

Universität Freiburg
Physiklabor für Anfänger
Ferienpraktikum im Sommersemester 2023

Versuch 70

Linsen



7. November 2024

Datum der Durchführung: 2. Oktober 2023

Tutor



Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuches	3
2	Versuchsdurchführung	3
3	Auswertung und Fehleranalyse	4
3.1	Abbildungsgleichung	4
3.2	Brennweite mittels Autokollimation	5
3.3	Brennweite und Hauptebenen mittels Abbe-Verfahren	7
4	Diskussion der Ergebnisse	9
4.1	Übersichtliche Angabe der Endergebnisse	9
4.2	Vergleich mit den erwarteten Werten	10
4.3	Verbesserte Methoden	11
5	Anhang	12
5.1	Darstellung von $\frac{1}{b}$ gegen $\frac{1}{g}$ aus Abschnitt 3.1	12
5.2	Rohdaten mit Vortestat	13
	Literatur	13

1 Ziel des Versuches

Ziel des Versuches ist es, die Abbildungsgleichung experimentell zu überprüfen, sowie die Brennweiten einer Sammellinse und eines Linsensystems mit dem Autokollimationsverfahren zu bestimmen. Darüber hinaus sollen für das Linsensystem, die Brennweite und die Lage der Hauptebenen mit dem Abbe-Verfahren ermittelt werden.

2 Versuchsdurchführung

In Abb. 1 ist der Aufbau des Versuches skizziert. Zu sehen sind, von links, eine Lichtquelle, eine Kondensorlinse, ein Gegenstandshalter mit Dia, ein Linsenhalter mit Sammellinse und ein Schirm. Die Lichtquelle ist eine mit einem Netzgerät verbundene Leuchtdiode. Mit der Kondensorlinse wird möglichst viel Licht in den abbildenden Strahlengang gebracht. Hinter der Kondensorlinse trifft das Licht auf den Gegenstand, in diesem Fall ein Dia mit konzentrischen Kreisen. Anschließend fällt das Licht durch die im Linsenhalter befestigten Linsen und es entsteht ein Bild auf dem Schirm. Bei diesem Versuch werden die Sammellinsen 1 und 2 mit Brennweiten $f_1^* = 80\text{mm}$ und $f_2^* = 150\text{mm}$ verwendet. Es kann entweder nur eine oder beide Linsen in dem Linsenhalter befestigt werden. Die beschriebenen Komponenten sind auf einer optischen Bank montiert und können verschoben werden. Mit einer Messskala auf der optischen Bank, kann die Position x der jeweiligen Komponenten bestimmt werden. Mit den gemessenen Positionen kann anschließend auf die Gegenstandsweite g und Bildweite b geschlossen werden. Der hier skizzierte Aufbau wird

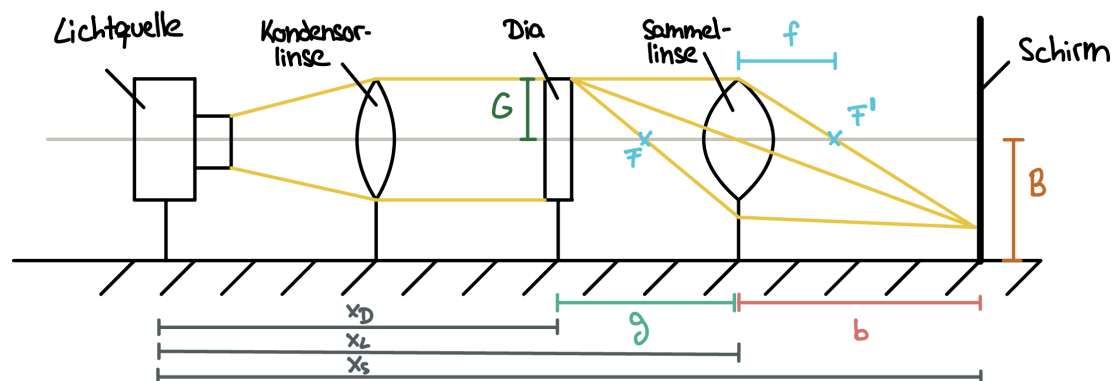


Abbildung 1: Versuchsaufbau mit Gegenstandsgröße G , Bildgröße B , Gegenstandsweite g , Bildweite b , Positionen x_D , x_L , x_S der jeweiligen Komponenten sowie den Brennpunkten F und F' mit Brennweite f .

für die Überprüfung der Abbildungsgleichung sowie für das Abbe-Verfahren verwendet. Für die Bestimmung der Brennweite mittels Autokollimation wird ein leicht abgeänderter Versuchsaufbau verwendet. Dieser wird in Abschnitt 3.2 genauer beschrieben.

3 Auswertung und Fehleranalyse

3.1 Abbildungsgleichung

Für die in Abb. 1 skizzierte optische Abbildung gilt die Abbildungsformel¹:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (1)$$

Um die Abbildungsgleichung zu überprüfen, werden Bildweite b und Gegenstandsweite g so variiert sodass vergrößerte und verkleinerte Bilder entstehen. Es wird die Sammellinse beziehungsweise das Linsensystem jeweils in ein Zentimeter Schritten von dem Dia entfernt. Für jede Einstellung wird dann der Schirm so positioniert, dass ein scharfes Bild entsteht. Die Gegenstandsweite g kann mit der Formel

$$g = x_L - x_D$$

berechnet werden und die Unsicherheit mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta g = \sqrt{(\Delta x_L)^2 + (\Delta x_D)^2} = 1,2\text{mm}$$

Die Unsicherheit für die Position x_L der Linse und die Position x_D des Dias folgt aus der Genauigkeit mit der die Position eingestellt und abgelesen werden kann. Die Unsicherheit wird jeweils mit der Dreiecksverteilung und $a_L = a_D = 2\text{mm}$ berechnet.

Für die Bildweite b ergibt sich

$$b = x_S - x_L$$

und

$$\Delta b = \sqrt{(\Delta x_S)^2 + (\Delta x_L)^2} = 1,5\text{mm}.$$

Die Unsicherheit für die Position x_S des Schirms begründet sich in der Genauigkeit mit der man den Schirm positionieren kann, sodass ein scharfes Bild entsteht. Diese Unsicherheit wird mit $a_S = 3\text{mm}$ und einer Dreiecksverteilung genauer quantifiziert. In Abb. 2 ist der reziproke Wert der Bildweite b gegen den reziproken Wert der Gegenstandsweite g für die Sammellinse 1 dargestellt. Der Fehlerbalken für $\frac{1}{g}$ wird mit der Formel

$$\Delta \frac{1}{g} = \frac{1}{g^2} \Delta g$$

bestimmt. Für $\frac{1}{b}$ wird analog vorgegangen. Teilweise ist der Fehlerbalken so gering, dass dieser im blauen Messpunkt verschwindet. In Abb. 2 ist ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden Größen zu erkennen. Das entspricht der Erwartung, da aus Gleichung (1) umgestellt nach $\frac{1}{b}$ ebenfalls eine lineare Abhängigkeit zwischen $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{g}$ ersichtlich ist. Die eingezeichnete Ausgleichsgerade wird mittels linearer Regression bestimmt. Ebenfalls eingezeichnet in hell orange sind mögliche Abweichungen der Ausgleichsgerade.

¹[Wol14]

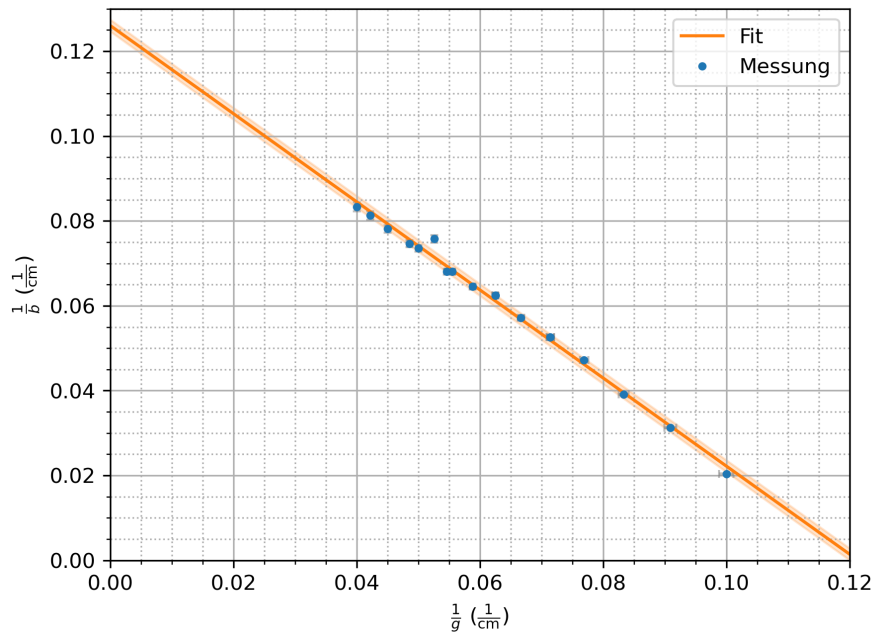


Abbildung 2: Darstellung des linearen Zusammenhangs zwischen der reziproken Gegenstandsweite $\frac{1}{g}$ und der Reziproken Bildweite $\frac{1}{b}$ für die Sammellinse 1.

Der y-Achsenabschnitt der Ausgleichsgerade entspricht dem reziproken Wert der Brennweite. Damit folgt für den experimentell bestimmten Wert für die Brennweite f_1 der Sammellinse

$$f_1 = (79,3 \pm 0,9) \text{ mm.}$$

Für die Linsenkomination werden die Positionen der Komponenten für ein scharfes Bild auf die selbe Weise bestimmt und vermessen. Die Messwerte sind in Abb. 6, zu besseren Lesbarkeit des Protokolls im Anhang, dargestellt. Analog zu der Brennweite der Sammellinse kann die Brennweite des Linsensystems bestimmt werden. Es ergibt sich

$$f_{ges} = (62,8 \pm 0,6) \text{ mm.}$$

3.2 Brennweite mittels Autokollimation

Zur Brennweitenmessung mit dem Autokollimation wird der in Abb. 3 skizzierte Aufbau verwendet. Das Licht von der Lichtquelle trifft auf das Dia, anschließend auf die Linse und wird dann am Spiegel reflektiert. Befindet sich der Gegenstandhalter inklusive Dia genau im Brennpunkt so wird jeder vom Dia ausgehende Lichtstrahl an der Linse zu einem Parallelstrahl. Das durch den Spiegel entstehende Reflexionsbild des Dias in der Gegenstandsebene liegt dann genau auf den eigentlichen Kreisen des Dias. Zur Bestimmung der Brennweite wird das Dia solange verschoben bis die beiden Bilder übereinander

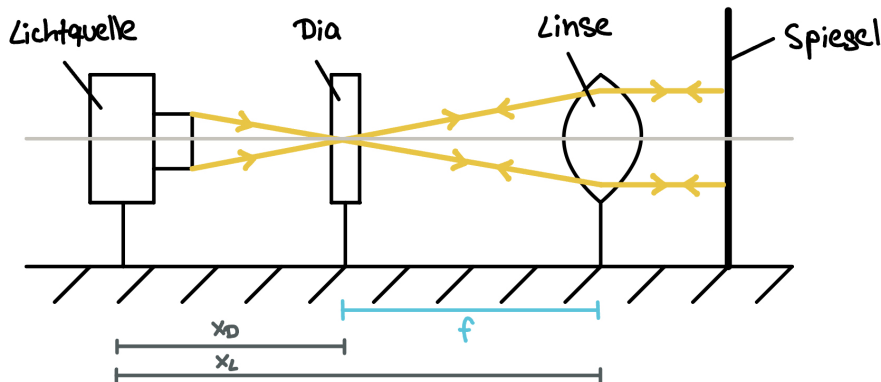


Abbildung 3: Versuchsaufbau und Strahlengang für die Bestimmung der Brennweite f mittels Autokollimationsverfahren

liegen. Die Brennweite entspricht dann genau dem Abstand zwischen der Position x_D des Dias und der Position x_L der Linse:

$$f = x_L - x_D$$

Die Unsicherheit für die Brennweite folgt aus den Unsicherheiten für die Positionen von Dia und Linse. Die Position des Dias, sodass die Bilder übereinander liegen, kann mit einer dreiecksverteilten Unsicherheit von $\Delta x_D = \frac{3}{\sqrt{6}} = 1,2\text{mm}$ eingestellt werden. Die Bestimmung der Position der Linse ist mit einer dreiecksverteilten Unsicherheit von $\Delta x_L = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,4\text{mm}$ behaftet, welche aus der Ablesungenauigkeit bei der Messung mit der Messskala folgt. Der Fehler für die Linse kann anschließend mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung mit der Formel

$$\Delta f = \sqrt{(\Delta x_L)^2 + (\Delta x_D)^2} = 1,3\text{mm}$$

berechnet werden. Der Fehler in der Bestimmung der Position des Dias ist dabei dominierend. Die Messungen werden für die Sammellinse, das Linsensystem und bei gedrehtem Linsensystem durchgeführt. Als Ergebnis für die Brennweite f_1 erhält man

$$f_1 = (83,0 \pm 1,3)\text{mm}.$$

Für den gedrehten Linsenshalter ergibt sich

$$f_{1_g} = (80,0 \pm 1,3)\text{mm}.$$

Für das Linsensystem ergibt sich

$$f_{ges} = (54,0 \pm 1,3)\text{mm}$$

sowie bei gedrehtem Linsenshalter

$$f_{ges_g} = (59,3 \pm 1,3)\text{mm}.$$

3.3 Brennweite und Hauptebenen mittels Abbe-Verfahren

Mit dem Abbe-Verfahren soll die Brennweite sowie die Lage der Hauptebenen für die Linsenkombination bestimmt werden. Um eine der beiden wichtigen Formeln für das Abbe-Verfahren herzuleiten wird die Abbildungsgleichung (Formel 1) mit f und g multipliziert. Man erhält

$$g = f \left(1 + \frac{g}{b} \right).$$

Mit der Formel² $\frac{g}{b} = \frac{G}{B}$ kommt man für die Gegenstandsweite g auf folgende Form:

$$g = f \left(1 + \frac{G}{B} \right).$$

Analoges vorgehen für die Bildweite b führt zu:

$$b = f \left(1 + \frac{B}{G} \right)$$

Da die Hauptebenen noch nicht bekannt sind können die Größen b und g nicht gemessen werden. Deshalb werden zwei neue Größen b' und g' eingeführt welche die Entfernung zu einem beliebigem Referenzpunkt R bezeichnet. Bei diesem Versuch wird als Referenzpunkt R die Position von Linse 1 genommen. In Abb. 5 sind die genannten Größen nochmals dargestellt. Für die beiden Größen b' und g' erhält man

$$b' = b + h' = f \left(1 + \frac{B}{G} \right) + h' \quad (2)$$

und

$$g' = g + h = f \left(1 + \frac{G}{B} \right) + h \quad (3)$$

Die Größe h ist dabei die Entfernung zwischen der gegenstandsseitigen Hauptebene H und dem Referenzpunkt R . Folglich ist h' der Abstand zwischen der bildseitigen Hauptebene H' und R . Um mit diesen Gleichungen die Brennweite f und die Größen h und h' zu bestimmen wird analog zu Abschnitt 3.1 vorgegangen. In diesem Fall wird aus den Positionen von Linse und Schirm auf die Größen g' und b' geschlossen. Zusätzlich wird auf dem Schirm das vergrößerte oder verkleinerte Bild des Dias vermessen. Es wird dabei der Durchmesser, entspricht der Bildgröße B , des größten Kreises mit Millimeter Papier abgelesen. Die dreiecksverteilte Unsicherheit bedingt durch die Ableseungenauigkeit ergibt sich zu

$$\Delta B = 0,4 \text{ mm.}$$

Auch der Durchmesser des größten Kreises auf dem Dia wird gemessen. Dies entspricht der Gegenstandsgröße G . Die Unsicherheit für die Messung, mit einem Lineal, wird mit der Dreiecksverteilung ($a_D = 1 \text{ mm}$) berechnet. Es folgt:

$$G = (21,0 \pm 0,4) \text{ mm}$$

In Abb. 4 ist die Bildweite b' in Abhängigkeit von $1 + \frac{B}{G}$ beziehungsweise g' in Abhängigkeit von $1 + \frac{G}{B}$ dargestellt. Mithilfe von Gleichung (2) und Gleichung (3) kann man

²[Wol14]

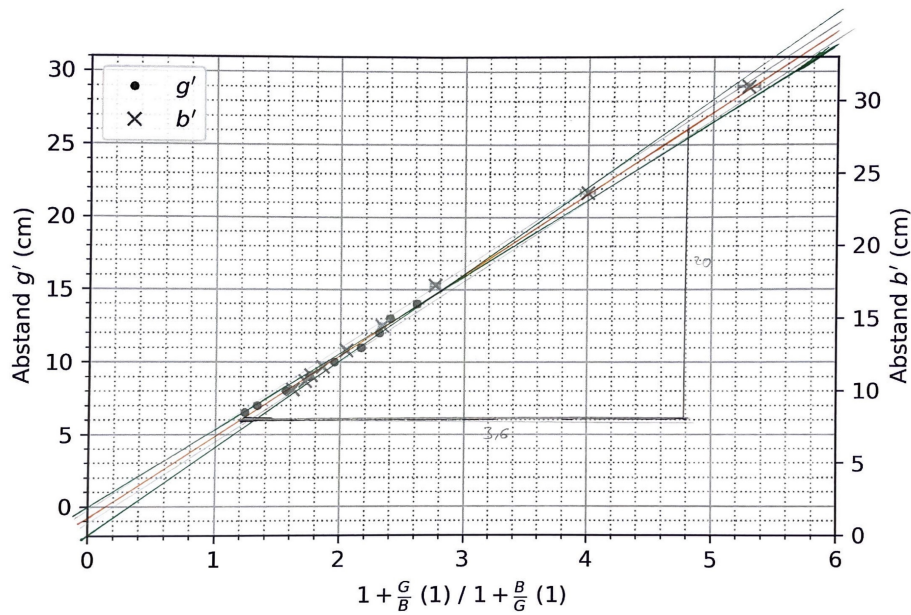


Abbildung 4: Diagramm der Ergebnisse des Abbe-Verfahrens.

aus Abb. 4 die Werte für

$$f = (55 \pm 4)\text{mm},$$

$$h' = (11 \pm 5)\text{mm}$$

und

$$h = (-8 \pm 5)\text{mm}$$

ablesen. Diese ergeben sich je aus dem y-Achsenabschnitt (h und h') und aus der Steigung (f). Für die Auswertung werden die Werte für g' im Verhältnis zu b' leicht nach oben verschoben, sodass eine einheitliche Ausgleichsgerade gezogen werden kann. Die Fehler auf die Angaben ergeben sich ebenfalls aus den eingezeichneten Grenzgeraden. Die erhaltenen Größen f , h und h' werden in Abb. 5 maßstabsgetreu dargestellt. Es ist jedoch nicht die ganze Skizze maßstabsgetreu gezeichnet sodass, zur Übersichtlichkeit, auch das Dia und der Schirm hinzugefügt werden kann.

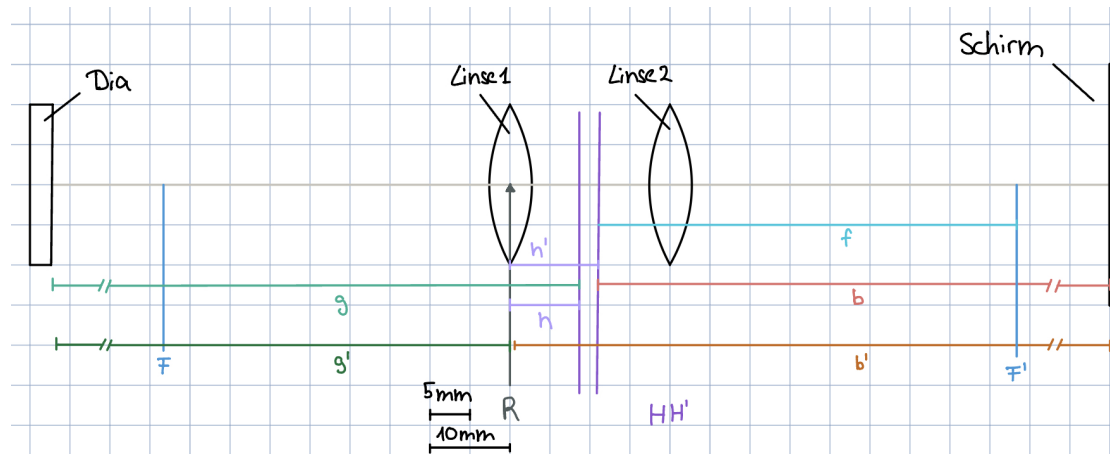


Abbildung 5: Skizze des Linsensystems mit Brennweite f und Hauptebenen H und H' sowie deren Abstand h und h' zum Referenzpunkt R . Die Längen g , g' , b , b' sowie die Lage von Dia und Schirm sind hierbei nicht Maßstabsgetreu gezeichnet.

4 Diskussion der Ergebnisse

4.1 Übersichtliche Angabe der Endergebnisse

Für die Sammellinse 1 kommen folgende Ergebnisse zustande:

- Mit der Abbildungsgleichung folgt

$$f_1 = (79,3 \pm 0,9) \text{ mm.}$$

- Mit dem Autokollimationsverfahren folgt

$$f_1 = (83,0 \pm 1,3) \text{ mm}$$

und für den gedrehten Linsenhalter ergibt sich

$$f_{1_g} = (80,0 \pm 1,3) \text{ mm.}$$

Für die Linsenkombination folgt äquivalent:

- Mit der Abbildungsgleichung

$$f_{ges} = (62,8 \pm 0,6) \text{ mm.}$$

- Mit der Autokollimation ergibt sich für das Linsensystem

$$f_{ges} = (54,0 \pm 1,3) \text{ mm,}$$

sowie bei gedrehtem Linsenhalter

$$f_{ges_g} = (59,3 \pm 1,3) \text{ mm.}$$

Mit dem Abbe-Verfahren folgt schließlich:

- $f_{ges} = (55 \pm 4)\text{mm}$
- $h' = (11 \pm 5)\text{mm}$
- $h = (-8 \pm 5)\text{mm}$

4.2 Vergleich mit den erwarteten Werten

- **Sammellinse 1:** Bei den Messungen mit der Sammellinse 1 ist eine Brennweite $f_1^* = 80\text{mm}$ zu erwarten. Für die Bestimmung der Brennweite f_1 über die Abbildungsgleichung passt der gemessene Wert $f_1 = (79,3 \pm 0,9)\text{mm}$ zu dem erwarteten Wert der Linse. Der erwartete Wert liegt im Bereich der Unsicherheit. Bei der Bestimmung der Brennweite mittels Autokollimationsverfahren kommt es aber zu einer größeren Abweichung. Wenngleich der bestimmte Wert $f_{1g} = (80,0 \pm 1,3)\text{mm}$ bei gedrehter Linse, genau dem erwarteten Wert entspricht, so weicht der Wert für die nicht gedrehte Linse um 3mm von der Erwartung ab. Der erwartete Wert liegt nun auch nicht mehr im Bereich der Unsicherheit.
- **Linsensystem:** Für die Linsenkombination, mit dem Abstand der beiden Linsen ($d = 20\text{mm}$) und dessen dreiecksverteilter Unsicherheit ($a_d = 2\text{mm}$), kann der erwartete Wert f_{ges}^* über die Formel³

$$\frac{1}{f_{ges}^*} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

ausgerechnet werden. Es ergibt sich

$$f_{ges}^* = (57,1 \pm 0,2)\text{mm}.$$

Der Fehler wird mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung wie folgt berechnet:

$$\Delta f_{ges}^* = \frac{f_1 f_2}{(d - f_2 - f_1)^2} \Delta d$$

Zunächst zu dem über die Abbildungsgleichung bestimmten Wert $f_{ges} = (62,8 \pm 0,6)\text{mm}$. Dieser weicht recht deutlich von der Erwartung ab. Um zu testen, wie stark die Abweichung ist, wird der t-Wert berechnet. Hier folgt

$$t = \frac{|f_{ges} - f_{ges}^*|}{\sqrt{(\Delta f_{ges})^2 + (\Delta f_{ges}^*)^2}} = 9.$$

Da $t \geq 2$ weicht das gemessene Ergebnis signifikant von dem Erwarteten ab. Grund dafür ist wahrscheinlich ein systematischer Fehler.

³[Wol14]

Auch die mit dem Autokollimationsverfahren bestimmten Werte weichen von dem erwarteten Wert ab. Der erste Wert liegt dabei leicht unter und der zweite Wert leicht über dem erwarteten Wert. Am nächsten an der erwarteten Brennweite f_{ges}^* liegt der Wert $f_{ges} = (55 \pm 4)\text{mm}$, welcher aus dem Abbe-Verfahren folgt. Dieser ist jedoch auch mit der größten Unsicherheit behaftet.

Betrachtet man die teils starken Abweichungen der Brennweiten von den angegebenen bzw. berechneten Werten, so muss es einen Fehler geben, der in der Messung nicht minimiert werden konnte. Es ist möglich, dass mindestens eine der Linsen auf einer Seite nicht identisch geschliffen ist, wie auf der anderen. Dadurch ändert sich die Brennweite, je nachdem wie herum die Linse orientiert ist. Das könnte die Abweichung erklären. Es kann aber nicht ausgeschlossen werden, dass ein Messfehler vorliegt. Dazu müsste die Messung wiederholt werden und mit den alten Werten verglichen werden.

4.3 Verbesserte Methoden

Die Fehler in der Messung kommen hauptsächlich durch zwei Faktoren zustande. Zum einen ist es schwer, den Schirm exakt an der Stelle zu positionieren, an der das Bild am schärfsten ist. Die daraus resultierende Unsicherheit ist bei dieser Versuchsdurchführung dominierend. Diese Unsicherheit zu reduzieren ist jedoch schwer. Möglicherweise hilft in diesem Fall eine höhere Anzahl an Versuchsdurchführung um das Auge zu schulen und Erfahrung zu sammeln die richtige Position zu finden.

Zum anderen ist die Position der verschiedenen Halterungen, auch wenn sie nicht verschoben werden, auf der Schiene nicht genau ablesbar. Dieser Fehler kann leicht minimiert werden, indem eine Art Zeiger angebracht wird, mit dem man die Messskala besser ablesen kann. Zudem wäre es sinnvoll Halterungen für das Dia, die Linsen und den Schirm zu verwenden, bei denen genau die Position der eingespannten Objekte abgelesen werden kann und nicht nur die Position der Halterung. Möglich wäre es auch, vor allem für kleine Abstände, einen Messschieber zu verwenden um die Längen zu messen. Dies würde die Genauigkeit der Messung erhöhen, ist aber auch mit einem höherem Aufwand verbunden.

5 Anhang

5.1 Darstellung von $\frac{1}{b}$ gegen $\frac{1}{g}$ aus Abschnitt 3.1

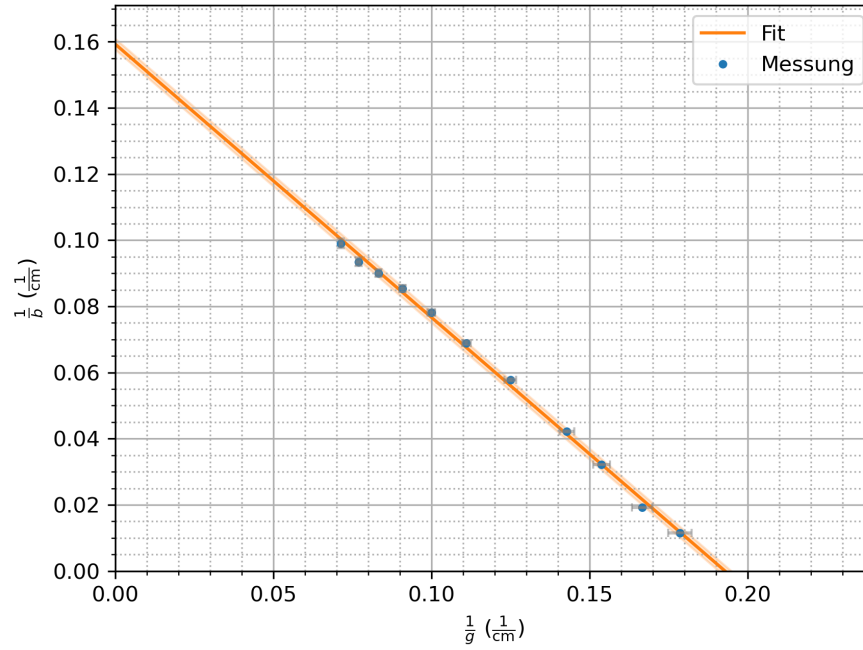


Abbildung 6: Darstellung des linearen Zusammenhangs zwischen der reziproken Gegenstandsweite $\frac{1}{g}$ und der Reziproken Bildweite $\frac{1}{b}$ für die Linsenkombination.

5.2 Rohdaten mit Vortestat

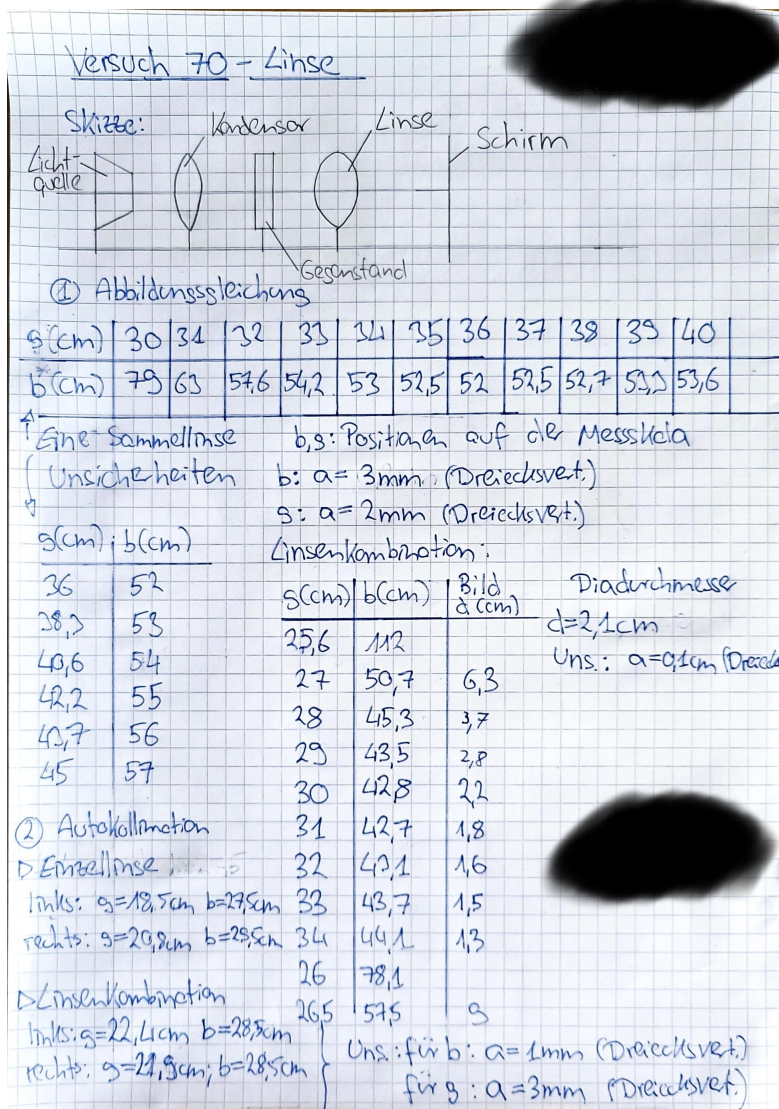


Abbildung 7: Rohdaten

Literatur

- [Wol14] Friedrich Kremer Wolfgang Schenk. *Physikalisches Praktikum*. Springer Spektrum, 2014.