

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Ziel des Versuches	3
1.2	Physikalische Zusammenhänge	3
1.3	Versuchsaufbau	5
1.4	Versuchsablauf	5
2	Messungen	6
2.1	Einzelne Sammellinse	6
2.2	Zwei Sammellinsen	6
2.3	Sammel- und Zerstreuungslinse	8
3	Auswertung	9
3.1	Die Linsengleichung	9
3.2	Das Bessel-Verfahren	10
3.3	Das Abbe-Verfahren	11
4	Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse	13
5	Literatur	14
6	Anhang	14
6.1	Laborbuch	14

1 Einleitung

1.1 Ziel des Versuches

Im Rahmen des Versuches sollen verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Brennweite eines Linsensystems überprüft werden: Anhand einer einzelnen Linse ist die Linsengleichung zu verifizieren, ein System aus zwei Sammellinsen wird dem Bessel-Verfahren unterzogen, und durch das Abbe-Verfahren sind die Systembrennweiten und Hauptebenen eines Aufbaus aus Sammellinse und Zerstreuungslinse zu bestimmen.

1.2 Physikalische Zusammenhänge

Die durchgeführten Versuche gestalten sich derart, dass die Wellennatur des Lichtes vernachlässigbar ist, sie somit im Rahmen der geometrischen Optik behandelt werden können.

Betrachtet man eine dünne Linse mit den Krümmungsradien R_1 und R_2 sowie einem Brechungsindex n der Linse, so erhält man unter der Annahme, dass sich vor und nach der Linse ein Medium mit Brechungsindex $n = 1$ befindet, eine Brennweite

$$f = \frac{1}{n-1} \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right). \quad (1.1)$$

Für die Brennweite f dünner Linsen gilt die Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (1.2)$$

bei Gegenstandsweite g und Bildweite b . Das Verhältnis aus der Höhe B des Bildes und der Höhe G des Gegenstandes nennen wir Lateralvergrößerung β . Mit Hilfe des Strahlensatzes (vergl. Abb. 1) kann geschrieben werden:

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \quad (1.3)$$

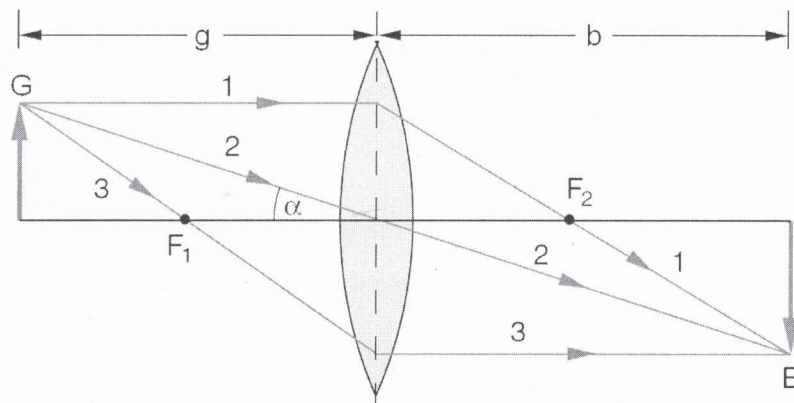


Abbildung 1: Schematische Darstellung einer Abbildung an einer dünnen Linse: Konstruktionsstrahlen 1, 2 und 3 für die Abbildung eines Gegenstandes G auf ein Bild B über eine Linse mit Brennpunkten in F_1 und F_2 . [V70, S. 5, Abb. 70.4]

Wenn die Linse eine nicht vernachlässigbare Dicke d besitzt, so kann sie behandelt werden wie zwei dünne Linsen mit den Brennweiten f_1 und f_2 , die im Abstand d positioniert sind. Die Brennweite berechnet sich dann mit der Gullstrand-Gleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \quad (1.4)$$

Sind die Linsen sehr nahe beieinander und ist $|d| \ll |f_1 + f_2|$, dann ist

$$\frac{1}{f} \approx \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (1.5)$$

und die Brechkräfte $1/f_i$ der Einzellinsen addieren sich zur Brechkraft des Systems.

Abbildung mit Einzellinse

Bei der Abbildung eines Objekts mit Hilfe einer Sammellinse muss beachtet werden, dass es einen Mindestabstand zwischen Objekt und Schirm gibt, sodass eine Linsenposition zur scharfen Abbildung gefunden werden kann. Dieser Abstand entspricht dem Vierfachen der Brennweite des Systems, wie wie folgt hergeleitet werden kann:

Es wird die Gesamtlänge s des Systems definiert als Summe der Bild- und Gegenstandsweite

$$s := g + b, \quad (1.6)$$

wodurch sich die Linsengleichung 1.2 umschreibt zu

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{s-g} \quad (1.7)$$

$$= \frac{s}{g \cdot s + g^2}. \quad (1.8)$$

Die Gegenstandsweite g , bei der für feste s und f ein scharfes Bild entsteht, löst also die quadratische Nullgleichung

$$0 = g^2 - s \cdot g + s \cdot f \quad (1.9)$$

$$\Rightarrow g = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2 - 4sf}{4}}. \quad (1.10)$$

Nun ist leicht erkennbar, dass zwei reelle Lösungen vorliegen, falls $s > 4f$, nur eine Lösung für $s = 4f$, und sonst keine reellen Lösungen. Ebenfalls lässt sich die Symmetrie der Positionen um die Systemmitte herauslesen.

Bessel-Verfahren

Wenn b und g nicht einfach zu messen sind, können auch der Abstand s vom Gegenstand zum Bild und der Abstand e gemessen werden, wobei dieser der Abstand zwischen den beiden Linsenpositionen ist, bei denen der Gegenstand scharf abgebildet wird. Mit Gleichung (1.1) kann gefolgert werden:

$$f = \frac{s^2 - e^2}{4s}. \quad (1.11)$$

Dies gilt allerdings nur, wenn der Abstand der Hauptebenen sehr klein ist gegenüber der Länge s .

Abbe-Verfahren

Will man neben der Brennweite eines mehrlinsigen Systems auch die Lage der Hauptebenen bestimmen, so führt man die gestrichelten Gegenstands- und Bildweiten g' und b' ein. Diese stellen den Abstand zwischen Gegenstand bzw. Bild und einem arbiträr gewählten festen Punkt am Linsensystem dar. Man kann daher ein h_1 und ein h_2 finden mit

$$g' = g + h_1 \quad (1.12)$$

$$b' = b + h_2. \quad (1.13)$$

~~1.1.1.1~~ *mindest*

fancy Wort!!

Mit der Abbildungsgleichung (1.2) ergibt sich folgender Zusammenhang

$$g' = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \cdot f_1 + h_1 \quad \text{und} \quad b' = (1 + \beta) \cdot f_2 + h_2 \quad (1.14)$$

bei der objektseitigen Brennweite f_1 und der bildseitigen Brennweite f_2 . Somit können sowohl die Brennweiten als auch die Lagen der Hauptebenen bestimmt werden.

1.3 Versuchsaufbau

Sämtliche Elemente des Versuchsaufbaus werden auf einer optischen Bank befestigt: Auf ihrer linken Seite befindet sich eine LED, die in den Brennpunkt einer Kollimationslinse gesetzt und so ausgerichtet ist, dass der entstehende Lichtstrahl nahezu parallel zur Bank verläuft. Gegenüberlegend ist ein Schirm befestigt; als abzubildender Gegenstand wird eine Dia mit konzentrischen Kreisen der Durchmesser 7 mm, 14 mm und 21 mm verwendet, die sich rechts der Kollimationslinse befindet. Zwischen Gegenstand und Schirm befindet sich eine verschiebbare Halterung, in die sich auf jeder Seite eine Linse einschrauben lässt; dabei beträgt der Abstand zweier eingebrachter dünner Linsen 20 mm. Zu Messzwecken stehen ein Maßband und ein Geodreieck zur Verfügung.

1.4 Versuchsablauf

Zunächst wird eine einzelne Sammellinse mit Brennweite $f = 150$ mm untersucht: Für fünf verschiedene Schirmabstände werden jeweils die Position der Linse, in der ein scharfes vergrößertes Bild entsteht, und die, für die ein selbiges verkleinertes Bild entsteht, festgehalten. Nun wird mit dem Maßband der Abstand zwischen zwei Referenzpunkten gemessen (für g zwischen linkem Dia-Ende und dem Ende der Linsenhalterung, an dem die Linse eingeschraubt ist; für b zwischen letzterem und der Schirmoberfläche). Die so gewonnenen Daten werden tabelliert.

Im Anschluss soll ein System aus zwei Sammellinsen betrachtet werden, wozu in der linken Öffnung der Halterung eine Linse mit Brennweite $f = 80$ mm hinzugefügt wird. Da das Bessel-Verfahren angewendet werden soll, wird der Gesamtabstand s zwischen Gegenstand und Schirm direkt gemessen, zur Errechnung von e desweiteren die Abstände l_g und l_k der Linsenhalterungsmittelpunkte zum Gegenstand für großes bzw. kleines Bild. Insgesamt werden fünf solcher Wertetripel aufgezeichnet.

Schließlich wird in der linken Öffnung der Halterung eine Zerstreuungslinse mit Brennweite $f = -200$ mm befestigt, ebige Sammellinse mit $f = 80$ mm wird rechts eingeführt. Für das so entstandene System werden in zehn Instanzen zur Anwendbarkeit des Abbe-Verfahrens scheinbare Gegenstandsweite g' und scheinbare Bildweite b' (relativ zum Halterungsmittelpunkt) sowie der Durchmesser eines Bildringes d gemessen, letzterer mit Hilfe des Geodreieckes; je nach Messbarkeit wird der kleinere oder der mittlere Kreis verwendet. Desweiteren wird für jeden Messwert ein Fehler abgeschätzt.

ist "Tupel"
nicht richtig?

2 Messungen

Im Nachfolgenden verwenden wir den Begriff *Arithmetisches Mittel* \bar{x} für eine Größe x mit N Messwerten synonym mit

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2.1)$$

die Umschreibung *Standardabweichung* s_x für die Größe

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2.2)$$

und *Standardabweichung des Mittelwertes* $s_{\bar{x}}$ als Ausdruck für

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}. \quad (2.3)$$

Als *gaußsch fortgepflanzten Fehler* eines von n Größen x_i mit Fehlern s_{x_i} abhängigen y bezeichnen wir

$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot s_{x_i} \right)^2}. \quad (2.4)$$

Zwecks der Übersichtlichkeit werden einfache Berechnungen aus den Messdaten gleich den Tabellen angefügt. Diese berechneten Größen sind mit einem „*“ gekennzeichnet.

2.1 Einzelne Sammellinse

Im Rahmen des ersten Versuchsteiles wurden die in Tab. 1 festgehaltenen Daten für die Bild- und Gegenstandsweiten b und g eines scharfen Bildes gemessen sowie ein Fehler $s_{\text{Maßband}}$ auf beide mit dem Maßband vollzogenen Messungen und ein Fehler s_{Linse} auf die Linsenposition nach der Scharfstellung abgeschätzt:

$$s_{\text{Linse}} = 10 \text{ mm}; \quad s_{\text{Maßband}} = 1 \text{ mm} \quad (2.5)$$

Da der Scharfstellungsfehler deutlich überwiegt, wird der Messfehler vernachlässigt; jedoch ist festzuhalten, dass s_{Linse} der Erfahrung nach mit kleinerem Bild ebenfalls tendentiell kleiner wird. Die nominelle Brennweite der Linse beträgt $f = 150 \text{ mm}$.

2.2 Zwei Sammellinsen

Für das System aus zwei Sammellinsen ($f_1 = 80 \text{ mm}$, $f_2 = 150 \text{ mm}$) wurden für fünf verschiedene Gesamtabstände zwischen Gegenstand und Schirm jeweils der Abstand des Linsensystems (d.h. dessen geometrischen Mittelpunkts) zum Gegenstand für vergrößerndes und verkleinerndes Bild gemessen (l_1 , l_2). Der Fehler auf letztere entspricht wie oben dem Fehler auf Scharfstellen, s_s geht auf die abgeschätzte Messungenauigkeit mit dem Maßband zurück. Da das Linsensystem leichter scharfzustellen war, ist s_l nur halb so groß wie bei der Einzellinse gewählt. Die errechnete Differenz $e = l_2 - l_1$ und deren gauß'scher Fehler $s_e = \sqrt{2}s_l$ sind ebenfalls in Tab. 2 tabelliert.

g [mm]	b [mm]
264	357
356	265
219	505
508	215
199	650
651	197
190	771
772	190
185	890
890	185
s [mm]	10

Tabelle 1: Tabelliert sind die Messdaten der Untersuchung einer einzelnen Sammellinse mit Brennweite $f = 150\text{mm}$: Bei g und b handelt sich es um die Gegenstands- und die Bildweiten, der Fehler s auf beide ist abgeschätzt.

s [mm]	l_1 [mm]	l_2 [mm]	* e [mm]	s_s [mm]
332	76	261	185	2
497	71	434	363	s_l [mm]
664	68	598	530	5
796	67	733	666	* s_e [mm]
942	66	883	817	7

Tabelle 2: Messdaten eines Systems aus zwei Sammellinsen ($f = 150\text{mm}$ in der rechten und $f = 80\text{mm}$ in der linken Halterung). Enthalten sind die Gesamtweite zwischen Schirm und Gegenstand s , die Gegenstandsentsfernungen l_i für vergrößernde ($i = 1$) und verkleinernde ($i = 2$) Abbildungen sowie deren Differenz $e = |l_2 - l_1|$. Die Fehler auf s und l_i sind Abschätzungen, der Fehler auf e ist berechnet über gaußsche Fortpflanzung als $s_e = \sqrt{2}s_l$.

2.3 Sammel- und Zerstreulinse

Für den letzten Versuchsteil waren die scheinbaren Bild- und Gegenstandsweiten g' und b' eines Linsensystems aus Sammellinse ($f = 80\text{mm}$, rechts) und Zerstreulinse ($f = -200\text{mm}$, links) zu messen, für welche als Referenzpunkt wieder der geometrische Mittelpunkt des Systems gewählt wurde. Zur Bestimmung der Bildgröße wurde der Durchmesser des kleinsten bzw. des mittleren abgebildeten Ringes mit einem Geodreieck vermessen, die korrespondierenden Gegenstandsdurchmesser waren angegeben. Wieder handelt es sich bei allen Fehlern um Schätzungen, die angegebenen d_G wurden als im untersuchten Rahmen fehlerfrei angenommen. Alle Messgrößen sind tabelliert in Tab. 3.

g' [mm]	b' [mm]	d_B [mm]	d_G [mm]
219	248	5.5	7.0
332	197	3.5	7.0
379	189	5.5	14.0
436	179	4.0	14.0
144	466	18.0	7.0
148	414	16.5	7.0
161	363	14.0	7.0
167	342	12.5	7.0
187	293	9.5	7.0
129	588	26.5	7.0
128	678	32.0	7.0
117	799	39.5	7.0
$s_{g'}$ [mm]	$s_{b'}$ [mm]	s_{d_B} [mm]	s_{d_G} [mm]
2	2	0.5	0.0

Tabelle 3: Messdaten für ein System aus Sammellinse ($f = 80\text{mm}$, rechts) und Zerstreulinse ($f = -200\text{mm}$, links). Bei g' und b' handelt es sich um die Pseudo-Gegenstands- bzw. Bildweiten gemessen vom geometrischen Systemmittelpunkt, d_B bezeichnet den Durchmesser eines vermessenen Ringes im Bild, d_G den zugehörigen Gegenstandsdurchmesser. Mit Ausnahme letzterer (angegebenen) Größe, die als fehlerfrei angenommen wird, handelt es sich bei allen Fehlern um Abschätzungen.

3 Auswertung

3.1 Die Linsengleichung

Aus den Ergebnissen der Einzellinsenmessung (Tab. 1) ergeben sich direkt die Inversen g^{-1} und b^{-1} in Tab. 4, die korrespondierenden Fehler folgen aus gauß'scher Fortpflanzung:

$$s_{g^{-1}} = \frac{s_g}{g^2} \quad ; \quad s_{b^{-1}} = \frac{s_b}{b^2}. \quad (3.1)$$

g^{-1} [mm ⁻¹]	b^{-1} [mm ⁻¹]	* $s_{g^{-1}}$ [mm ⁻¹]	* $s_{b^{-1}}$ [mm ⁻¹]
3.79E-03	2.80E-03	1.4E-04	7.8E-05
2.81E-03	3.77E-03	7.9E-05	1.4E-04
4.57E-03	1.98E-03	2.0E-04	3.9E-05
1.97E-03	4.65E-03	3.9E-05	2.2E-04
5.03E-03	1.54E-03	2.5E-04	2.4E-05
1.54E-03	5.08E-03	2.4E-05	2.6E-04
5.26E-03	1.30E-03	2.8E-04	1.7E-05
1.30E-03	5.26E-03	1.7E-05	2.8E-04
5.41E-03	1.12E-03	3.0E-04	1.3E-05
1.12E-03	5.41E-03	1.3E-05	2.9E-04

Tabelle 4: Aus den Messdaten der Einzellinse ($f = 150\text{mm}$, vgl. Tab. 1) gewonnene inverse Bild- und Gegenstandsweiten b^{-1} und g^{-1} mit gauß'schen Fehlern $s_{b^{-1}} = s_b b^{-2}$ und $s_{g^{-1}} = s_g g^{-2}$.

Stellt man die Abhängigkeit zwischen b^{-1} und g^{-1} grafisch dar, wie in Abb. 2 geschehen, und unterlegt den durch Gl. 1.2 mit nomineller Brennweite $f = 150\text{mm}$ vorhergesagten Verlauf

$$b^{-1} = (150\text{mm})^{-1} - g^{-1}, \quad (3.2)$$

so ist ein sehr linearer Verlauf erkennbar, die Fehler scheinen recht groß abgeschätzt. Interessant ist jedoch, dass die Messpunkte scheinbar systematisch unterhalb der Gerade der nominellen Brennweite liegen. Dies geschieht zwar innerhalb der Fehler, deutet dennoch an, dass die Linse eine etwas schwächere Brechkraft besitzen könnte als angegeben.

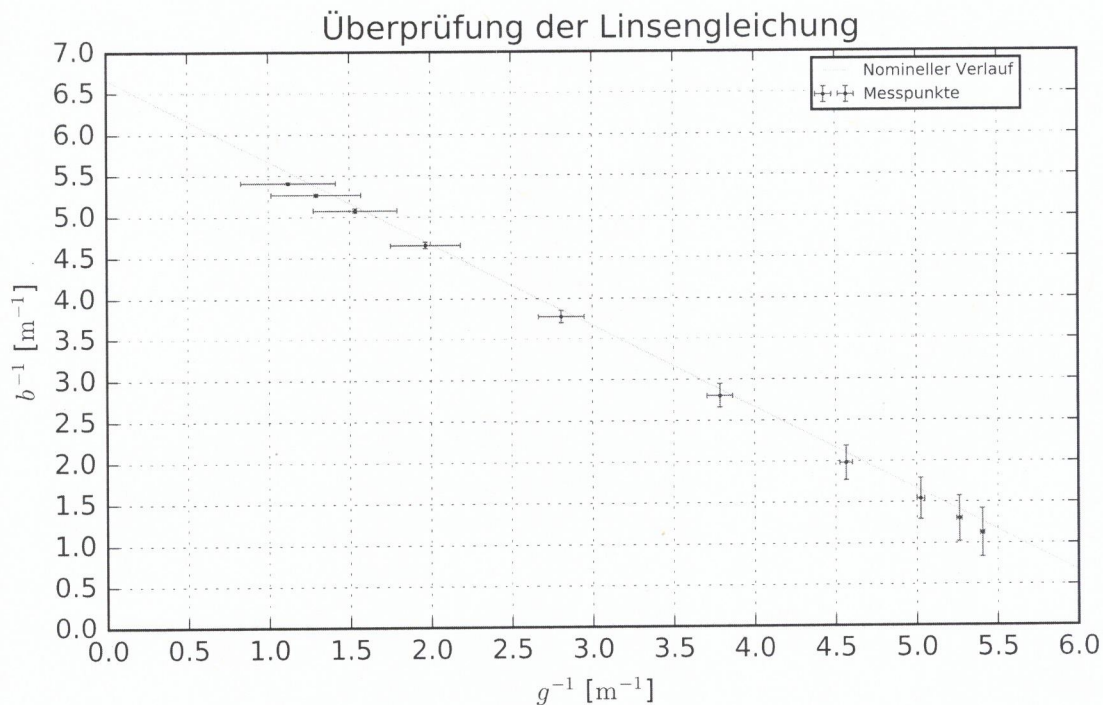


Abbildung 2: Grafische Auftragung der Werte von b^{-1} gegen g^{-1} und deren Fehlern, wie entnommen aus Tab. 4, unterlegt mit der Geraden des nominellen Verlaufes $b^{-1}(g^{-1}) = (150\text{mm})^{-1} - g^{-1}$. Erstellt mit pylab/matplotlib in Python3.

3.2 Das Bessel-Verfahren

Die Daten zum System zweier Sammellinsen Tab. 2 sollen nun dem Bessel-Verfahren unterzogen werden. Dazu wird unter Ausnutzung von Gleichung (1.11)

$$f_{\text{Bessel}} = \frac{s^2 - e^2}{4s}$$

die Brennweite berechnet. Nach dieser Formel ergeben sich für die fünf Durchführungen Brennweiten wie dargestellt in Tab. 5 und deren arithmetisches Mittel \tilde{f} . Da die Größen s und e voneinander abhängig sind, werden anstatt eines gauß'schen Fehlers die Standardabweichung s_f der fünf Werte f_{Bessel} und die resultierende Standardabweichung des Mittelwertes $s_{\tilde{f}}$ (wie zu Beginn des Kapitels *Messungen* beschrieben) verwendet. Aus dem Besselverfahren ergibt sich somit eine Systembrennweite von

$$f_{\text{Bessel}} = (58.7 \pm 0.6) \text{mm}^{-1}; \quad (3.3)$$

mit der Gullstrand-Gleichung (1.4) und den nominellen Brennweiten der Einzellinsen erhält man

$$f_{\text{Gullstrand}} = 57.1 \text{mm}^{-1}. \quad (3.4)$$

s [mm]	l_1 [mm]	l_2 [mm]	* e [mm]	s_s [mm]	* f_{Bessel} [mm]	* s_f [mm]
332	76	261	185	2	57.2	1.2
497	71	434	363	* s_l [mm]	58.0	* f_{Bessel} [mm]
664	68	598	530	5	60.2	58.7
796	67	733	666	* s_e [mm]	59.7	* $s_{\bar{f}}$ [mm]
942	66	883	817	7	58.4	0.6

Tabelle 5: Messdaten des Systems aus zwei Sammellinsen ($f = 150$ mm und $f = 80$ mm) identisch zu Tab. 2 mit errechneter Größe $f_{\text{Bessel}} = \frac{s^2 - e^2}{4s}$, deren arithmetischem Mittel \bar{f}_{Bessel} , Standardabweichung der Einzelmessungen s_f und des Mittelwertes $s_{\bar{f}}$.

3.3 Das Abbe-Verfahren

In Tab. 6 dargestellt sind die von einem arbiträren Punkt am Linsensystem gemessenen Gegenstands- und Bildweiten g' und b' sowie die aus den Ringgrößen d_G und d_B von Gegenstand und Bild errechnete Lateralvergrößerung β mit gauß'schem Fehler s_β :

$$\beta = \frac{d_B}{d_G} \quad ; \quad s_\beta = \frac{s_{d_B}}{d_G}. \quad (3.5)$$

Ebenfalls ist die Größe $1 + \beta^{-1}$ mit gauß'schem Fehler

$$s_{\beta^{-1}} = \frac{s_\beta}{\beta^2} \quad (3.6)$$

angegeben. Nun sollen die aus den Gleichungen (1.14)

$$g' = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \cdot f_1 + h_1 \quad \text{und} \quad b' = (1 + \beta) \cdot f_2 + h_2$$

hervorgehenden Zusammenhänge grafisch ausgewertet werden: In Abb. 3 ist der Verlauf der Größen $1 + \beta^{-1}$ in Abhängigkeit von g' sowie $1 + \beta$ in Abhängigkeit von b' dargestellt und durch Regressionsgeraden unterlegt. Diese ergeben sich zu:

$$R_1(g') = 9.9 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1} \cdot g' - 0.041 \quad (3.7)$$

$$R_2(b') = 8.5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1} \cdot b' - 0.214. \quad (3.8)$$

Es ergeben sich durch Koeffizientenvergleich und Umstellen von Gleichung (1.14) sofort die Brennweiten f_1 , f_2 als Inverse der Geradensteigungen sowie die Hauptebenenverschiebungen h_1 , h_2 als negative Achsenschnitte multipliziert mit der Brennweite:

$$f_1 = 101.5 \text{ mm}; \quad f_2 = 117.1 \text{ mm} \quad (3.9)$$

$$h_1 = 4.2 \text{ mm}; \quad h_2 = 25.1 \text{ mm}. \quad (3.10)$$

Diese Struktur ist in Abb. 4 einer maßstäblichen Skizze des Linsensystems überlagert.

g' [mm]	b' [mm]	d_B [mm]	d_G [mm]	* β	* s_β	* $1 + \beta^{-1}$	* $s_{\beta^{-1}}$
219	248	5.5	7.0	0.79	0.07	2.27	0.12
332	197	3.5	7.0	0.50	0.07	3.00	0.29
379	189	5.5	14.0	0.39	0.04	3.55	0.23
436	179	4.0	14.0	0.29	0.04	4.50	0.44
144	466	18.0	7.0	2.57	0.07	1.39	0.01
148	414	16.5	7.0	2.36	0.07	1.42	0.01
161	363	14.0	7.0	2.00	0.07	1.50	0.02
167	342	12.5	7.0	1.79	0.07	1.56	0.02
187	293	9.5	7.0	1.36	0.07	1.74	0.04
129	588	26.5	7.0	3.79	0.07	1.26	0.01
128	678	32.0	7.0	4.57	0.07	1.22	0.01
117	799	39.5	7.0	5.64	0.07	1.18	0.01
s'_g [mm]	s'_b [mm]	s_{d_B} [mm]	s_{d_G} [mm]				
2	2	0.5	0.0				

Tabelle 6: Messdaten des Systems aus Sammel- und Zerstreulinse ($f = 80\text{mm}$ und $f = -200\text{mm}$) identisch zu Tab. 2 mit errechneten Größen $\beta = d_B d_G^{-1}$ und $1 + \beta^{-1}$ sowie deren gauß'schen Fehlern $s_\beta = s_{d_B} d_G^{-1}$, $s_{\beta^{-1}} = s_\beta \beta^{-2}$.

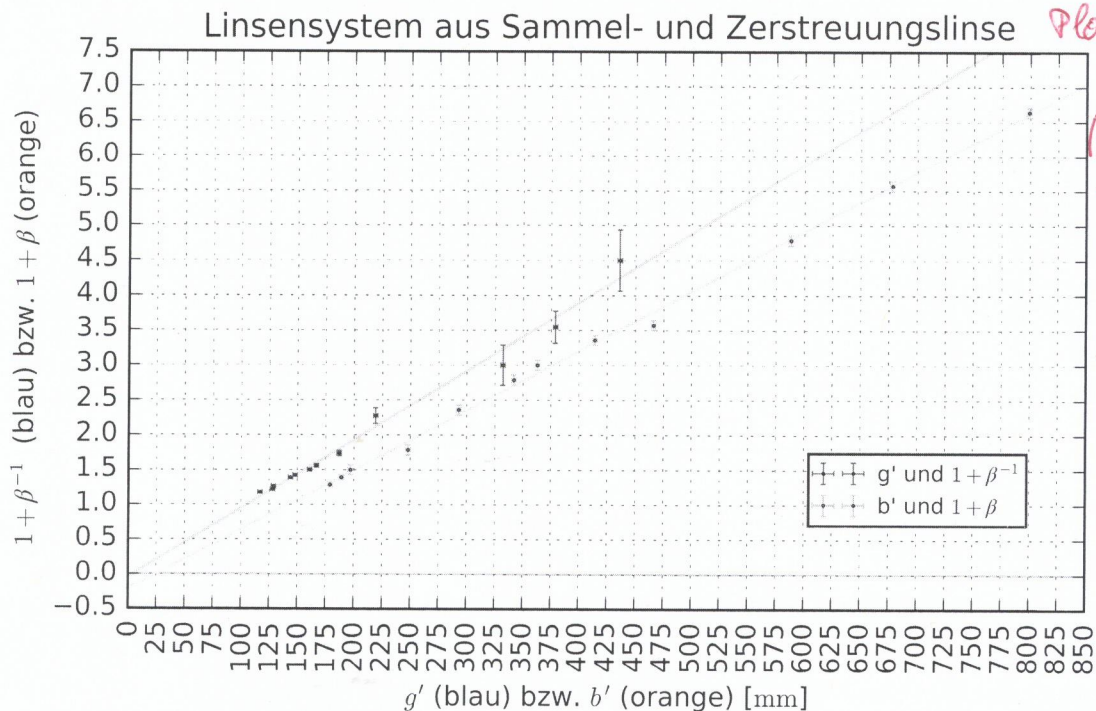


Abbildung 3: Auftragung der Wertetupel ($g', 1 + \beta^{-1}$) in blau sowie ($b', 1 + \beta$) in orange, auf Grundlage der Daten aus Tab. 6, mit eingezeichneten Fehlerbalken. Die ebenfalls eingezeichneten Regressionsgeraden wurden generiert mit Hilfe des Moduls stats in ScientificPython und lauten $R_1(g') = 9.85 \cdot 10^{-3} \text{mm}^{-1} \cdot g' - 0.041$ (blau), $R_2(b') = 8.54 \cdot 10^{-3} \text{mm}^{-1} \cdot b' - 0.214$ (orange). Erstellt mit pylab/matplotlib in Python3.

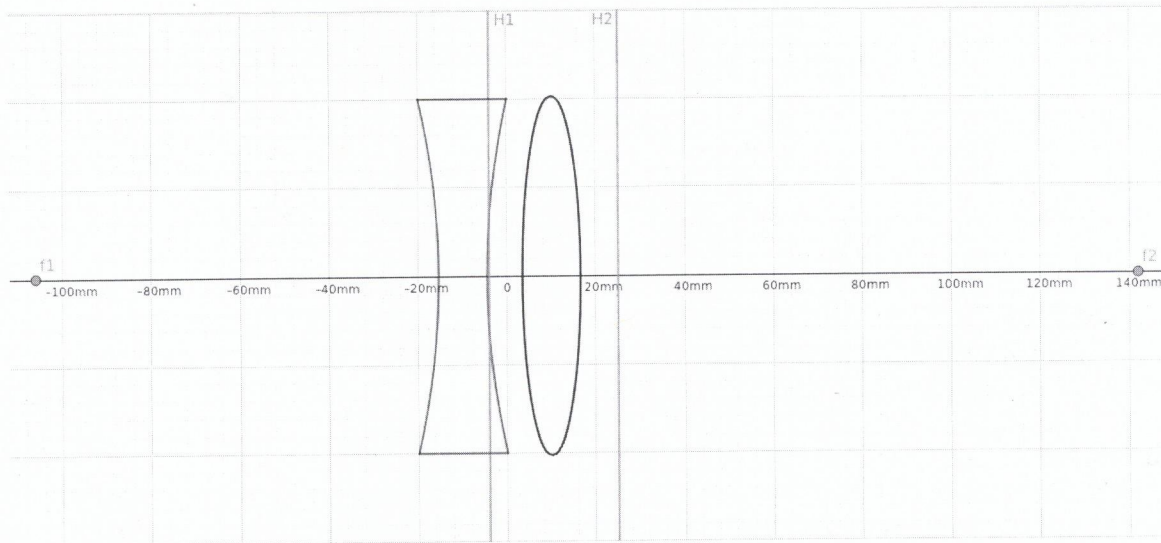


Abbildung 4: Dargestellt ist das Linsensystem aus einer Zerstreulinse und einer Sammellinse mit Abstand 20 mm. Dazu sind die Hauptebenen $H1$ und $H2$ mit den links- bzw. rechtsseitigen Brennweiten $f1$ und $f2$ eingezeichnet. Mit geogebra.org erstellt.

4 Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Im ersten Versuchsteil konnte der durch die Linsengleichung (1.2) gegebene lineare Zusammenhang zwischen Brennweite, Bildweite und Gegenstandsweite für eine Sammellinse bestätigt werden (siehe Abb. 2). Es fiel auf, dass die abgeschätzten Fehler für weite Teile des untersuchten Spektrums zu groß waren; im Rahmen des spezifischen Zieles, der grafischen Bestätigung des Zusammenhanges, macht dies jedoch keinen nennenswerten Unterschied.

Anschließend wurde das Bessel-Verfahren auf ein System aus zwei Sammellinsen angewandt. Dazu wurde die Brennweite als arithmetisches Mittel der durchaus variierenden, nach der Bessel'schen Formel (1.11) berechneten, Brennweiten der Einzelmessungen mit Standardabweichung des Mittelwertes bestimmt auf

$$f_{\text{Bessel}} = (58.7 \pm 0.6) \text{ mm.}$$

Verglichen mit der aus den nominellen Brennweiten der Einzellinsen berechneten Brennweite

$$f_{\text{Gullstrand}} = 57.1 \text{ mm.}$$

weicht diese im Bereich von drei Standardabweichungen ab; jedoch ist nicht zu sagen, ob die kleine Zahl an Durchführungen die Ursache ist, der Abstand der Hauptebenen einen Einfluss nimmt, oder die Linsen nur in diesem Rahmen von ihren nominellen Brennweiten abweichen. Im Ganzen zeigt sich jedoch, dass die Bessel'sche Methode sich durchaus zur Bestimmung einer Gesamtbrennweite eignen kann.

Schließlich ist noch das Abbe-Verfahren zu diskutieren: Die gewonnenen Werte

$$\begin{aligned} f_1 &= 101.5 \text{ mm} & ; & & f_2 &= 117.1 \text{ mm} \\ h_1 &= 4.2 \text{ mm} & ; & & h_2 &= 25.1 \text{ mm.} \end{aligned}$$

zeigen, dass die gegenstandsseitige Hauptebene leicht links, aber noch innerhalb der Systemhalterung liegt, während sich die bildseitige Hauptebene, auf Seiten der Sammellinse, mit ca.

15mm Abstand deutlich außerhalb des Systems befindet. Dies ist bei einem System mit Zerstreuungslinsen zu erwarten; auffallend ist jedoch, dass die Brennweiten f_1 und f_2 sich deutlich unterscheiden. Dies scheint dem Grundsatz der umkehrbaren Strahlengänge in der geometrischen Optik zu widersprechen. Betrachtet man Abb. 3 und die zugehörigen Datensätze Tab. 6, so erkennt man, dass die Steigung der g' -Linie deutlich durch die Wertepaare für große g' , die sehr große Fehler besitzen und nicht sehr zahlreich sind gegenüber Werten für große b' , verfälscht wird. Grund hierfür ist, dass für große g' das Bild des Gegenstandes sehr klein wird, somit zum einen nicht sehr viele Datensätze aufgenommen wurden, zum anderen die vorhandenen deutlich fehleranfälliger sind. Daher lässt sich, zumindest qualitativ, folgern, dass die Brennweiten f_1 und f_2 deutlich näher beieinander liegen sollten, und die Theorie, also dass sie identisch sein müssten, stützen. Das Abbe-Verfahren erweist sich somit als sehr aufschlussreich, da anders als bei den vorherigen Versuchen eine ungefähre Lage der Hauptebenen gewonnen werden konnte, jedoch in den hier untersuchten Dimensionen auch fehleranfällig. Für ein konsistenteres Ergebnis müsste man die Messpräzision durch andere Instrumente erhöhen oder die Anzahl der Messungen deutlich vergrößern und homogener über den bemessenen Bereich verteilen.

Abschließend lässt sich festhalten, dass die geometrische Optik sich in den hier untersuchten Rahmenbedingungen, also Linsensystemen üblicher Dimensionen, sehr gut anwenden lässt und auch komplexere Linsensysteme, durch etwa das Bessel- oder Abbe-Verfahren, mit beschränktem Mehraufwand relativ konsistent untersucht werden können. Obwohl die geringe Zahl der Durchführungen nur begrenzte Schlüsse erlauben, kann die Anwendbarkeit der Verfahren gut abgeschätzt werden.

5 Literatur

[V70] Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 2; Versuchsanleitung Versuch 70

6 Anhang

6.1 Laborbuch

Es folgen Scans des Laborbuches.

Versuch 70

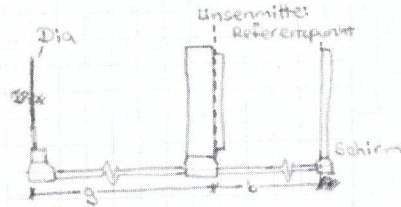
Lichtstrahl zentriert, Kollimationslinse positioniert,
Dia bei voller Beugung eingespannt

Teil 1: Einzellinse Sammellinse, $f = 150 \text{ mm}$

Linse eingespannt, geschätzter Fehler auf 'scharfes Bild' (Linsenpos.)

$s_{\text{Linse}} = 10 \text{ mm}$

Durchf.	g [mm]	b [mm]
1 _{gras}	264	257
1 _{klein}	256	265
2 _{gras}	219	308
2 _{klein}	308	215
3 _{gras}	199	351
3 _{klein}	351	197
4 _{gras}	180	371
4 _{klein}	372	180
5 _{gras}	185	330
5 _{klein}	330	185



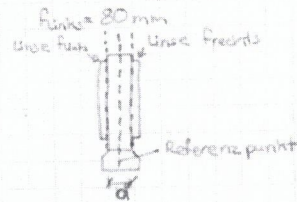
Feststellung: Für kleineres Bild kleinerer Fehler sehen, nicht quantifizierbar

$s_{\text{Maßband}} = 2 \text{ mm}$ (geschätzt)
so vernachlässigbar $\approx 0\%$ Fehler

Teil 1 abgeschlossen.

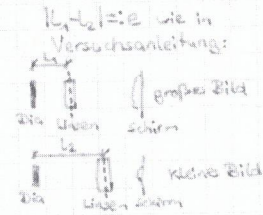
Teil 2: Zwei Sammellinsen $f_{\text{rechts}} = 150 \text{ mm}$

Linse eingespannt, $d = 20 \text{ mm}$
Schnell geschätzte Gesamtennenweite: $f_{\text{ges}} = 57 \text{ mm}$
(mit Formel 70.7)



Referenzpunkt Linse: Mitte der Halterung

Durchf.	g	L_1 [mm]	L_2 [mm]
1 _{gras}	332	76	261
1 _{klein}	497	71	434
2 _{gras}	664	68	598
2 _{klein}	796	67	733
3 _{gras}	942	66	883



$L_1, L_2 = 2$ wie in Versuchsanleitung:

$s_{\text{Maßband}} = 2 \text{ mm}$ (geschätzt)

$s_{\text{Linse}} = 5 \text{ mm}$ (geschätzt, größer für große Bilder, kleiner für kleine)

Teil 2 abgeschlossen.

Abbildung 5: Scan des Laborbuches, Seite 1

Teil 3: Sammell- und Streulinse $f_{\text{Streu}} = -200 \text{ mm}$ $f_{\text{Sammel}} = 80 \text{ mm}$

Linsen eingespannt, $f_{\text{Ges}} = 114 \text{ mm}$

Referenzpunkt:

Mitte der Linsenhalterung



Durchf.	s' [mm]	b' [mm]	di. [mm]
1	218	248	kl. 6,5
2	332	197	kl. 3,5
3	378	189	mi. 3,5 5,5
4	436	179	mi. 4,0
5	484	172	mi.
6	532	164	mi.
7	580	156	mi.
8	628	148	mi.
9	676	140	mi.
10	724	132	mi.

di. klein: Durchmesser des kleinsten Bildringes

mittel: " mittleren "

gross: " größten "

Durchf. 1-4: kleine Bild

5	144	466	kl. 18,0
6	148	414	kl. 16,5
7	161	363	kl. 14,0
8	168 167	342	kl. 12,5
9	187	293	kl. 9,5
10	129	588	kl. 26,5
11	128	678	kl. 32,0
12	117	789	kl. 39,5

Durchf. 5- : großes Bild

$s_d = 0,5 \text{ mm}$ (geschätzt)

$s_i = s_v = 2 \text{ mm}$ (geschätzt)

Teil 3 abgeschlossen

Versuch abgeschlossen.