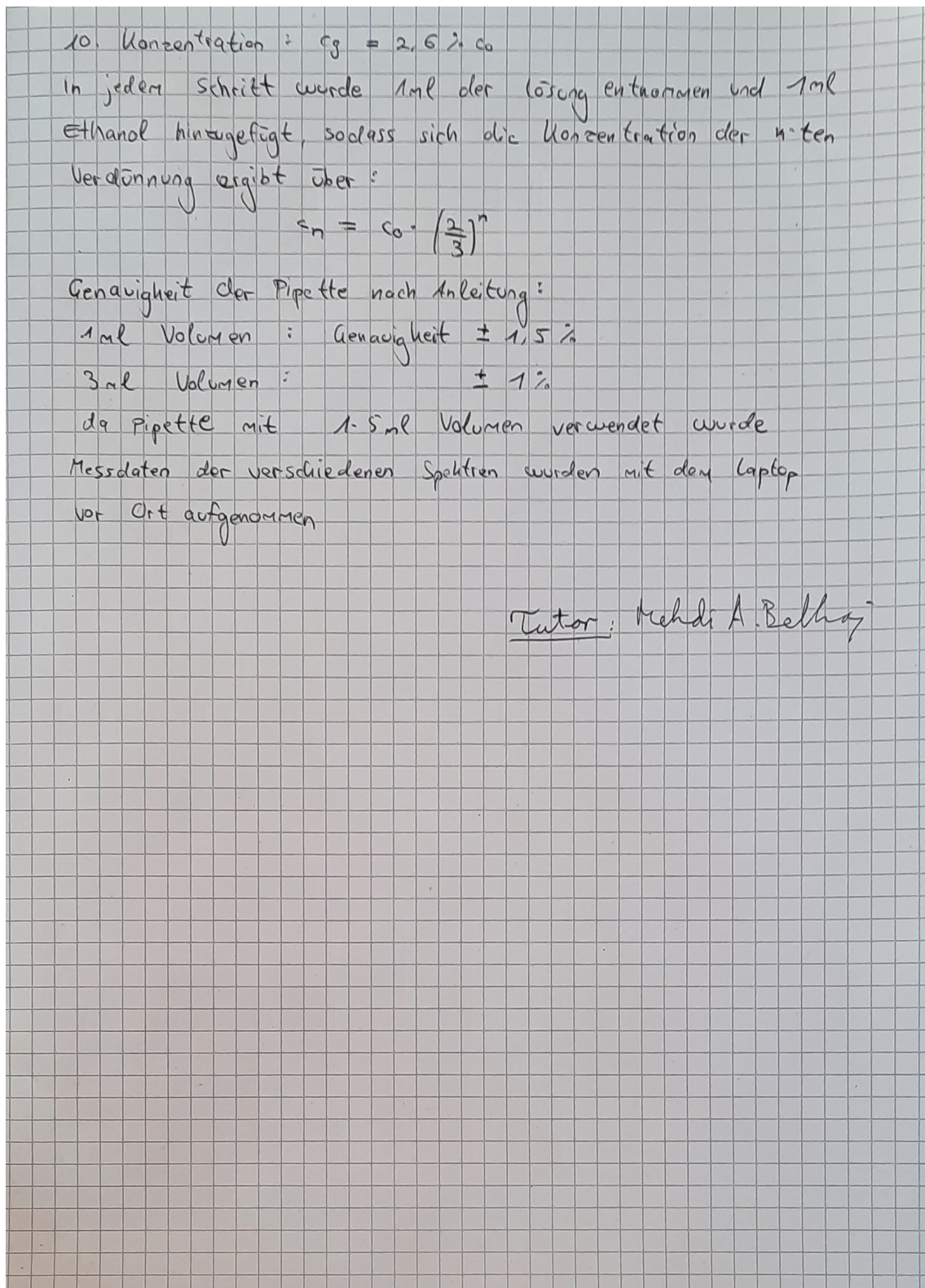


Abbildung 13: Messprotokoll Seite 2