

Inhaltsverzeichnis

*meistens
sinnvoller*

Inhaltsverzeichnis	I
1 Ziel des Versuchs	1
2 Aufbau und Durchführung	1
2.1 Aufbau	1
2.2 Versuchsdurchführung	1
3 Physikalische Grundlagen	3
4 Auswertung	5
4.1 Messung ohne Berücksichtigung der Hauptebenen	5
4.2 Bessel-Verfahren	11
4.3 Abbe-Verfahren	13
4.3.1 Linsenkombination 1	13
4.3.2 Linsenkombination 2	16
4.4 Autokollimationsverfahren	18
4.4.1 Bestimmung der Brennweite	18
4.4.2 Demonstration der Dispersion	19
5 Diskussion	20
5.1 Optimierung der Messmethoden	23
Abbildungsverzeichnis	24
Tabellenverzeichnis	24
Literatur	24
Anhang	

1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch soll über unterschiedliche Verfahren die Brennweite von Linsen und Linsensystemen und die Lage der Hauptebenen von Linsensystemen ermittelt werden. Außerdem wird der Einfluss der Wellenlänge des Lichts auf die Brennweite untersucht. ✓

2 Aufbau und Durchführung

2.1 Aufbau

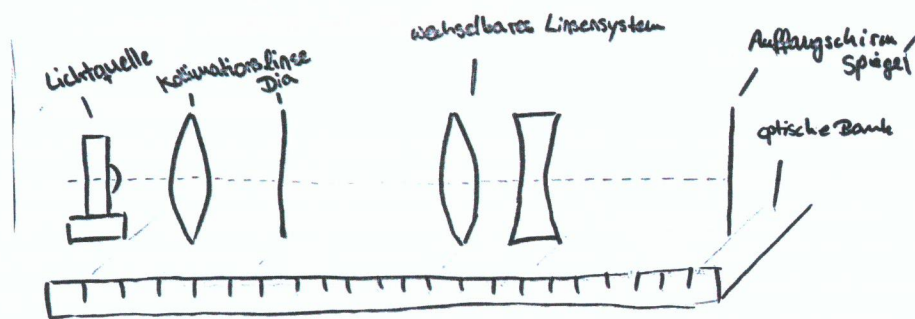


Abbildung 1: Optische Bank mit fest positionierter Lichtquelle, Kollimationslinse und Dia. Das wechselbare Linsensystem und der Schirm sind frei beweglich.

Der in Abb. 1 dargestellte Versuch besteht aus einer optischen Bank, auf der verschiedene Versuchsteile befestigt werden können. Lichtquelle, Kollimationslinse und Dia werden einmalig eingestellt und mit Hilfe einer Klemme festgestellt. Für das Linsensystem stehen verschiedene Linsen zur Verfügung, von denen bis zu zwei Stück gleichzeitig in das System eingebracht werden können. Der Auffangschirm kann ebenfalls verstellt werden und es steht auch ein Spiegel zur Verfügung. ✓ → mit Messskala

2.2 Versuchsdurchführung

Grundeinstellungen

Zunächst wird die Lichtquelle am äußeren Ende der optischen Bank fixiert. Davor wird die Kollimationslinse so fixiert, dass eine scharfe Abbildung auf dem Auffangschirm entsteht. Das Dia wird nah vor die Kollimationslinse gesetzt und ebenfalls fixiert.

Versuchsteil 1 und 2

Achtung: Zeitform konsistent!

Es wurden nun mehrmals die selben Messungen mit unterschiedlichen Linsen durchgeführt. Die zu messende Linse wurde im Linsensystem fixiert und so verschoben, dass auf dem Auffangschirm, bei einer festen Position des Schirms, ein scharfes Bild entsteht. Es gibt jeweils ein verkleinertes und ein vergrößertes scharfes Bild. Zu jeder Position des Schirmes wurden die Positionen des Linsensystems bei Verkleinerung und bei Vergrößerung notiert. Die Messung der Positionen wurde für jedes Linsensystem für fünf verschiedene Schirmpositionen durchgeführt. Es wurden Messungen für eine Sammellinse, ein System aus zwei Sammellinsen und ein System aus Streu- und Sammellinse durchgeführt.

*Wo misst ihr die Position der Linse?
Welche Kombinationen genau?*

Abbe-Verfahren

Bei den Messungen zum Abbe-Verfahren wurden für verschiedene Linsensysteme die scheinbare Gegenstandsweite, also der Abstand zwischen Dia und einem frei gewählten Fixpunkt, die scheinbare Bildweite und die Größe der Abbildung aufgenommen. Dafür wurde das Linsensystem verstellt, sodass bei fester Schirmposition ein scharfes Bild erkennbar war und anschließend die Größen gemessen und notiert werden konnten. Diese Messung wurde für jedes zu messende System für zehn verschiedene Schirmpositionen durchgeführt. Es wurden zwei verschiedene Kombinationen aus Streu- und Sammellinse untersucht.

welche?

Autokollimationsverfahren

Wackelpöbchen

Für das Autokollimationsverfahren wurde der Schirm durch den Spiegel ersetzt und Linse und Spiegel so eingestellt, dass auf der Oberkante des Dias eine scharfe Abbildung erkennbar war. Es wurde dann der Abstand zwischen Gegenstand und Linsensystem notiert.

Für eine Sammellinse mit der Brennweite 200 mm wurde die Messung außerdem noch mit blauem und rotem Licht durchgeführt.



3 Physikalische Grundlagen

Abbildungsgleichung für dünne Linsen

Die Abbildungsgleichung für dünne Linsen ist gegeben durch

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (1)$$

mit f als Brennweite, g die Gegenstandsweite und b die Bildweite. (Durch einfache Äquivalenzumformung erhält man so den linearen Zusammenhang

Nicht nötig.

$$\frac{1}{b} = -1 \left(\frac{1}{g} \right) + \frac{1}{f} \quad (2)$$

Gullstrandgleichung

Um die Brennweiten von Linsensystemen bestimmen zu können benutzt man die Gullstrandgleichung, die wie folgt gegeben ist:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (3)$$

Wobei f_1 und f_2 die Brennweiten der einzelnen Linsen sind und d der Abstand dieser beiden Linsen. Für $|d| \ll |f_1 + f_2|$ wird der letzte Summand näherungsweise null und die Gleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (4)$$

Besselverfahren

Wenn die Lage der Hauptebenen nicht bekannt ist, so wie es bei dicken Linsen oder Linsensystemen der Fall ist, können b und g nicht direkt gemessen werden. Wenn das der Fall ist, hilft das Bessel-Verfahren.

Mit

$$s = g + b \text{ und } e = |g - b| \quad (5)$$

folgt mit Hilfe der Abbildungsgleichung für die Brennweite f

$$f = \frac{s^2 - e^2}{4s} \quad (6)$$

Abbe-Verfahren

Der Abbildungsmaßstab ist gegeben durch

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} .$$

Die beiden Hauptebenen liegen h_1 vor und h_2 hinter einem frei gewählten Messpunkt, zu dem eine scheinbare Gegenstands- und Bildweite gemessen werden kann. Diese Weiten können wir also mit den Hauptebenen als

$$\begin{aligned} g' &= g + h_1 \\ b' &= b + h_2 \end{aligned}$$

darstellen. Nutzt man nun diese Beziehung und die Gleichung für den Abbildungsmaßstab, so ergibt sich

$$g' = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f_1 + h_1 \quad (7)$$

$$b' = (1 + \beta) f_2 + h_2 . \quad (8)$$

Trägt man nun g' gegen $1 + \beta^{-1}$ und b' gegen $1 + \beta$ auf und führt eine lineare Regression durch, so kann man die Brennweiten und die Lage der Hauptebenen aus Steigung und Achsenabschnitt bestimmen.

Autokollimationsverfahren

Bei dem Autokollimationsverfahren nutzen wir den speziellen Aufbau um die Brennweite mit dem Abstand zwischen Gegenstand und Linsenmitte gleichsetzen zu können. Für spätere Berechnungen nutzen wir außerdem

$$\frac{1}{f} \propto n - 1 . \quad (9)$$

denn damit folgt

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} \quad (10)$$

4 Auswertung

4.1 Messung ohne Berücksichtigung der Hauptebenen

Zunächst haben wir die Messdaten graphisch aufgetragen. Hierzu wurden b^{-1} und g^{-1} aus den gemessenen Daten wie folgt berechnet.

$$\text{besser: } g = x_{\text{Linse}} - x_{\text{Dia}} \quad , \quad b = x_{\text{Schirm}} - x_{\text{Linse}}$$

$g \hat{=}$ Abstand von Dia und Linsenmitte bzw. Mitte des Linsensystems

$b \hat{=}$ Abstand von Bild und Linsenmitte bzw. Mitte des Linsensystems

Es wurde die Mitte des Linsensystems gewählt, da in diesem Teil keine Hauptebenen bestimmt werden sollten.

Um nun eine Aussage über unsere Messung treffen zu können wurde, mit Hilfe von Gleichung (2), der theoretische Verlauf der Daten vergleichend in die jeweilige Grafik eingezeichnet. Die Fehlerrechnung erfolgte für alle drei Messreihen analog mit Hilfe der Gleichungen

$$s_b = \sqrt{s_a^2 + s_a^2} = \sqrt{2} \cdot s_a$$

$$s_g = \sqrt{s_a^2 + s_a^2} = \sqrt{2} \cdot s_a$$

mit $s_a = 0,05$ cm als Ablesefehler von der optischen Bank.

$$s_{\frac{1}{b}} = \frac{s_b}{b^2}$$

$$s_{\frac{1}{g}} = \frac{s_g}{g^2}$$

Alle Messdaten und die Fehler der eingezeichneten Datenpunkte lassen sich im Anhang nachlesen.

Sammellinse 80 mm

Für den Aufbau mit der Sammellinse und der angegebenen Brennweite von $f = 80$ mm erhielten wir mit Gleichung (2) folgenden theoretischen Verlauf

$$\frac{1}{b} = -1 \left(\frac{1}{g} \right) + 0,125 \frac{1}{\text{cm}} \quad .$$

Mit den gemessenen Daten und dem theoretischen Verlauf lässt sich folgende Grafik erstellen.

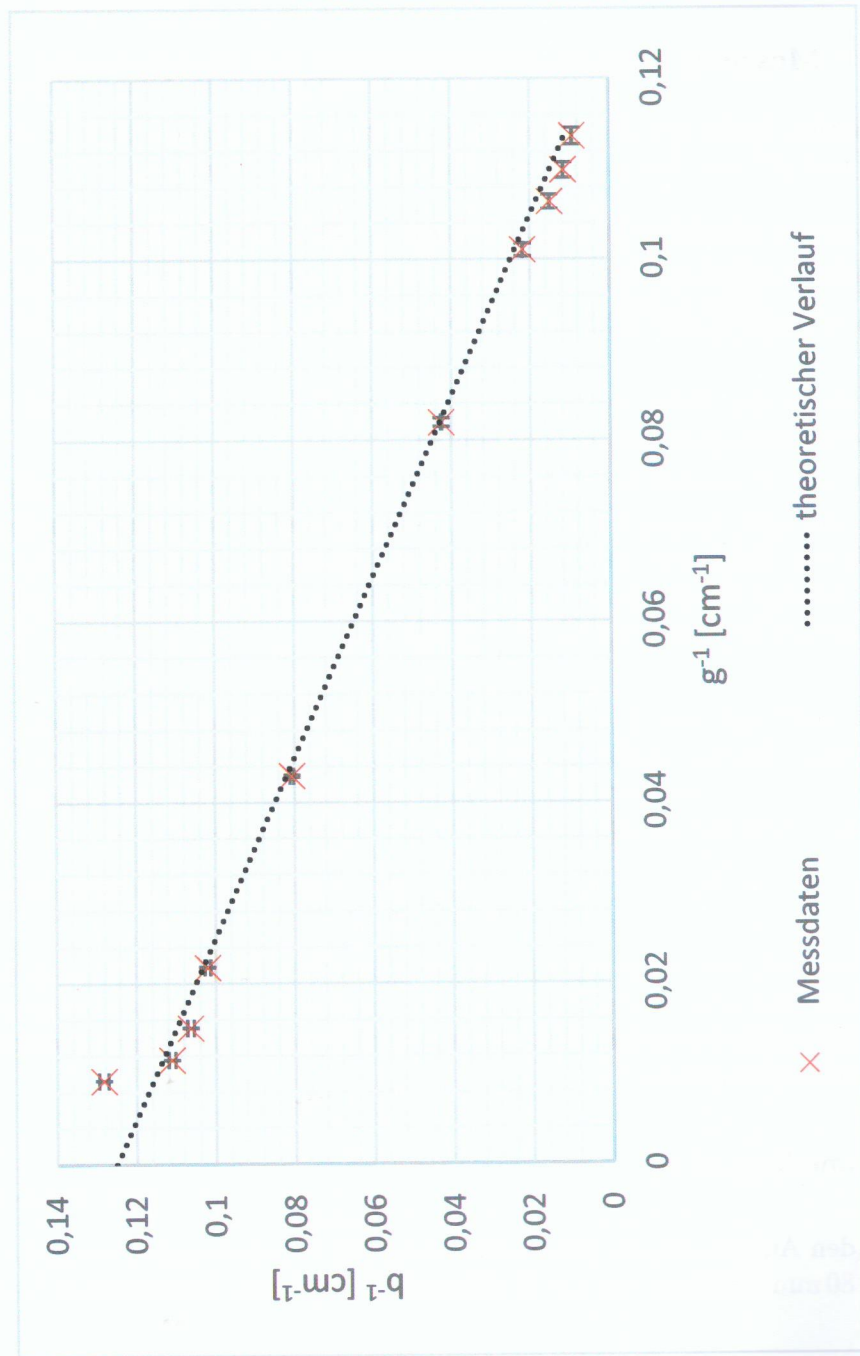


Abbildung 2: Darstellung der Messdaten für die Linse mit der Brennweite 80 mm

Um die Übereinstimmung des theoretischen Verlaufs mit dem gemessenen Verlauf zu überprüfen, wurde ein R^2 -Test durchgeführt. Mit

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$

mit y_i Messwert,

\hat{y}_i Wert der linearen Regression und
 \bar{y} arithmetisches Mittel

*↳ R^2 hat eine Aussage für eine
 Geradenanpassung \hat{y}_i mit Parameter $\frac{1}{f}$,
 für einen Vergleich mit dem theoretischen
 Verlauf hilft das nicht im eigentlichen
 Sinne.*

~~Das ist ein statistischer Test~~

Wir erhielten für R^2 den Wert

$$R^2 = 0,999$$

Das spricht für eine sehr gute Übereinstimmung von dem theoretischen Verlauf mit den gemessenen Daten.

*Das schon, ~~die~~ statistische Aussagekraft kann man aber prüfen
 über die*

Linsensystem (80 mm und 150 mm)

Für das Linsensystem, bei dem sich links eine Sammellinse der angegebenen Brennweite von $f_1 = 80$ mm und rechts eine Sammellinse mit der Brennweite $f_2 = 150$ mm befand, erhält man mit Hilfe der Gullstrandgleichung (Gleichung (3)) den Kehrwert der theoretischen Brennweite

→ Brechkraft $D = \frac{1}{f}$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = 0,175 \frac{1}{\text{cm}}$$

für die Näherung erhält man

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 0,19 \frac{1}{\text{cm}}$$

Mit den so bestimmten Kehrwerten der theoretischen Brennweite ergibt sich mit Gleichung (2) der theoretische Verlauf ohne Näherung

$$\frac{1}{b} = -1 \left(\frac{1}{g} \right) + 0,175 \frac{1}{\text{cm}}$$

und der theoretische Verlauf mit Näherung

$$\frac{1}{b} = -1 \left(\frac{1}{g} \right) + 0,19 \frac{1}{\text{cm}}$$

Mit dem theoretischen Verläufen ohne und mit Näherung und den Messdaten lässt sich folgende Grafik erstellen.

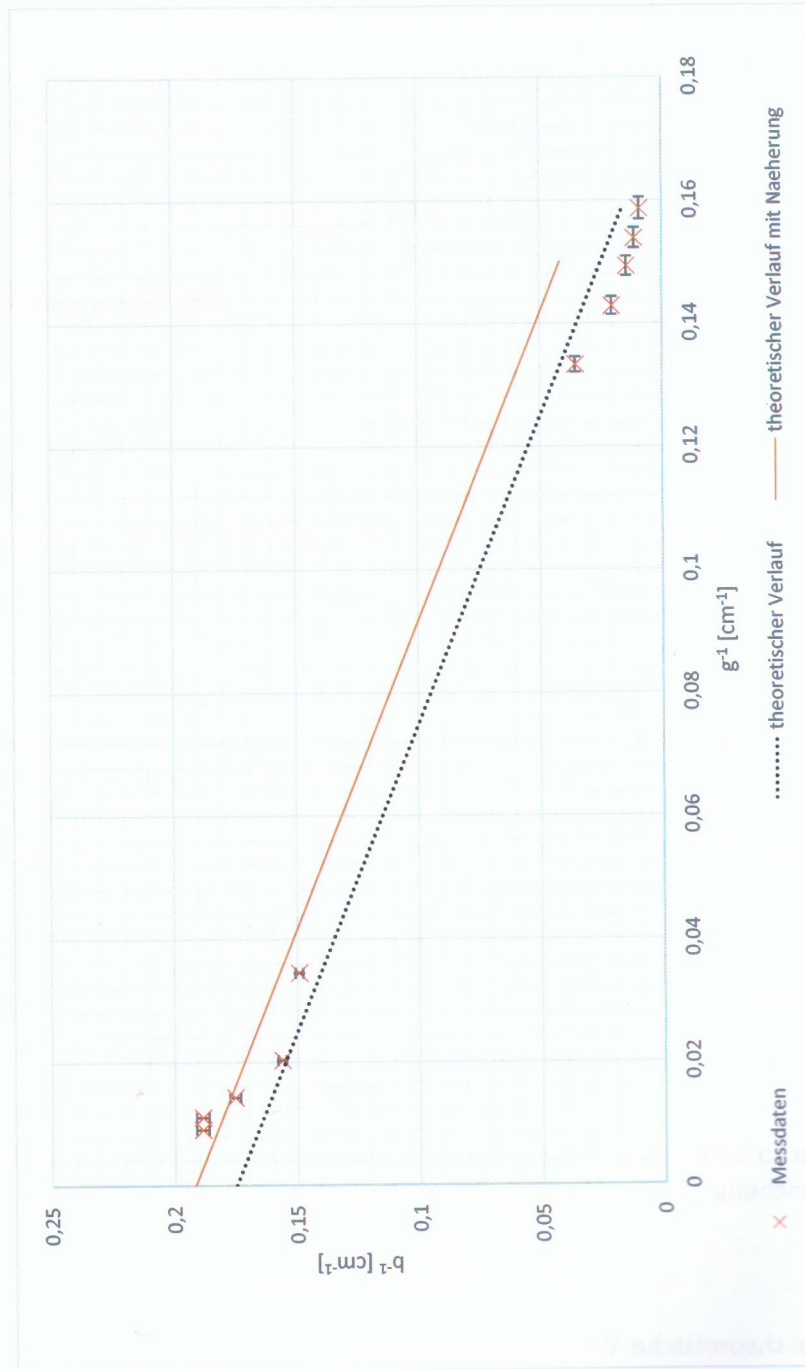


Abbildung 3: Darstellung der Messdaten für ein Linsensystem (Links $f = 80$ mm Rechts $f = 150$ mm)

Auch wenn man hier schon sieht, dass die Messdaten nicht mehr so gut zu den theoretischen Verläufen passen haben wir analog zu der Messreihe der Einzellinse mit der Brennweite 80 mm einen R^2 -Test bezüglich des theoretischen Verlaufes ohne Näherung durchgeführt, da dieser der genauere sein sollte. Wir erhielten für R^2 den Wert

$$R^2 = 0,71$$

hier wird das Problem klarer, mit Fit wäre das ein anständiger Wert, ihr liegt aber mit 90% der Messpunkte neben der Gerade in

Dieser Wert spricht, wie man bereits nach betrachten der Grafik vermutet, für eine eher schlechte Übereinstimmung.

Linsensystem 2 (80 mm und -200 mm)

Für den Aufbau mit einem Linsensystem, wobei die links angebrachte Sammellinse eine Brennweite von $f_1 = 80$ mm hat und die rechts angebrachte Streulinse eine Brennweite von $f_2 = -200$ mm hat, erhält man mit Gleichung (3) den folgenden theoretischen Kehrwert der Brennweite ohne Näherung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = 0,0875 \frac{1}{\text{cm}}$$

und den theoretischen Kehrwert der Brennweite mit Näherung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 0,075 \frac{1}{\text{cm}}$$

Mit den so bestimmten Kehrwerten der theoretischen Brennweite ergibt sich der theoretische Verlauf ohne Näherung

$$\frac{1}{b} = -1 \left(\frac{1}{g} \right) + 0,0875 \frac{1}{\text{cm}}$$

und der theoretische Verlauf mit Näherung

$$\frac{1}{b} = -1 \left(\frac{1}{g} \right) + 0,075 \frac{1}{\text{cm}}$$

Mit den theoretischen Verläufen ohne und mit Näherung und den Messdaten lässt sich folgende Grafik erstellen.

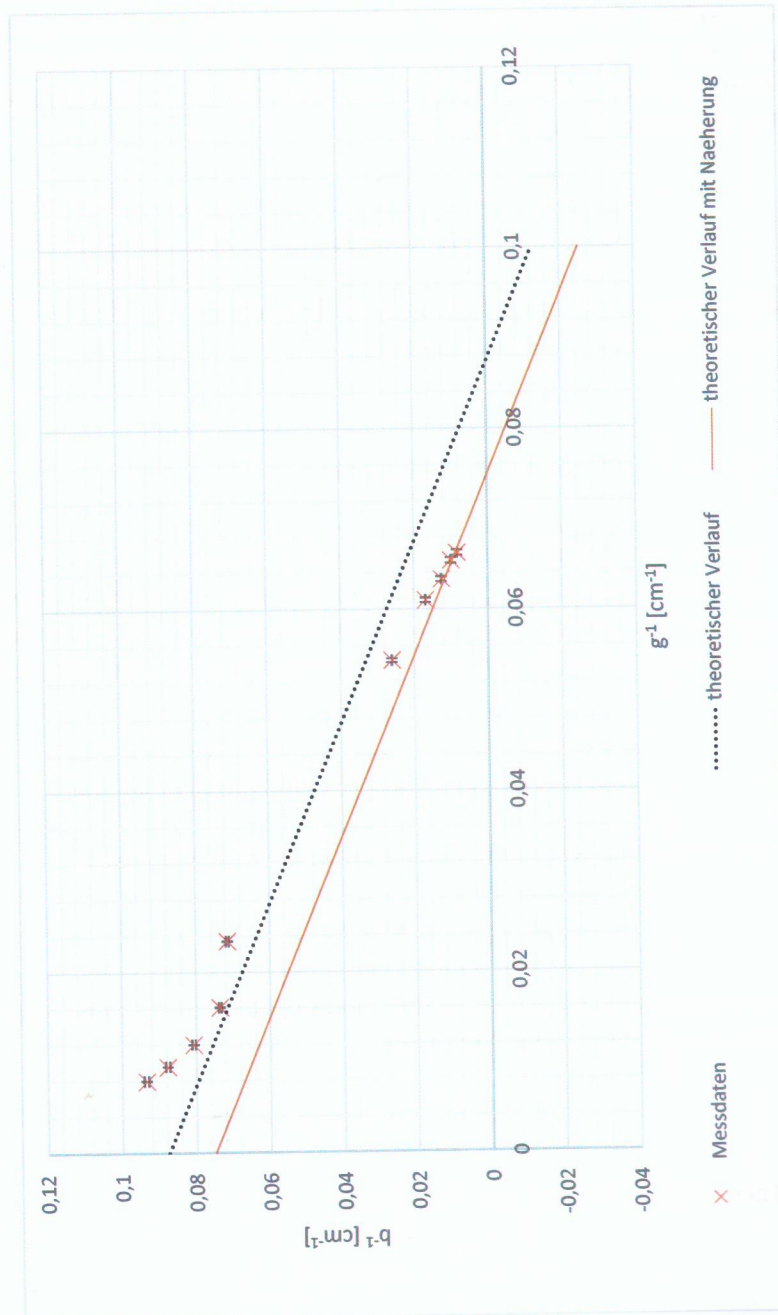


Abbildung 4: Darstellung der Messdaten für ein Linsensystem (Links $f = 80$ mm Rechts $f = -200$ mm)

Auch hier erkennt man bereits beim Betrachten der Grafik, dass die theoretischen Verläufe nicht zu den Messdaten passt. Es wurde dennoch erneut ein R^2 -Test bezüglich des theoretischen Verlaufs ohne Näherung, da dieser genauer sein sollte, durchgeführt. Man erhält für R^2 den Wert

$$R^2 = 0,522$$

Dieser Wert spricht für eine schlechte Übereinstimmung des theoretischen Verlaufs mit den Messdaten.

4.2 Bessel-Verfahren

Zunächst wurde aus den gemessenen Daten, mit Gleichung (5) die Größen s und e berechnet. Aus e und s wurden dann für jede Linseneinstellung die Brennweite mit Hilfe der Gleichung (6) ermittelt. Die Fehler auf die einzelnen Brennweiten wurden dann statistisch mit der Formel

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (11)$$

bestimmt. Aus den Brennweiten wurden dann für jedes Linsensystem der jeweilige Mittelwert mit der Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (12)$$

gebildet. Die Fehler auf die jeweiligen Mittelwerte ergaben sich dann mit

$$s_{\bar{f}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot s_f$$

mit s_f als statistischer Fehler auf die einzeln bestimmten Brennweiten. Um diese Werte in der späteren Diskussion dann auf ihre Güte zu überprüfen, wurden mit der Gullstrandgleichung (Gleichung (3)) die theoretischen Brennweiten ermittelt. Man erhält somit die Ergebnisse in Tabelle 1, Tabelle 2 und Tabelle 3.

Messung 1	s [cm]	e [cm]	f [cm]
f = 80 mm	35,7	11,1	8,06
	55,7	36	8,11
	75,7	56,9	8,23
	95,6	77,5	8,19
	115,7	99,1	7,70
Mittelwert [cm]			8,06
Standartabweichung [cm]			0,21

Tabelle 1: Ergebnisse zur Linse mit der Brennweite $f = 80$ mm

Messung 2	s [cm]	e [cm]	f [cm]
f = 80 mm (links)	115,7	104,1	5,51
f = 150 mm (rechts)	95,6	83,8	5,54
	75,7	63,3	5,69
	55,7	42,3	5,89
	35,7	21,5	5,69
Mittelwert [cm]			5,66
Standartabweichung [cm]			0,15
$f_{\text{theo. mit Naehering}}$ [cm]			5,22
$f_{\text{theo. ohne Naehering}}$ [cm]			5,71

Tabelle 2: Ergebnisse für ein Linsensystem (Links $f = 80$ mm Rechts $f = 150$ mm)

Messung 3	s [cm]	e [cm]	f [cm]
f = 80 mm (links)	56,7	24,3	11,57
f = -200 mm (rechts)	75,7	46,7	11,72
	95,6	68,4	11,67
	115,7	89	11,81
	135,7	109,9	11,67
Mittelwert [cm]			11,69
Standartabweichung [cm]			0,09
$f_{\text{theo. mit Naehering}}$ [cm]			13,33
$f_{\text{theo. ohne Naehering}}$ [cm]			11,43

Tabelle 3: Ergebnisse für ein Linsensystem (Links $f = 80$ mm Rechts $f = -200$ mm)

4.3 Abbe-Verfahren

4.3.1 Linsenkombination 1

Messwerte (80 mm, -200 mm)

Lage Schirm [cm]	Halterungskante [cm]	g' [cm]	b' [cm]	Bildhoehe [cm]	β	$1 + 1/\beta$	$1 + \beta$	s_β
73,9		25,2	16	48,7	2,3	3,3	1,30	4,3
78,9		25,2	16	53,7	2,5	3,6	1,28	4,6
83,9		24,7	15,5	59,2	2,8	4,0	1,25	5,0
88,9		24,5	15,3	64,4	3,1	4,4	1,23	5,4
93,9		24,2	15	69,7	3,4	4,9	1,21	5,9
98,9		23,9	14,7	75	3,9	5,6	1,18	6,6
103,9		24,1	14,9	79,8	4,2	6,0	1,17	7,0
81,3		25	15,8	56,3	2,7	3,9	1,26	4,9
91,2		24,5	15,3	66,7	3,3	4,7	1,21	5,7
101,1		24	14,8	77,1	4	5,7	1,18	6,7

Tabelle 4: Messwerte und daraus berechnete Werte zur Bestimmung der Brennweite und Hauptebenen bei einem Linsensystem (Brennweiten: links = 80 mm, rechts = -200 mm)

Auswertung (80 mm, -200 mm)

Aus den aufgenommenen Daten der Bildgröße bei unterschiedlichen Schirmpositionen lässt sich mit der, uns gegebenen, Bildweite die Lateralvergrößerung β berechnen

$$\beta = \frac{B}{G} \quad G=?$$

Die jeweiligen, sich ergebenden Werte sind in Tabelle 4 dargestellt. Der Fehler auf s_β ergibt sich mit

$$s_\beta = \sqrt{\left(\frac{s_B}{G}\right)^2} = \frac{s_B}{G}$$

und ist ebenfalls in Tabelle 4 angegeben.

Die scheinbare Gegenstandsweite g' und die scheinbare Bildweite b' ergeben sich mit

$$g' = x_{\text{Halterungskante}} - x_{\text{Dia}}$$

$$b' = x_{\text{Schirm}} - x_{\text{Halterungskante}}$$

Trägt man nun g' gegen $1 + \frac{1}{\beta}$ und b' gegen $1 + \beta$ auf und bestimmt die Steigung mit Hilfe einer linearen Regression, so kann man mit Gleichung (7) und Gleichung (8) die Brennweiten f_1 und f_2 und die Lage der beiden Hauptebenen bestimmen.

Lineare Regression (80 mm, -200 mm)

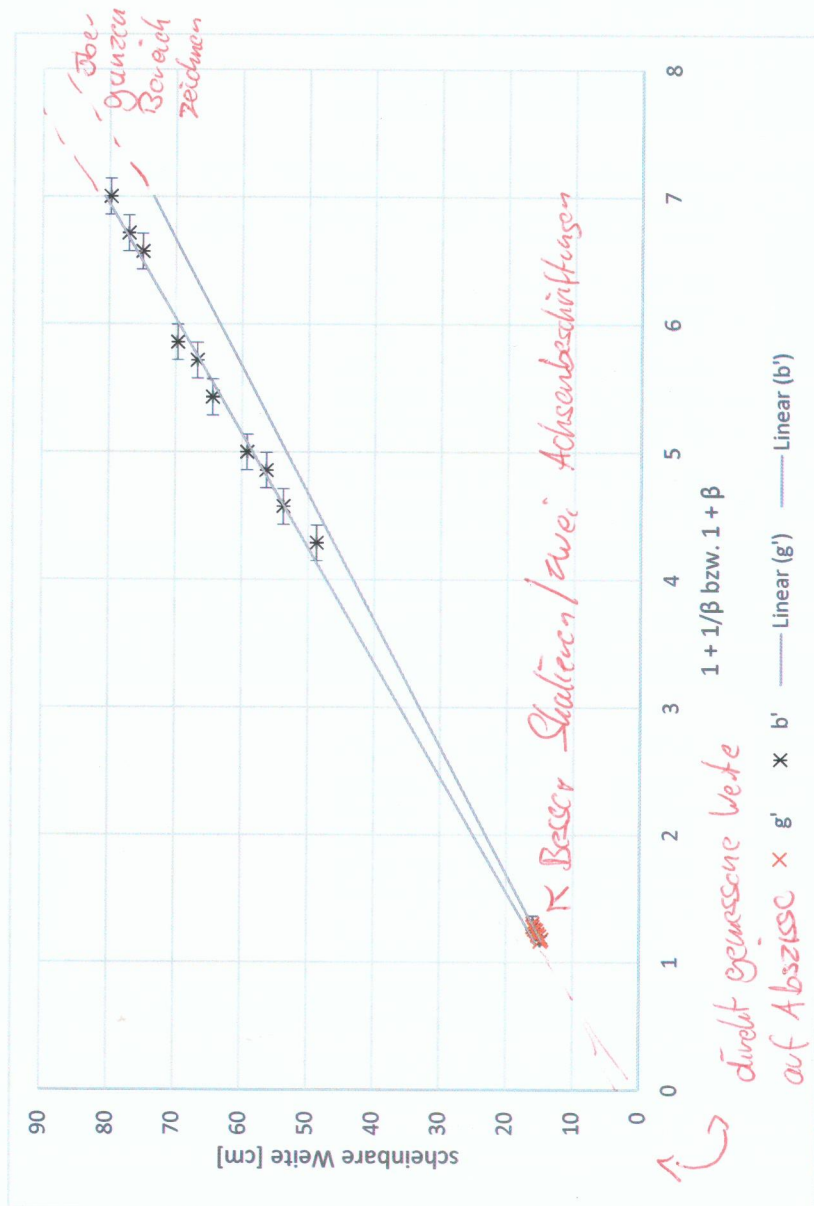


Abbildung 5: Einzelne lineare Regressionen der zwei Auftragungen der scheinbaren Weiten, Ausgleichsgeraden teilweise nicht erkennbar

Die lineare Regression ohne Gewichtung führt zu zwei unterschiedlichen linearen Funktionen $\gamma_{g'}$ und $\gamma_{b'}$.

$$\gamma_{g'} = (10,1 \pm 0,9) \text{ cm } x + (3,00 \pm 1,15) \text{ cm}$$

$$\gamma_{b'} = (11,1 \pm 0,4) \text{ cm } x + (2,79 \pm 2,29) \text{ cm}$$

Aus den Achsenabschnitten ergibt sich dann die Lage der Hauptebenen im Bezug zum von uns gewählten Referenzpunkt zu

$$h_1 = (3,00 \pm 1,15) \text{ cm} = (30,0 \pm 11,5) \text{ mm}$$

$$h_2 = (2,79 \pm 2,29) \text{ cm} = (27,9 \pm 22,9) \text{ mm}$$

und die Brennweiten liegen bei

$$f_1 = (10,1 \pm 0,9) \text{ cm} = (101 \pm 9) \text{ mm}$$

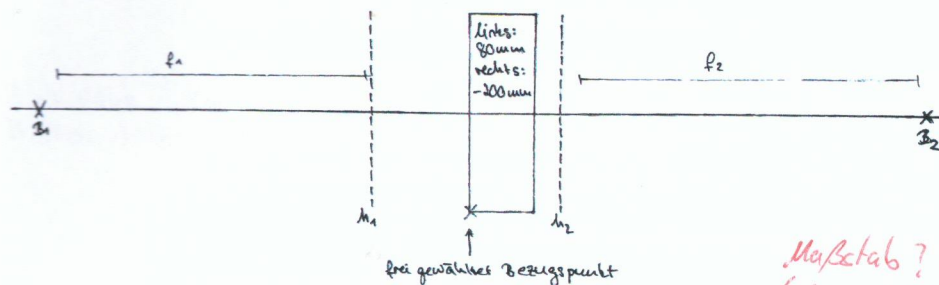
$$f_2 = (11,1 \pm 0,4) \text{ cm} = (111 \pm 4) \text{ mm}$$

Zusammenfassend ergibt sich also für die gewählten Linsen mit den Brennweiten 80 mm (links) und -200 mm (rechts) folgende Werte, welche hier nun ohne Fehler angegeben werden

$f_1 = 101 \text{ mm}$
$f_2 = 111 \text{ mm}$
$h_1 = 300 \text{ mm}$
$h_2 = 279 \text{ mm}$

~~R&B~~

Als maßstabsgetreue Skizze sieht das System aus Hauptebenen und Brennpunkten dann folgendermaßen aus



Maßstab?
(okay, bei Scanschue)

Abbildung 6: Skizze der Hauptebenen und Brennpunkte, mit h_1 und h_2 als Hauptebenen und B_1 und B_2 als Brennpunkte

4.3.2 Linsenkombination 2

Messwerte (−200 mm, 80 mm)

Lage Schirm [cm]	Halte­rungs­kante [cm]	g [cm]	b' [cm]	Bild­hoe­he [cm]	β	$1 + 1/\beta$	$1 + \beta$	s_{β}
58	25,3	16,1	32,7	1,1	1,6	1,6	2,6	0,14
63	23,6	14,4	39,4	1,5	2,1	1,5	3,14	0,14
68	22,5	13,3	45,5	1,8	2,6	1,4	3,6	0,14
73	21,7	12,5	51,3	2,2	3,1	1,3	4,14	0,14
78	21,3	12,1	56,7	2,6	3,7	1,27	4,7	0,14
83	21	11,8	62	2,9	4,1	1,24	5,14	0,14
88	20,6	11,4	67,4	3,2	4,6	1,22	5,6	0,14
93	20,5	11,3	72,5	3,5	5,0	1,20	6,0	0,14
98	20,3	11,1	77,7	3,8	5,4	1,18	6,4	0,14
103	20,1	10,9	82,9	4,1	5,9	1,17	6,9	0,14

Tabelle 5: Messwerte und daraus berechnete Werte zur Bestimmung der Brennweite und Hauptebenen bei einem Linsensystem (Brennweiten: links = −200 mm, rechts = 80 mm)

Auswertung (−200 mm, 80 mm)

Die in Tabelle 4 dargestellten Werte wurden analog zu den Werten der ersten Linsenkombination berechnet.

Lineare Regression (−200 mm, 80 mm)

Bei linearer Regression der zwei Messreihen erhalten wir die folgenden Geradengleichungen

$$\gamma_g = (11,19 \pm 0,19) \text{ cm } x - (-2,17 \pm 0,25) \text{ cm}$$

$$\gamma_{b'} = (11,57 \pm 0,14) \text{ cm } x + (3,1 \pm 0,7) \text{ cm}$$

womit sich die Lage der beiden Hauptebenen ergibt

$$h_1 = (-2,17 \pm 0,25) \text{ cm} = (-217 \pm 25) \text{ mm}$$

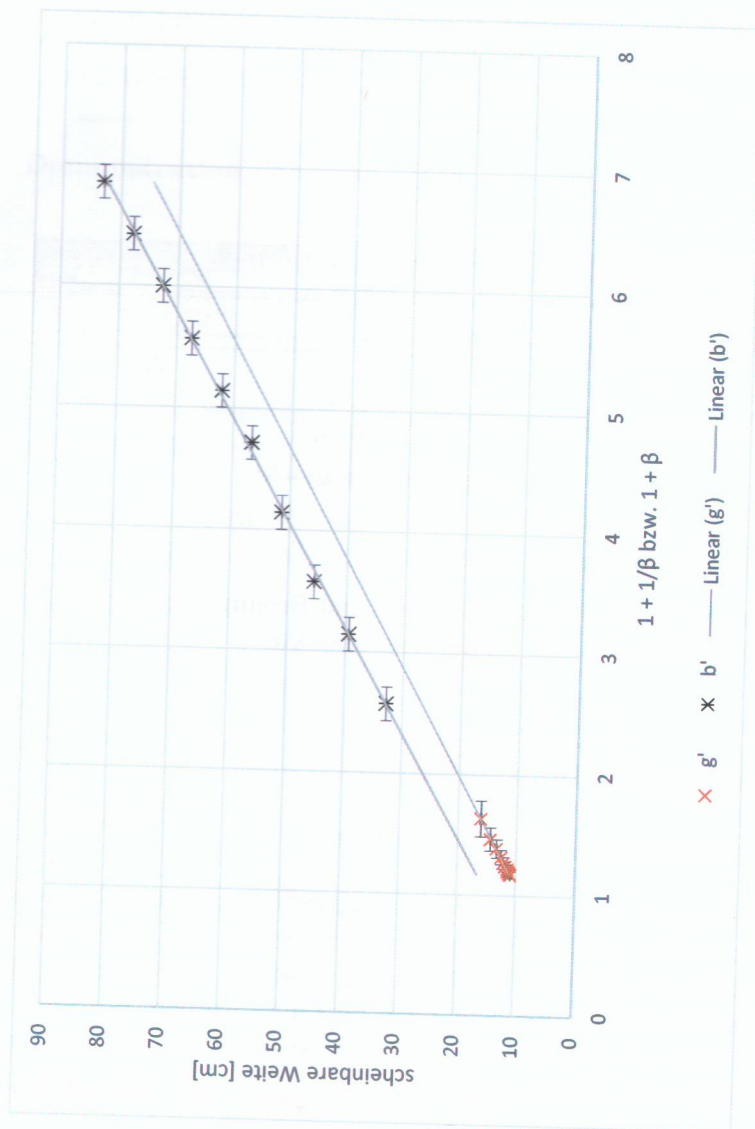
$$h_2 = (3,1 \pm 0,7) \text{ cm} = (310 \pm 7) \text{ mm}$$

und die Brennweiten liegen bei

$$f_1 = (11,19 \pm 0,19) \text{ cm} = (111,9 \pm 1,9) \text{ mm}$$

$$f_2 = (11,57 \pm 0,14) \text{ cm} = (115,7 \pm 1,4) \text{ mm}$$

Zusammenfassend ergeben sich also für die gewählte Linsenkombination mit den Brennweiten −200 mm links und 80 mm rechts folgende Werte, welche hier nun ohne Fehler angegeben werden



S.O.

Abbildung 7: Lineare Regression der zwei Auftragungen der scheinbaren Weiten, Ausgleichsgeraden teilweise nicht erkennbar

$f_1 = 111,9 \text{ mm}$
$f_2 = 115,7 \text{ mm}$
$h_1 = -217 \text{ mm}$
$h_2 = 311 \text{ mm}$

In einer maßstabstreuen Skizze sieht das System dann folgendermaßen aus

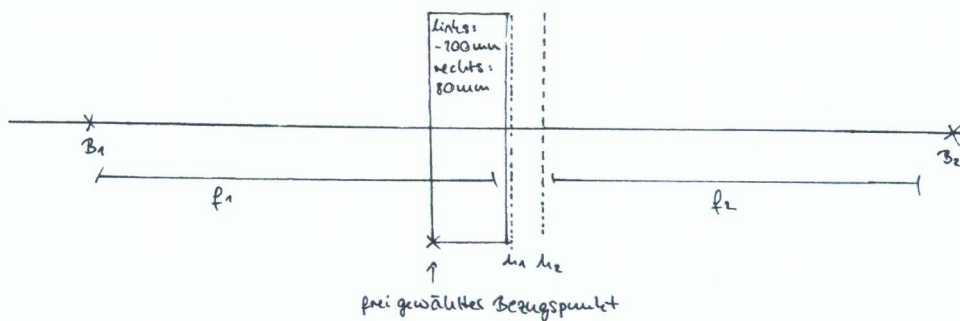


Abbildung 8: Skizze der Hauptebenen und Brennpunkte, mit h_1 und h_2 als Hauptebenen und B_1 und B_2 als Brennpunkte

4.4 Autokollimationsverfahren

4.4.1 Bestimmung der Brennweite

Als letztes wurde noch mit Hilfe des Autokollimationsverfahrens die Brennweite von Linsen und Linsensystemen bestimmt. Bei den Linsensystemen haben wir als Hauptebene die Mitte des Systems angenommen, da bei diesem Verfahren die Hauptebenen nicht bestimmt werden. Bestimmt man also die Brennweite als den Abstand zwischen Gegenstand und Linse, so ergeben sich die folgenden Werte: *Bei 80 & -200 wäre die Hauptebene bekannt*

Linse [Links][Rechts]	Linsenmitte, links [cm]	Linsenmitte, rechts [cm]	f_{gemessen} [cm]	s_f [cm]	$f_{\text{berechnet, ohne Naeherung}}$ [cm]
80mm	17,3		8,10	0,07	8
150mm	24,4		15,20	0,07	15
[80mm] & [150mm]	14,3	16,3	6,10	0,07	5,7
[80mm] & [-200mm]	22,1	24,1	13,90	0,07	11,4
[-200mm] & [80mm]	18,2	20,2	10,00	0,07	11,4

Tabelle 6: Messwerte und sich daraus ergebene Brennweite im Vergleich zur theoretischen Brennweite

Die Fehler ergaben sich mit Hilfe der Formel

$$s_f = \sqrt{s_a^2 + s_a^2} = \sqrt{2} \cdot s_a$$

Hier ist, wie auch beim ersten Verfahren gut erkennbar, dass sich die Brennweite einer Einzellinse gut bestimmen lässt, für ein Linsensystem aber die Kenntnis, oder Bestimmung der Hauptebenen notwendig ist.

4.4.2 Demonstration der Dispersion

Linse 250mm	Linsenmitte [cm]	mit Korrektur [-0,35cm]	f_{gemessen} [cm]	s_f [cm]
weiß	34,6	34,25	25,05	0,07
blau	34,15	33,8	24,60	0,07
rot	34,8	34,45	25,25	0,07

Tabelle 7: Gemessene Werte und daraus bestimmte Brennweiten bei unterschiedlicher Wellenlänge des Lichts

Nutzt man nun Gleichung (10) und die Brechzahlen $n_{\text{rot}} = 1,514$ und $n_{\text{blau}} = 1,530$ [Quelle 1] so müssten die beiden Quotienten gleich sein. Bei uns ergibt sich

$$Q_1 = \frac{f_2^{\text{rot/blau}}}{f_1} = 1,03$$

$$Q_2 = \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} = 1,031 (\pm 0,004) \quad \text{Index 1,2 nicht definiert}$$

wobei der Fehler mit

$$s_{Q_1} = \frac{f_2}{f_1} \cdot \sqrt{\left(\frac{s_{f_1}}{f_1}\right)^2 + \left(\frac{s_{f_2}}{f_2}\right)^2}$$

berechnet wurde.

5 Diskussion

Messung ohne Berücksichtigung der Hauptebenen

Bei dem Vergleich des gemessenen Verlaufs mit dem theoretisch bestimmten Verlauf für die Messung mit der einzelnen Sammellinse mit der Brennweite $f = 80 \text{ mm}$ war eine gute Übereinstimmung zu erkennen, welche mit dem R^2 von 0,999 bestätigt wurde. Da für die einzelne Linse die Näherung als dünne Linse für Strahlengänge nahe der optischen Achse sehr gut ist, ist es logisch, dass wir ohne weitere Bestimmung der Hauptebene die Brennweite gut ermitteln können, da angenommen werden kann, dass diese durch die Linsenmitte verläuft.

Während die Näherung als dünne Linse bei einer einzelnen Linse gute Ergebnisse liefert, ist sie für Linsensysteme doch eher ungeeignet, was man an der deutlich schlechteren Übereinstimmung der Verläufe erkennen kann. Des Weiteren kann man erkennen, dass auch die Näherung der Gullstrandgleichung zu noch schlechteren Übereinstimmungen führt, was damit zu erklären ist dass der letzte Summand nicht mehr als 0 genähert werden kann, was auf die kurzen Brennweiten und den verhältnismäßig großen Abstand zurückzuführen ist. Eine Bestimmung der Brennweiten von Linsensystemen ist somit mit dieser Methode nicht möglich, wir benötigen also alternative Verfahren.

Bessel-Verfahren

Ein Verfahren um die Brennweiten von Linsensystemen zu bestimmen ohne die Hauptebenen zu kennen ist das Bessel-Verfahren. Wir erhielten als Ergebnisse unserer Messung

Brennweite für die Einzellinse ($f = 80 \text{ mm}$) :

$$f = (8,06 \pm 0,09) \text{ cm}$$

Dieser Wert liegt innerhalb einer Standardabweichung von dem auf der Linse angegebenen Wert von $f_{\text{angeg.}} = 8 \text{ cm}$.

Brennweite für ein Linsensystem (Links $f = 80 \text{ mm}$ Rechts $f = 150 \text{ mm}$) :

$$f = (5,66 \pm 0,07) \text{ cm}$$

Dieser Wert liegt innerhalb einer Standardabweichung von dem, mit Gleichung (3) berechneten, theoretischen Wert von $f_{\text{theo}} = 5,71 \text{ cm}$.

Brennweite für ein Linsensystem (Links $f = 80$ mm Rechts $f = -200$ mm) :

$$f = (11,69 \pm 0,04) \text{ cm}$$

Dieser Wert liegt innerhalb von 7 Standardabweichungen von dem, mit Gleichung (3) berechneten, theoretischen Wert von $f_{\text{theo}} = 11,43$ cm.

Man sieht, dass das Bessel-Verfahren zur Bestimmung von Brennweiten von Linsensystemen besser geeignet ist, als das System als dünne Linse zu approximieren. Die höhere Abweichung vom theoretischen Wert kann zum einen daran liegen, dass der statistisch bestimmte Fehler zu gering ausfällt. Möglich wäre aber auch, dass für dieses Linsensystem die Hauptebenen zu weit auseinander liegen und somit die dem Bessel-Verfahren zu Grunde liegende Näherung, $s \gg h$ mit h als Abstand der Hauptebenen, an Gültigkeit verliert. ✓

Abbe-Verfahren

Linsenkombination 1 (80 mm und -200 mm)

Die Werte, welche wir durch lineare Regression unserer Messdaten für die Lage der Hauptebenen und die Brennweiten erhalten haben sind

$$\begin{aligned} f_1 &= 101 \text{ mm} \\ f_2 &= 111 \text{ mm} \\ h_1 &= 300 \text{ mm} \\ h_2 &= 279 \text{ mm} \end{aligned}$$

Wir haben uns bei der linearen Regression dagegen entschieden die gleiche Steigung zu erzwingen, da dies auch zum selben Achsenabschnitt führen würde und die Lage der Hauptebenen somit falsch bestimmt werden würde. Für die korrekte Bestimmung der Brennweiten müsste man die selbe Steigung erzwingen, da es keinen Übergang in ein Medium mit anderer Brechzahl gab. Um die korrekte Brennweite zu berechnen könnte man die Abbildungsgleichungen für dünne Linsen *nein!*

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

nutzen, nur, dass man nun beachten muss, dass es sich bei g und b um den Abstand von Gegenstand oder Bild zur jeweiligen Hauptebene und nicht

zur Linsenmitte handelt. Berechnet man auf diese Weise die Brennweite beispielhaft für eine Schirmlage (hier: Tabelle 4 bei 73,9 cm) so erhält man

$$f = 10,13 \text{ cm} .$$

Den Fehler auf diese Größe haben wir, wie in der Anleitung gesagt, nicht berechnet. Die großen Fehler auf die Lage der Hauptebenen, welche sich in der linearen Regression ergeben haben würden aber auch zu einem großen Fehler auf die so berechnete Brennweite führen. Der theoretische Wert für diese Linsenkombination liegt bei $f_{theo} = 11,43 \text{ cm}$. Der Fehler auf den von uns berechneten Werte muss also ziemlich groß sein, damit eine Verträglichkeit festgestellt werden kann.

Linsenkombination 2 (-200 mm und 80 mm)

Für die zweite Linsenkombination ergeben sich die folgenden Werte

$f_1 = 111,9 \text{ mm}$
$f_2 = 115,7 \text{ mm}$
$h_1 = -217 \text{ mm}$
$h_2 = 311 \text{ mm}$

Berechnet man hier auf die selbe Art die Brennweite mit den Werten Tabelle 5 bei der Lage des Schirmes 58 cm, so ergibt sich

$$f = 14,25 \text{ cm} .$$

Auch dieser Wert sollte einen ziemlich großen Fehler haben, da auch hier die Lage der Hauptebenen einen großen Fehler hat. Die Verträglichkeit mit $f_{theo} = 11,43 \text{ cm}$ ist trotzdem fraglich.

** Vergleich 80 & -200
vs -200 & 80
Abb 6 vs 8.*

Autokollimationsverfahren

Durch das Autokollimationsverfahren erhielten wir die Werte aus Tabelle 6. Der erhaltene Wert für die Einzellinse mit der Brennweite von 8 cm liegt innerhalb von 2 Standardabweichungen von dem angegebenen Wert. Der Wert für die Einzellinse mit der angegebenen Brennweite von 15 cm liegt innerhalb von drei Standardabweichungen von dem angegebenen Wert. Man sieht, dass für Einzellinsen dieses Messverfahren einigermaßen gute Ergebnisse liefert. Betrachtet man jedoch die Messungen mit den Linsensystemen so stellt man fest, dass die Werte bezüglich ihrer Standardabweichungen stark abweichen. Dies liegt daran, dass bei diesem Messverfahren erneut keine Hauptebenen bestimmt wurden.

Um die Dispersion zu untersuchen wurde einmal die Brennweite von rotem und einmal von blauem Licht bestimmt. Aus diesen Größen wurde der Quotient bestimmt und mit dem theoretischen Wert nach Gleichung (10) verglichen. Der gemessene Wert liegt innerhalb einer Standardabweichung und ist somit mit dem theoretischen Wert verträglich, was die theoretische Voraussage bestätigt.

5.1 Optimierung der Messmethoden

Um die Messung zu optimieren wäre die Kollektorlinse direkt nach der Lichtquelle eine zu betrachtende Fehlerquelle, da sie nicht wirklich paralleles Licht erzeugt. Des Weiteren gab es aufgrund einer defekten Jalousie externe Lichtquellen, was das Ablesen der virtuellen Verkleinerungen sehr erschwerte.

Abbildungsverzeichnis

1	Versuchsaufbau	1
2	Darstellung der Messdaten für die Linse mit der Brennweite 80 mm	6
3	Darstellung der Messdaten für ein Linsensystem (Links $f =$ 80 mm Rechts $f = 150$ mm)	8
4	Darstellung der Messdaten für ein Linsensystem (Links $f =$ 80 mm Rechts $f = -200$ mm)	10
5	Lineare Regression zur Linsenkombination 1	14
6	Skizze zur Linsenkombination 1	15
7	Lineare Regression zur Linsenkombination 2	17
8	Skizze zur Linsenkombination 2	18

Tabellenverzeichnis

1	Ergebnisse zur Linse mit der Brennweite $f = 80$ mm	12
2	Ergebnisse für ein Linsensystem (Links $f = 80$ mm Rechts $f = 150$ mm)	12
3	Ergebnisse für ein Linsensystem (Links $f = 80$ mm Rechts $f = -200$ mm)	12
4	Messwerte zur Linsenkombination 1	13
5	Messwerte zur Linsenkombination 2	16
6	Messwerte des Autokollimationsverfahrens	18
7	Messwerte zur Dispersion	19

Literatur

[Quelle 1] "Versuchsanleitungen zum Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 1" Stand 08/2018.

Tab. 7...

Linse: 80 mm			
1/b	1/g	s_1/b	s_1/g
0,04255319	0,08196721	0,00012804	0,00047508
0,02183406	0,1010101	3,371E-05	0,00072146
0,01508296	0,10638298	1,6086E-05	0,00080026
0,01156069	0,10989011	9,4505E-06	0,00085389
0,00935454	0,11363636	6,1877E-06	0,0009131
0,08064516	0,04291845	0,00045988	0,00013025
0,10204082	0,02178649	0,00073626	3,3563E-05
0,10638298	0,01508296	0,00080026	1,6086E-05
0,11111111	0,01154734	0,00087297	9,4286E-06
0,12820513	0,00926784	0,00116224	6,0735E-06

runden!
Einheiten!

Linsen: 80mm & 150 mm			
1/b	1/g	s_1/b	s_1/g
0,00914077	0,15873016	5,9081E-06	0,00178157
0,01122334	0,15384615	8,907E-06	0,00167363
0,01449275	0,14925373	1,4852E-05	0,0015752
0,02053388	0,14285714	2,9814E-05	0,00144308
0,03546099	0,13333333	8,8917E-05	0,00125708
0,18867925	0,00905797	0,00251729	5,8016E-06
0,18867925	0,0110742	0,00251729	8,6718E-06
0,1754386	0,01428571	0,00217638	1,4431E-05
0,15625	0,02028398	0,00172633	2,9093E-05
0,14925373	0,03448276	0,0015752	8,4079E-05

Linsen: 80mm & -200mm			
1/b	1/g	s_1/b	s_1/g
0,02610966	0,05434783	4,8204E-05	0,00020886
0,01686341	0,06097561	2,0108E-05	0,0002629
0,01253133	0,06329114	1,1104E-05	0,00028325
0,00996016	0,06535948	7,0148E-06	0,00030207
0,00829187	0,06622517	4,8617E-06	0,00031012
0,07142857	0,0234192	0,00036077	3,8782E-05
0,07352941	0,01610306	0,0003823	1,8336E-05
0,08064516	0,01201923	0,00045988	1,0215E-05
0,0877193	0,00958773	0,0005441	6,5E-06
0,09345794	0,008	0,00061761	4,5255E-06

Versuch 70

28.09.18

Teil 1/2:

Positionen

Fehler optische Bank
Ablesen: $\pm 0,5 \text{ mm}$

Lampe : 1,9 cm
Sammellinse (40 mm) : 6,4 cm
Dia : 9,5 cm (-

Messung 1:

Linse (80 mm)

~~Lage der Linse (80 mm)~~
~~Scharfes Bild (Vergrößerung)~~ $\rightarrow 65,3 \text{ cm}$

Lage des Schirms

Lage des Schirms	Linse klein
44,9 cm	32,5
64,9 cm	55,1
84,9 cm	75,5
104,8 cm	95,8
124,9 cm	117,1

Messung 2:

Lage Schirm	Linse (80)		Linse (150)	
	klein	groß	klein	groß
124,9 cm	118,6	14,5	120,6	16,5
104,8 cm	98,5	14,7	100,5	16,7
84,9 cm	78,2	14,9	80,2	16,9
64,9 cm	57,7	15,2	59,7	17,2
44,9 cm	37,2	15,7	39,2	17,7

Messung 3:

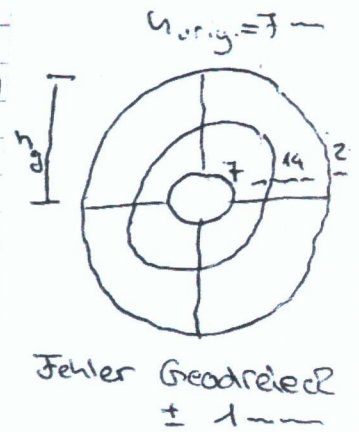
	klein	groß	klein	groß
Lage Skirm	Lage Linse (80)		Lage Linse (-200)	
69,9 cm	50,9	26,6	52,9	28,6
84,9 cm	71,3	24,6	73,3	26,6
104,8 cm	92,4	24,0	94,4	26,0
124,9 cm	112,5	23,3	114,5	25,5
144,9 cm	133,2	23,3	135,2	25,5

Teil 3

Messung 1

(Bezugspunkt linke Halterungskante)
 (A 80 P -200)

Lage Skirm	Halterungskante	Bildhöhe
9 cm	25,2 cm	2,3 cm
78,9 cm	25,2 cm	2,5 cm
83,9 cm	24,7 cm	2,8 cm
88,9 cm	24,3 cm	3,1 cm
93,9 cm	24,2 cm	3,4 cm
98,9 cm	23,9 cm	3,9 cm
103,9 cm	24,1 cm	4,2 cm
¹ 80,3 cm	25 cm	2,7 cm
91,2 cm	24,5 cm	3,3 cm
101,1 cm	24 cm	4,0 cm



Teil 3 :

Messung 2: (L - 200 R 80)

Seiten	Halteungsweite
58 cm	25,3
63 cm	23,6
68 cm	22,5
73 cm	21,7
78 cm	21,3
83 cm	21,0
88 cm	20,6
93 cm	20,5
98 cm	20,3
103 cm	20,1

Teil 4

Linse 80 mm = f

Linse mitte

17,3 cm

Linse 150 mm = f

Linse mitte

24,4 cm

Linse 80 & 150 mm

Linse mitte

14,3 cm | 16,3 cm

Linse 80 & -200 mm

Linse mitte

22,1 cm | 24,1 cm

Linse -200 & 80 mm

Linse mitte

Linse 250 mm = f

Linsemitte

weiß 34,6 - 3,5 cm

blau 34,15 - 3,5 cm

rot 34,8 - 3,5 cm

VT 28.05

D. S. W. J.

Bil
1
-
1
2
2
2
3
3
3
4