

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
PHYSIKLABOR FÜR ANFÄNGER*INNEN, TEIL 2
WINTERSEMESTER 2021/22

VERSUCH 53 AM 25.03.2022

Schwingkreis

Gruppe 211:
28.03.2022

Assistent:

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuchs	2
2 Aufbau und Durchführung	2
3 Auswertung und Fehleranalyse	3
3.1 Untersuchung der freien gedämpften Schwingung	3
3.2 Untersuchung der erzwungenen Schwingung	6
4 Diskussion der Ergebnisse	10
4.1 Vergleich mit Literaturwerten	10
4.2 Zusammenstellung der Ergebnisse	10
4.3 Fehlerdiskussion	11
4.4 Verbesserte Messmethoden	12
5 Literatur	13
6 Anhang	14
6.1 Herleitungen	14
6.2 Tabelle und Grafiken	15
6.3 Laborbuch	19
6.4 Tabellenverzeichnis	20
6.5 Abbildungsverzeichnis	20

1 Ziel des Versuchs

In den folgenden Versuchsteilen soll ein RLC-Schwingkreis untersucht werden. Hierfür wird zunächst eine freie, gedämpfte Schwingung betrachtet. Dabei werden die Schwingungsdauer und der Dämpfungsfaktor bestimmt. Anschließend werden bei einem angeregten Schwingkreis das Spannungsamplitudenverhältnis und die Phasenverschiebungen am Widerstand, der Spule und dem Kondensator gemessen.

2 Aufbau und Durchführung

Um die oben genannten Ziele zu erreichen, wird die in [Abbildung 1](#) dargestellte Schaltung verwendet. Dabei sind ein Widerstand R , eine Spule mit Induktivität L und ein Kondensator mit Kapazität C verbaut:

$$\begin{aligned} R &= (50 \pm 3) \Omega, \\ L &= 953 \mu\text{H}, \\ C &= 8,98 \text{ nF}. \end{aligned} \quad (1)$$

Mithilfe folgender Formel aus [1] wird die Resonanzfrequenz f_r bestimmt:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 340\,826 \text{ s}^{-1} \\ \Rightarrow f_r &= 54\,244 \text{ Hz}. \end{aligned} \quad (2)$$

Mit einem Oszilloskop können Spannungen, Frequenzen und Phasen bestimmt werden. Dabei wird ein Differentialtastkopf zwischen Schaltkreis und Oszilloskop geschaltet. Der Knopf ist bei den Messungen nicht gedrückt.

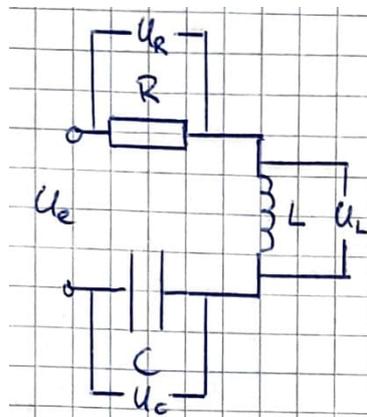


Abb. 1: Skizze der verwendeten Schaltung aus dem Laborbuch im Anhang ([Abbildung 14](#)).

Zunächst wird eine Rechteckspannung mit einer Frequenz f_{\square} , die deutlich kleiner als die Resonanzfrequenz ist, angelegt. Es werden nacheinander die zeitlichen Verläufe der Spannungen an den Bauteilen U_R , U_L und U_C mithilfe eines Oszilloskops ausgelesen.

Anschließend wird eine Sinusspannung mit Frequenz f und Amplitude \hat{U}_0 angelegt und mit dem Oszilloskop bestimmt. Dabei wird darauf geachtet einen Frequenzbereich zwischen 10 kHz und 100 kHz abzudecken, da so der Verlauf um die Resonanzfrequenz genau untersucht werden kann. Es werden am Oszilloskop die Spannungsdifferenzen \hat{U}_R , \hat{U}_L und \hat{U}_C zwischen zwei Peaks, die der doppelten Amplitude entsprechen, abgelesen. Außerdem werden die Phasen ϕ_R , ϕ_L und ϕ_C zwischen Anregungsspannung und Spannung am Bauteil ausgelesen. Die Ableseunsicherheiten werden anhand der Schwankung der ausgegebenen Daten am Oszilloskop abgeschätzt.

3 Auswertung und Fehleranalyse

3.1 Untersuchung der freien gedämpften Schwingung

Um die Eigenschaften des RLC-Schwingkreises zu untersuchen, wird zuerst sein Verhalten bei einer freien Schwingung betrachtet. Es wird eine Rechteckspannung mit Frequenz $f_{\square} = 312 \text{ Hz}$ angelegt. Mit jedem Anstieg oder Abfall der Anregungsspannung wird die Schwingung angeregt. Im Plateaubereich der Rechteckspannung ist die angelegte Spannung nahezu konstant und die Ladungen können frei mit Periodendauer T schwingen. Da durch den Widerstand eine Dämpfung vorhanden ist, wird die Schwingung exponentiell mit Abklingzeit τ gedämpft.

Aus den Kirchhoff'schen Gesetzen folgt folgende Differentialgleichung für die Ladung Q :

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U_0. \quad (3)$$

Aus dieser Differentialgleichung ergibt sich durch einen Exponentialansatz folgende Lösung für den Strom [1]:

$$I(t) = \hat{I} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad (4)$$

wobei sich die Amplitude \hat{I} und die Phase φ aus Anfangsbedingungen ergeben. Die Spannungen an den Bauteilen lassen sich aus dieser Lösung bestimmen und unterscheiden sich von ihr nur durch eine Phase und eine Amplitude. Es wird also eine Sinusschwingung mit Periodendauer $T = 2\pi/\omega_r$ und einer einhüllenden Exponentialfunktion mit Abklingzeit $\tau = 1/\alpha$ erwartet. Für die erwartete Periodendauer T und Abklingzeit τ gilt [1]:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}, \quad (5)$$

$$\tau = \frac{2L}{R}. \quad (6)$$

Die an Widerstand, Spule und Kondensator gemessene, sowie die angelegte Spannung sind in [Abbildung 2](#) gegen die Zeit t aufgetragen.

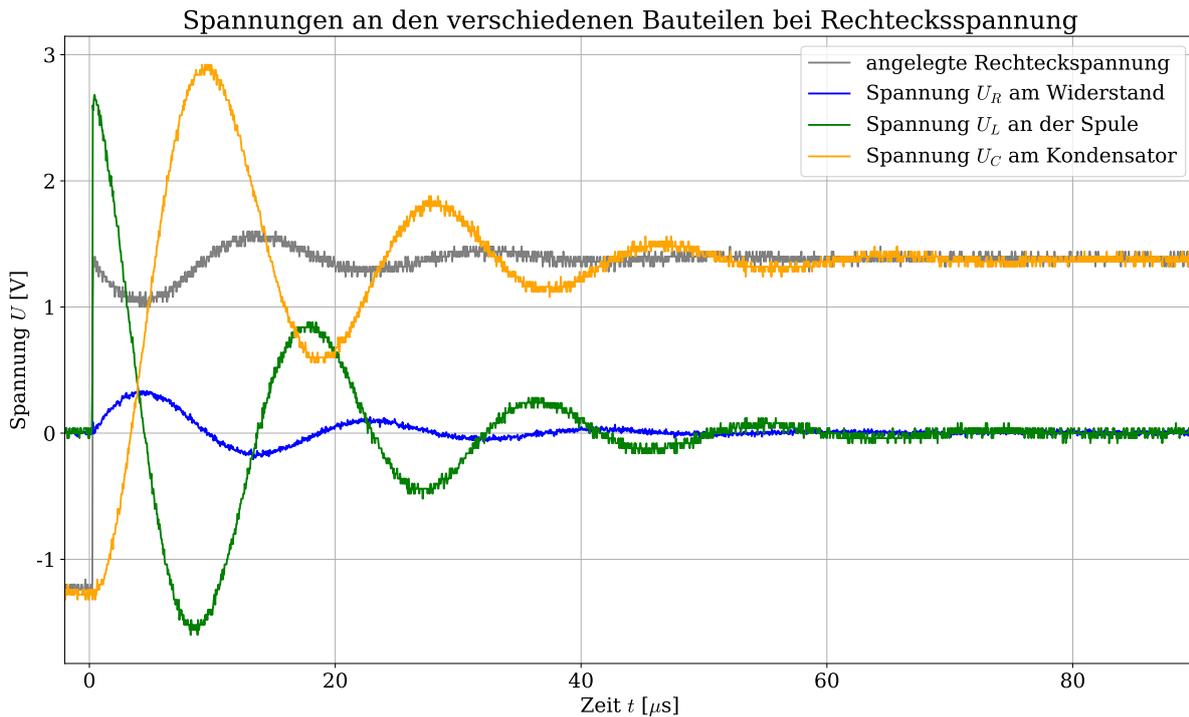


Abb. 2: Aufgetragen sind die gemessenen Spannungen U in V gegen die Zeit t in μs . Die graue Kurve beschreibt dabei die angelegte Rechtecksspannung, die blaue Kurve die gemessene Spannung am Widerstand U_R , die grüne Kurve die gemessene Spannung an der Spule U_L und die orangene Kurve die gemessene Spannung am Kondensator U_C .

Man sieht, dass der erwartete, gedämpfte Sinusverlauf an allen Bauteilen gemessen wird. Außerdem ist zu erkennen, dass die angelegte Rechtecksspannung ebenfalls leichte Schwankungen aufweist. Auffällig ist zudem, dass die Spannung am Kondensator nicht um die Null, sondern um die Amplitude der Rechtecksspannung schwingt. Dies kann dadurch erklärt werden, dass die während der Schwingung angelegte Spannung zwar konstant, aber nicht Null ist. Diese Spannung liegt die ganze Zeit konstant am Kondensator an. In der Differentialgleichung der Ladung, die in [Gleichung 3](#) zu sehen ist, bedeutet dies eine konstante Inhomogenität. Leitet man die Differentialgleichung ab, so erhält man eine Differentialgleichung für den Strom I , die homogen ist. Eine konstante Spannung verändert also das Verhalten des Stromes nicht und die konstante Offset-Spannung kommt nur durch eine ständig im Kondensator vorhandene Ladung zustande. Um die Auswertung zu vereinfachen, wird die Kondensatorspannung um diesen Offset verschoben, damit sie sich analog zu den anderen beiden Messreihen auswerten lässt.

Um die Periodendauer T und die Abklingkonstante τ zu bestimmen, werden zunächst die Positionen der Extrema bestimmt. Hierzu wird die Zeit t_i eines Extremums durch Verschieben einer roten Linie im Diagramm abgeschätzt. Anschließend wird die zu diesem Zeitpunkt herrschende Spannung \hat{U}_i durch graphisches Einzeichnen des Schnittpunktes der Linie mit dem Spannungsverlauf bestimmt. Die Unsicherheit wird dabei so groß geschätzt, dass die gesamte Breite der Spannungsmesswerte in diesem Rahmen liegt. Dieses Vorgehen ist exemplarisch am Widerstand in [Abbildung 3](#) zu sehen und die ermittelten Extrema sind in [Tabelle 1](#) im Anhang zu finden.

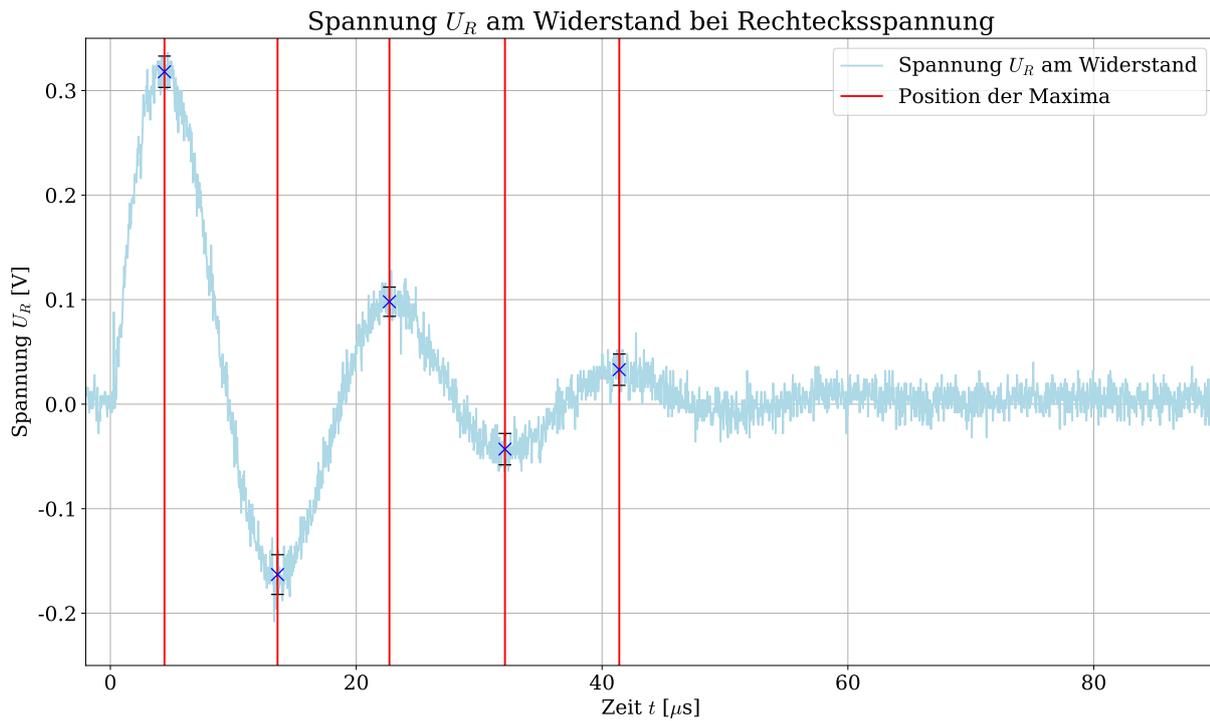


Abb. 3: Aufgetragen ist der Spannungsverlauf U_R in V am Widerstand gegen die Zeit t in μs . Zusätzlich sind die grafisch bestimmten Extrema mit geschätzten Unsicherheiten eingezeichnet.

Aus den Zeiten zweier benachbarter Maxima beziehungsweise Minima können nun Periodendauern T berechnet werden. Dies wird für alle Bauteile durchgeführt. Als Bestwert T_{ges} für die Periodendauer wird der Mittelwert aller ermittelten Periodendauern und als Unsicherheit die Standardabweichung des Mittelwertes verwendet [2]. Es ergibt sich folgender Wert:

$$T_{\text{ges}} = (18,44 \pm 0,14) \mu\text{s}.$$

Um die Abklingkonstante τ zu bestimmen, wird der Betrag aller Spannungsextrema \hat{U} gegen die Zeit t aufgetragen und eine Anpassungsfunktion mittels χ^2 -Minimierung [3] mit freien Parametern A und α durchgeführt. Es wird folgendes zugrundeliegende Abklingverhalten angenommen:

$$\hat{U}(t) = A e^{-\alpha t}. \quad (7)$$

Exemplarisch sind die Extrema des Widerstandes mit der numerischen Minimierung in [Abbildung 4](#) dargestellt.

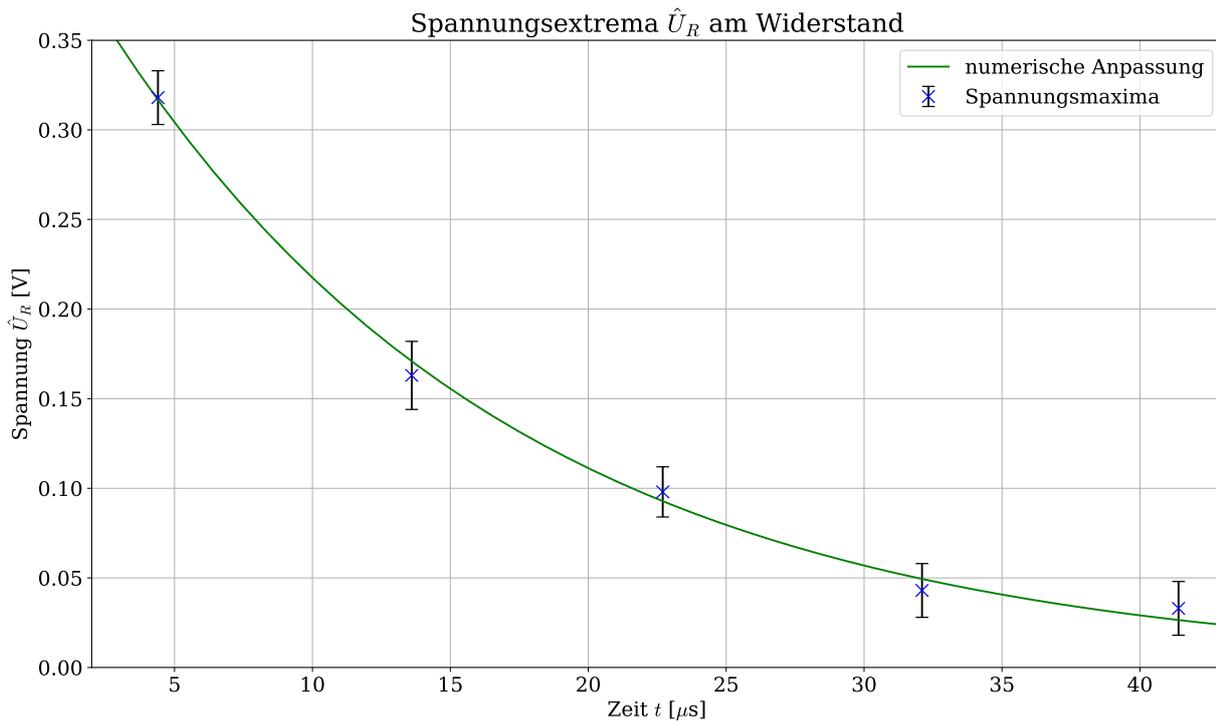


Abb. 4: Aufgetragen sind die Beträge der Spannungsextrema \hat{U}_R in V am Widerstand gegen die Zeit t in μs . Die Unsicherheiten auf die Spannungsextrema sind dabei als Fehlerbalken dargestellt. Zusätzlich ist eine numerische Anpassung der Funktion der Einhüllenden eingezeichnet.

Durch die numerische Minimierung ergeben sich folgende Werte für α und τ am Widerstand:

$$\alpha_R = 67\,100\text{ s}^{-1},$$

$$\tau_R = 14,91\ \mu\text{s}.$$

Für die Spule und den Kondensator wird analog vorgegangen. Die entsprechenden Graphen sind im Anhang in [Abbildung 7](#) bis [Abbildung 10](#) zu finden. Es ergeben sich folgende Werte für die Abklingzeit τ :

$$\tau_L = 15,19\ \mu\text{s},$$

$$\tau_C = 15,51\ \mu\text{s}.$$

Auch hier ergibt sich ein Bestwert mit Unsicherheit aus Bildung von Mittelwert und Standardabweichung vom Mittelwert [2]:

$$\tau_{\text{ges}} = (15,20 \pm 0,17)\ \mu\text{s},$$

$$T_{\text{ges}} = (18,44 \pm 0,14)\ \mu\text{s}.$$

Auf die Verträglichkeit der Periodendauer und der Abklingkonstanten mit der Theorie wird in der Fehlerdiskussion eingegangen. Dort wird außerdem die Anpassungsgüte der numerischen Minimierung diskutiert.

3.2 Untersuchung der erzwungenen Schwingung

In diesem Versuchsteil soll das Verhalten des Schwingkreises bei einer Anregung mit einer Sinusspannung der Frequenz f und Amplitude \hat{U}_0 untersucht werden. Dazu werden in einem Bereich

bis 100 kHz Messwerte für die Gesamtspannungsamplitude U_0 , die Spannungen an den drei Bauteilen U_R , U_L und U_C und die Phasenverschiebung ϕ gemessen. Diese sollen dann mit der Theorie verglichen werden.

Zur Herleitung der zum Vergleich verwendeten Theorie wird wie in [4] vorgegangen. Die aus den Kirchhoff'schen Gesetzen resultierende inhomogene Differentialgleichung führt mit einem Exponentialansatz für die Ladung $Q(t) = \hat{Q} \exp(2\pi i f t)$ auf folgenden Zusammenhang für die komplexe Amplitude \hat{Q} der Ladung:

$$\ddot{Q}(t) + \frac{R}{L} \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{LC} = \frac{\hat{U}_0}{L} e^{2\pi i f t} \quad (8)$$

$$\Rightarrow \hat{Q} = \frac{\hat{U}_0}{L} \cdot \frac{1}{-4\pi^2 f^2 + i \cdot 2\pi f \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}. \quad (9)$$

Umstellen und Bilden des Betrags liefert die Amplitude $|\hat{Q}(f)|$ und die Phase $\phi(f)$ erhält man durch den Arkustangens des Imaginärteil-Realteil-Verhältnisses:

$$|\hat{Q}| = \frac{\hat{U}_0}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - 4\pi^2 f^2\right)^2 + 4\pi^2 f^2 \frac{R^2}{L^2}}}, \quad (10)$$

$$\phi(f) = \arctan\left(\frac{-2\pi f \frac{R}{L}}{\frac{1}{LC} - 4\pi^2 f^2}\right). \quad (11)$$

Für das Spannungsverhältnis an Widerstand, Spule und Kondensator folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{U}_R}{\hat{U}_0} &= \frac{R}{\hat{U}_0} \cdot |\hat{Q}| = \frac{2\pi f R}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - 4\pi^2 f^2\right)^2 + 4\pi^2 f^2 \frac{R^2}{L^2}}}, \\ \frac{\hat{U}_L}{\hat{U}_0} &= \frac{L}{\hat{U}_0} |\hat{Q}| = 4\pi^2 f^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - 4\pi^2 f^2\right)^2 + 4\pi^2 f^2 \frac{R^2}{L^2}}}, \\ \frac{\hat{U}_C}{\hat{U}_0} &= \frac{1}{C\hat{U}_0} |\hat{Q}| = \frac{1}{CL} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - 4\pi^2 f^2\right)^2 + 4\pi^2 f^2 \frac{R^2}{L^2}}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Da durch jede Ableitung von Q nach der Zeit ein Faktor i hinzukommt, kommt zu den Phasen von U_R und U_L noch eine zusätzliche Phase von $\pi/2$ beziehungsweise π hinzu, da hier die Spannungen betrachtet werden. Für die Phasen ϕ gilt also:

$$\phi_R(f) = \arctan\left(\frac{-2\pi f \frac{R}{L}}{\frac{1}{LC} - 4\pi^2 f^2}\right) - \frac{\pi}{2}, \quad (13)$$

$$\phi_L(f) = \arctan\left(\frac{-2\pi f \frac{R}{L}}{\frac{1}{LC} - 4\pi^2 f^2}\right) - \pi, \quad (14)$$

$$\phi_C(f) = \arctan\left(\frac{-2\pi f \frac{R}{L}}{\frac{1}{LC} - 4\pi^2 f^2}\right). \quad (15)$$

Die soeben hergeleiteten theoretischen Zusammenhänge zwischen Amplitudenverhältnis, Phase und Anregungsfrequenz sollen nun experimentell bestätigt werden. Die Amplitudenverhältnisse \hat{U}_i/\hat{U}_0 können aus den Messwerten direkt durch Division bestimmt werden. Zwar wird durch das Oszilloskop die doppelte Amplitude ausgegeben, durch die Verhältnisbildung kürzt sich der Faktor 2 jedoch weg. Der Fehler ergibt sich aus Gauß'scher Fehlerfortpflanzung [2]:

$$\Delta \frac{\hat{U}_i}{\hat{U}_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \hat{U}_i}{\hat{U}_0}\right)^2 + \left(\frac{-\hat{U}_i \cdot \Delta \hat{U}_0}{\hat{U}_0^2}\right)^2}. \quad (16)$$

Die somit bestimmten Amplitudenverhältnisse sind in [Abbildung 5](#) zusammen mit den zugehörigen theoretischen Verläufen aus [Gleichung 12](#) eingezeichnet. Die Unsicherheit auf die theoretischen Verläufe ergibt sich aus der Unsicherheit auf den Widerstand, da nur für dieses Bauteil eine Unsicherheit bekannt ist. Die Unsicherheiten ergeben sich aus Fehlerfortpflanzungen und sind, da es sich dabei jeweils um recht komplexe Ausdrücke handelt, in [Gleichung 17](#) bis [Gleichung 19](#) im Anhang angegeben. Die gestrichelten Linien entstehen durch Addition des Fehlers zum beziehungsweise Subtraktion des Fehlers vom Modell.

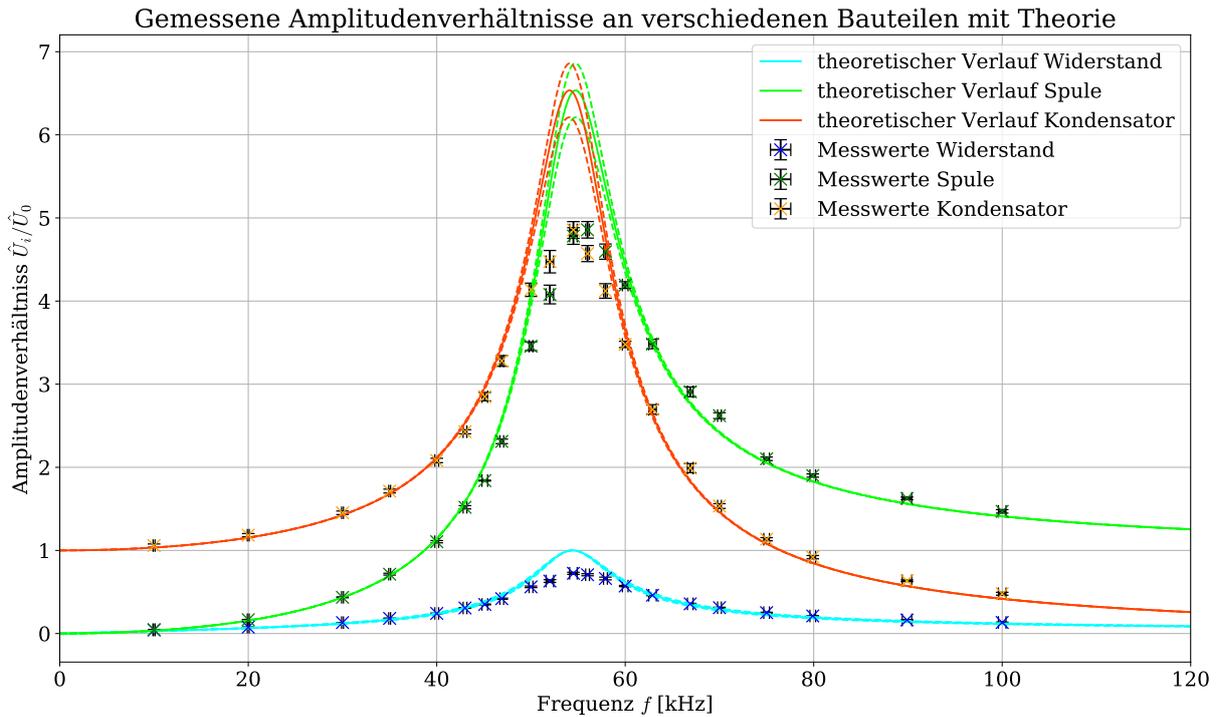


Abb. 5: Aufgetragen sind die Amplitudenverhältnisse \hat{U}_i/\hat{U}_0 zwischen Bauteil und Eingangsspannung gegen die Frequenz f in kHz. Dabei sind die Amplitudenverhältnisse \hat{U}_R/\hat{U}_0 zwischen Widerstand und Eingangsspannung in blau, \hat{U}_L/\hat{U}_0 zwischen Spule und Eingangsspannung in grün und \hat{U}_C/\hat{U}_0 zwischen Kondensator und Eingangsspannung in orange eingezeichnet. Die Unsicherheiten auf die Amplitudenverhältnisse sind dabei als Fehlerbalken dargestellt. Zusätzlich sind die jeweiligen theoretischen Verläufe mit ihren Unsicherheiten in den jeweiligen Farben eingezeichnet.

Es ist erkennbar, dass bei allen drei Messreihen der aus der Theorie vermutete Verlauf einer Resonanzkurve vorliegt. Während für viel kleinere und viel größere Frequenzen als die Resonanzfrequenz die Amplituden klein werden, bilden sich rund um die Resonanzfrequenz f_r Maxima in den Kurven aus.

Eine Betrachtung des Verlaufs des Spannungsamplitudenverhältnisses am Widerstand zeigt, dass das Amplitudenverhältnis zwischen 0 für kleine und große Frequenzen und 1 für die Resonanzfrequenz liegt. Es kann also maximal die Ausgangsspannung erreicht werden. Im Gegensatz dazu beginnt beim Kondensator das Verhältnis bei 1, da für extrem kleine Frequenzen einfach nur der Kondensator auf- und entladen wird. Für sehr große Frequenzen geht das Verhältnis an der Spule gegen 1, da besonders für hohe Frequenzen ihre Impedanz gegen unendlich strebt.

Ein Vergleich zwischen Messwerten und theoretischem Modell zeigt, dass insgesamt ein sehr ähnlicher Verlauf erkennbar ist. Vorallem im äußeren Bereich liegen alle Werte fast perfekt auf der Vorhersage der Theorie. Nur um die Resonanzfrequenz gibt es stärkere Abweichungen von der Theorie nach unten. Da dies bei allen Messreihen so ist, kann von einem systematischen Fehler ausgegangen werden, dessen Ursache in der Fehlerdiskussion betrachtet werden soll.

In einem nächsten Schritt sollen nun auch die gemessenen Phasenverschiebungen ϕ , die sich direkt am Oszilloskop ablesen lassen, gegen die Frequenz f aufgetragen werden. In [Abbildung 6](#) sind die Messwerte erneut zusammen mit der Theorie dargestellt. Auch hier ist wieder eine Unsicherheit auf die Theorie eingezeichnet, die sich aus der Unsicherheit von R ergibt und in [Gleichung 20](#) im Anhang hergeleitet wird.

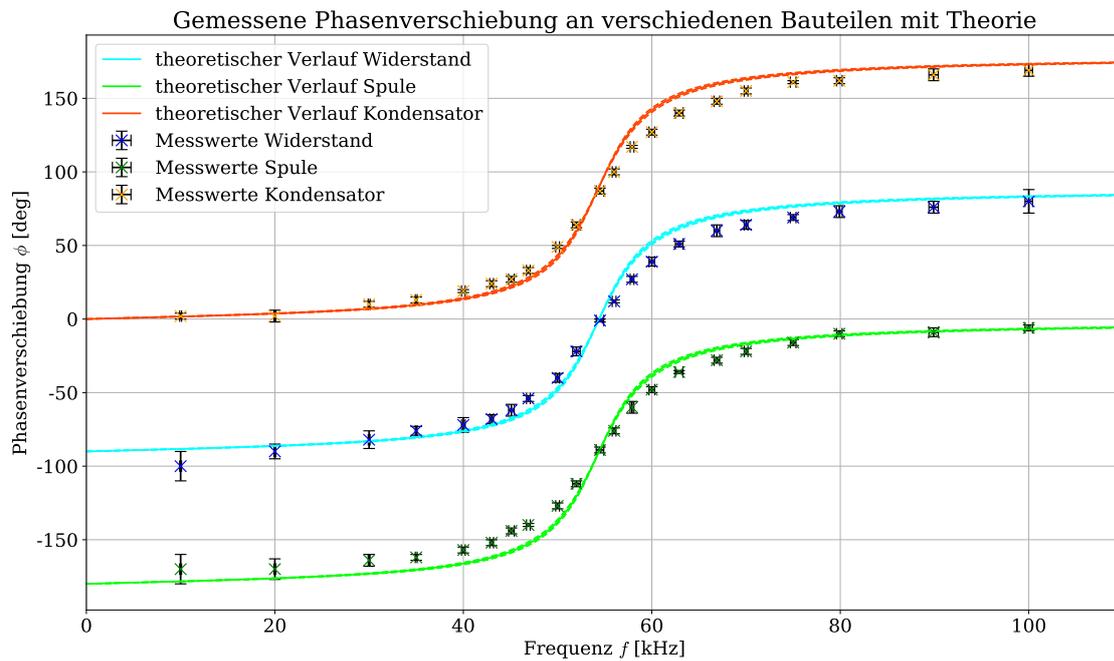


Abb. 6: Aufgetragen sind die Phasenverschiebungen ϕ_i zwischen Bauteil und Eingangsspannung gegen die Frequenz f in kHz. Dabei sind die Phasenverschiebungen ϕ_R zwischen Widerstand und Eingangsspannung in blau, ϕ_L zwischen Spule und Eingangsspannung in grün und ϕ_C zwischen Kondensator und Eingangsspannung in orange eingezeichnet. Die Unsicherheiten auf die Phasenverschiebungen sind dabei als Fehlerbalken dargestellt. Zusätzlich sind die jeweiligen theoretischen Verläufe mit ihren Unsicherheiten in den jeweiligen Farben eingezeichnet.

Auch hier lässt sich eine recht gute Übereinstimmung mit der Theorie beobachten, die typischen Arkustangens-Verläufe sind deutlich erkennbar. Außerdem sind die erwarteten Phasenverschiebungen von $\pi/2$ zwischen Kondensator und Widerstand, beziehungsweise Widerstand und Spule zu sehen. Diese Phasenverschiebungen sind auch in Screenshots des Oszilloskops bei Resonanzfrequenz zu erkennen. Die Screenshots befinden sich im Anhang in [Abbildung 11](#) bis [Abbildung 13](#). Während an den Rändern die Werte sehr gut mit der Theorie übereinstimmen, lassen sich rund um die Resonanzfrequenz erneut Abweichungen erkennen, die jedoch deutlich kleiner sind als beim Amplitudenverhältnis. Alle drei Messreihen weichen insofern von der Theorie ab, als dass sie alle ein wenig flacher verlaufen als erwartet. Auch hierauf soll in der Fehlerdiskussion eingegangen werden.

4 Diskussion der Ergebnisse

4.1 Vergleich mit Literaturwerten

Zur Beurteilung der Ergebnisse aus dem ersten Versuchsteil sollen zum einen über die Berechnung von χ^2 die Anpassungsgüte der numerischen Minimierungen bestimmt werden und zum anderen die Endergebnisse mit theoretischen Werten verglichen werden, die sich aus Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C ergeben.

Mit Formeln aus [3] kann ein Wert für χ^2 bestimmt werden, der ein Maß für die Anpassungsgüte einer numerischen Minimierung darstellt. Dabei sind die Anzahl an Messdaten als n und die Anzahl der Parameter als k gegeben. Ein Wert von χ^2 von unter $n - k$ deutet auf eine gute Verträglichkeit, ein Wert von über $n - k$ auf eine schlechte Verträglichkeit der Messdaten mit dem Modell hin. Da in diesem Fall 2 Parameter zur Anpassung verwendet werden und zwischen 5 und 7 Messdaten vorhanden sind, sprechen Werte von χ^2 unter 3 beziehungsweise 5 für ein gutes Modell. Für die numerischen Minimierungen ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned}\chi_R^2 &= 0,7, \\ \chi_L^2 &= 0,6, \\ \chi_C^2 &= 4,8.\end{aligned}$$

Die ersten beiden Werte deuten offensichtlich auf eine sehr gute Näherung des Abklingverhaltens hin, während der letzte Wert ein wenig schlechter verträglich ist. Trotzdem kann insgesamt davon ausgegangen werden, dass das verwendete Modell die Messdaten durch numerische Minimierung gut approximieren kann. Die Messwerte passen also zur beschriebenen Theorie.

In einem zweiten Schritt sollen nun die beiden Endergebnisse für T und τ mit aus der Theorie errechneten Werten verglichen werden. Diese Vergleichswerte können über [Gleichung 5](#) und [Gleichung 6](#) mithilfe von Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C bestimmt werden. Es werden die folgenden Werte berechnet:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{lit.}} &= 38,1 \mu\text{s}, \\ T_{\text{lit.}} &= 18,44 \text{s}.\end{aligned}$$

Um einen Vergleich mit den aus den Messwerten ermittelten Ergebnissen anzustellen, wird mit Formeln aus [2] ein t -Wert berechnet, wobei ein t -Wert von unter zwei auf eine gute, ein t -Wert von über zwei auf eine schlechte Verträglichkeit hindeutet. Es können folgende t -Werte bestimmt werden:

$$\begin{aligned}t_\tau &= 133,8, \\ t_T &= 0,05.\end{aligned}$$

Damit ist die Periodendauer fast perfekt mit dem Vergleichswert verträglich, was schon daran erkennbar ist, dass die Werte gerundet gleich sind. Zur Bestimmung des t -Wertes wird jedoch der ungerundete Wert verwendet. Die Werte für τ sind hingegen nur sehr schlecht verträglich. Diese Unverträglichkeit ist nicht verwunderlich, da der theoretisch erwartete Wert mehr als doppelt so groß ist, wie der aus den Messwerten bestimmte Wert. Gründe für diese Unverträglichkeit werden nachfolgend in der Fehlerdiskussion behandelt.

4.2 Zusammenstellung der Ergebnisse

Im ersten Versuchsteil konnte die freie gedämpfte Schwingung an allen Bauteilen beobachtet und der erwartete Verlauf, der sich aus Überlagerung von abfallender Exponentialfunktion und

Schwingungsterm ergibt, bestätigt werden. Es wurden die Abklingzeiten für die drei Bauteile ermittelt:

$$\begin{aligned}\tau_R &= 14,91 \mu\text{s}, \\ \tau_L &= 15,19 \mu\text{s}, \\ \tau_C &= 15,51 \mu\text{s}.\end{aligned}$$

Eine Mittelung dieser Werte und eine Bestimmung der Periodendauer T ergibt folgende Ergebnisse für den ersten Versuchsteil:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{ges}} &= (15,20 \pm 0,17) \mu\text{s}, \\ T_{\text{ges}} &= (18,44 \pm 0,14) \mu\text{s}.\end{aligned}$$

Während die Periodendauer sehr gut mit dem aus der Theorie vorhergesagten Wert T_{lit} übereinstimmt, ist die Abklingzeit τ_{ges} mit ihrem Vergleichswert τ_{lit} komplett unverträglich. Generell scheint das Modell eine gute Beschreibung der Messwerte zu sein, da alle Werte für χ^2 zwischen 0,7 und 4,8 liegen und die numerische Minimierung damit eine gute Anpassung darstellt.

Auch im zweiten Versuchsteil konnte für alle Resonanzkurven und Phasenverschiebungsdiagramme eine gute Übereinstimmung mit der zugrundeliegenden Theorie beobachtet werden. Besonders in den Randbereichen mit großer oder kleiner Anregungsfrequenz liegen nahezu alle Messwerte auf der theoretischen Erwartung, während im Bereich um die Resonanzfrequenz Abweichungen nach unten beobachtet werden konnten.

4.3 Fehlerdiskussion

Bei der Untersuchung der freien Schwingung fällt auf, dass die bestimmte Periodendauer T sehr gut mit der Erwartung übereinstimmt, was auch ein t -Wert von 0,05 belegt. Auch die Anpassung der Einhüllenden durch numerische Minimierung stimmt gut mit den Messwerten überein. Allerdings ist der daraus bestimmte Wert für die Abklingzeit τ weniger als halb so groß wie der theoretisch erwartete Wert. Diese Abweichung wird auch durch den hohen t -Wert von 133,8 deutlich, der auf eine Unverträglichkeit schließen lässt.

Eine mögliche Fehlerquelle könnten Innenwiderstände von den Kabeln, dem Oszilloskop und dem Differentialastkopf sein. Infolgedessen würde die freie Schwingung stärker gedämpft werden, womit die Abklingzeit kleiner werden würde als vom Modell vorhergesagt. Außerdem handelt es sich bei dem Differentialastkopf um ein aktives Bauteil, was auch einen dämpfenden Effekt haben kann, der allerdings nur schwer einzuschätzen ist, da weder Leistung noch genaue Funktionsweise bekannt sind.

Eine zusätzliche Ursache für diese Unverträglichkeit könnte sein, dass der Rechteckpuls nicht perfekt rechteckig ist und selbst auch schwingt, was auch in [Abbildung 2](#) erkennbar ist. Diese Schwingungen in der Eingangsspannung sorgt vor allem beim Widerstand für eine zusätzliche Dämpfung, da die Schwingung gegenphasig ist, wodurch die Abklingzeit des Widerstandes auch am kürzesten ist. Grund für diese Schwingungen sind vermutlich Rückkopplungen durch den Schwingkreis.

Eine Auffälligkeit der Messung der gedämpften Schwingung ist, dass die Resonanzkurven zwar gut mit der Theorie übereinstimmen, jedoch im Bereich um die Resonanzfrequenz nach unten abweichen. Ursächlich hierfür könnten nicht beachtete Innenwiderstände des verwendeten Aufbaus sein. Diese hätten im Bereich der Resonanzfrequenz einen besonders großen Einfluss und würden die Resonanzkurve stark abflachen. Demzufolge würde sich der theoretische Verlauf durch diese zusätzlichen Widerstände den Messwerten annähern. Diese Widerstände würden auch den etwas zu steilen Verlauf der theoretischen Modelle im Phasenverschiebungsdiagramm erklären, da

mit größerem Widerstand die Kurve des theoretischen Verlaufs flacher wird. Dementsprechend würde sich auch hier der Modellverlauf den tatsächlich gemessenen Werten annähern.

Eine mögliche Fehlerquelle bei allen Messungen kann der Differentialtastkopf sein. Da nur wenige Informationen über seine genaue Funktionsweise bekannt waren, ist es schwierig seine Auswirkungen auf die Messreihe zu beurteilen. Beispielsweise ist die Auswirkung des am Differentialkopf angebrachten Schalters nicht ganz klar, da er eine Veränderung der gemessenen Spannung um etwa den Faktor 7 verursachte.

4.4 Verbesserte Messmethoden

Da wie soeben erläutert vermutlich Widerstände in Kabeln und Messgeräten die Messungen verfälscht haben, könnte eine verbesserte Messung durch Verwendung eines höheren Widerstandes im RLC-Schwingkreis erreicht werden. Hierdurch würden zusätzliche Widerstände eine kleinere relative Verfälschung des Gesamtwiderstandes verursachen. Ein Nachteil hierbei wäre allerdings, dass mit einem höheren Widerstand auch eine höhere Dämpfung einherginge und so die Spannungsamplituden kleiner würden. Hierdurch würden die relativen Fehler, die bei der Spannungsmessung begangen werden, größer. Außerdem wären bei der freien Schwingung noch weniger Extrema zum Ermitteln von Periodendauer und Abklingkonstante vorhanden. Um diesem Effekt entgegen zu wirken, sollten auch andere Kapazitäten und Induktivitäten verwendet werden.

Um Rückkopplungen im Rechteckspuls zu vermeiden, könnte an seiner Stelle ein Schalter verwendet werden, der den Schwingkreis von einer konstanten Spannungsquelle trennt und gleichzeitig den Schwingkreis schließt. Dabei müsste aber ein sehr schneller Schaltvorgang realisiert werden, der deutlich kleiner als die Abklingzeit ist. Alternativ könnten durch geeignete Frequenzfilter kurze Spannungspeaks erzeugt werden. Dabei muss jedoch darauf geachtet werden, dass die Zeit zwischen den Peaks groß genug für eine Abklingung ist.

Um die Genauigkeit des gegebenen Modells besser einschätzen zu können, wäre es sinnvoll die Unsicherheiten auf die beiden anderen Bauteile zu kennen. Dadurch könnten die Verträglichkeiten mit dem Modell besser untersucht und mögliche weitere Fehlerquellen eruiert werden.

Literatur

- [1] Wolfgang Demtröder: *Experimentalphysik 2 - Elektrizität und Optik*, 7.Auflage, (Kaiserslautern: Springer Spektrum, 2017), 6.1 „Der elektromagnetische Schwingkreis“
- [2] Dr. Christof Bartels, Dr. Lukas Bruder, Dr. Thomas Pfohl: *Datenanalyse Teil A - Skript zur Vorlesung am 06.09.2021*, (Freiburg im Breisgau, 2021/22)
- [3] Dr. Christof Bartels, Dr. Lukas Bruder, Dr. Thomas Pfohl: *Datenanalyse Teil B - Skript zur Vorlesung am 28.02.2022*, (Freiburg im Breisgau, 2021/22)
- [4] Prof. Dr. Gregor Herten: *Experimentalphysik II - Skript zur Vorlesung*, (Freiburg im Breisgau: 2021), S. 119ff
- [5] Dr. Christof Bartels, Dr. Lukas Bruder, Dr. Thomas Pfohl: *Versuch 53 - Schwingkreis, Versuchsbeschreibung des Physiklabors für Anfänger*innen*, (Freiburg im Breisgau, 2022)

6 Anhang

6.1 Herleitungen

Fehlerfortpflanzungen der Amplitudenverhältnisse \hat{U}_i/\hat{U}_0 :

Widerstand

$$\Delta\hat{U}_R/\hat{U}_0 = \left| \frac{32\pi^5 C^2 L^2 f^5 - 16\pi^3 CL f^3 + 2\pi f}{C^2 L^3 \cdot \left(\frac{4\pi^2 f^2 R^2}{L^2} + \left(\frac{1}{CL} - 4\pi^2 f^2 \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \Delta R \right| \quad (17)$$

Spule

$$\Delta\hat{U}_L/\hat{U}_0 = \left| -\frac{16\pi^4 f^4 R}{L^2 \cdot \left(\frac{4\pi^2 f^2 R^2}{L^2} + \left(\frac{1}{CL} - 4\pi^2 f^2 \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \Delta R \right| \quad (18)$$

Kondensator

$$\Delta\hat{U}_C/\hat{U}_0 = \left| -\frac{4\pi^2 f^2 R}{CL^3 \cdot \left(\frac{4\pi^2 f^2 R^2}{L^2} + \left(\frac{1}{CL} - 4\pi^2 f^2 \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \Delta R \right| \quad (19)$$

Fehlerfortpflanzung der Phasendifferenz ϕ :

$$\Delta\phi = \left| \frac{2\pi f}{L \cdot \left(\frac{1}{CL} - 4\pi^2 f^2 \right) \left(\frac{4\pi^2 f^2 R^2}{L^2 \cdot \left(\frac{1}{CL} - 4\pi^2 f^2 \right)^2} + 1 \right)} \cdot \Delta R \right| \quad (20)$$

6.2 Tabelle und Grafiken

Tab. 1: Aufgetragen sind die geschätzten Positionen der Maxima der freien Schwingung für den Widerstand, die Spule und den Kondensator. Dabei sind die bestimmten Zeiten t in μs und die zugehörigen Spannungen \hat{U}_i in V angegeben.

	Widerstand	Spule	Kondensator
\hat{U}_1 in V	$0,318 \pm 0,015$	$2,67 \pm 0,03$	$-2,59 \pm 0,03$
t_1 in μs	4,4	0,4	0,5
\hat{U}_2 in V	$-0,163 \pm 0,019$	$-1,53 \pm 0,03$	$1,53 \pm 0,03$
t_2 in μs	13,6	8,7	9,2
\hat{U}_3 in V	$0,098 \pm 0,014$	$0,85 \pm 0,03$	$-0,76 \pm 0,03$
t_3 in μs	22,7	17,7	18,8
\hat{U}_4 in V	$-0,043 \pm 0,015$	$-0,46 \pm 0,03$	$0,46 \pm 0,03$
t_4 in μs	32,1	27,3	27,8
\hat{U}_5 in V	$0,033 \pm 0,015$	$0,26 \pm 0,03$	$-0,22 \pm 0,03$
t_5 in μs	41,4	36,5	37,5
\hat{U}_6 in V	-	$-0,13 \pm 0,04$	$0,14 \pm 0,04$
t_6 in μs	-	45,9	46,9
\hat{U}_7 in V	-	$0,09 \pm 0,04$	-
t_7 in μs	-	54,3	-

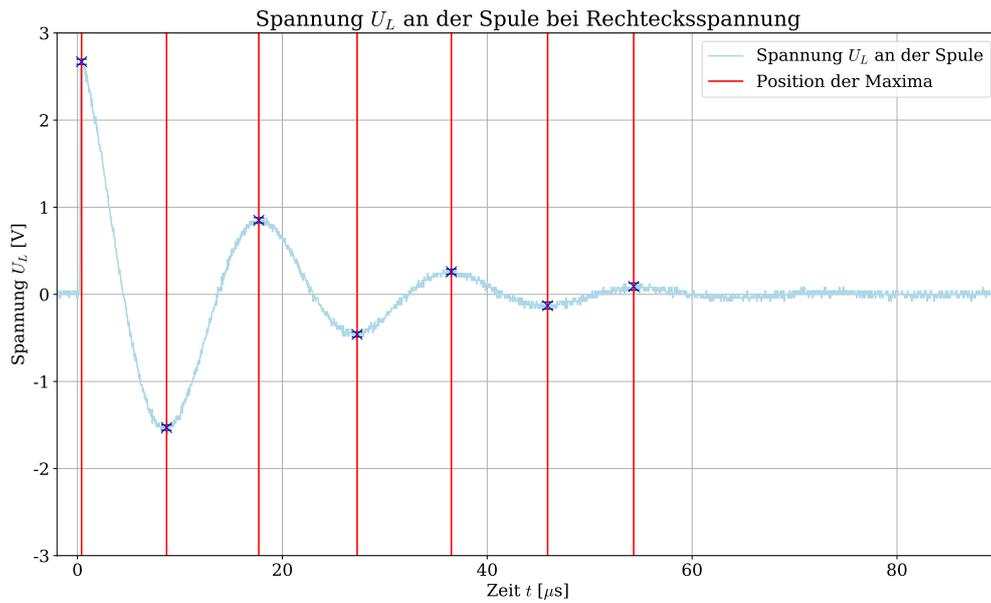


Abb. 7: Aufgetragen ist der Spannungsverlauf U_L in V an der Spule gegen die Zeit t in μs . Zusätzlich sind die grafisch bestimmten Extrema mit geschätzten Unsicherheiten eingezeichnet.

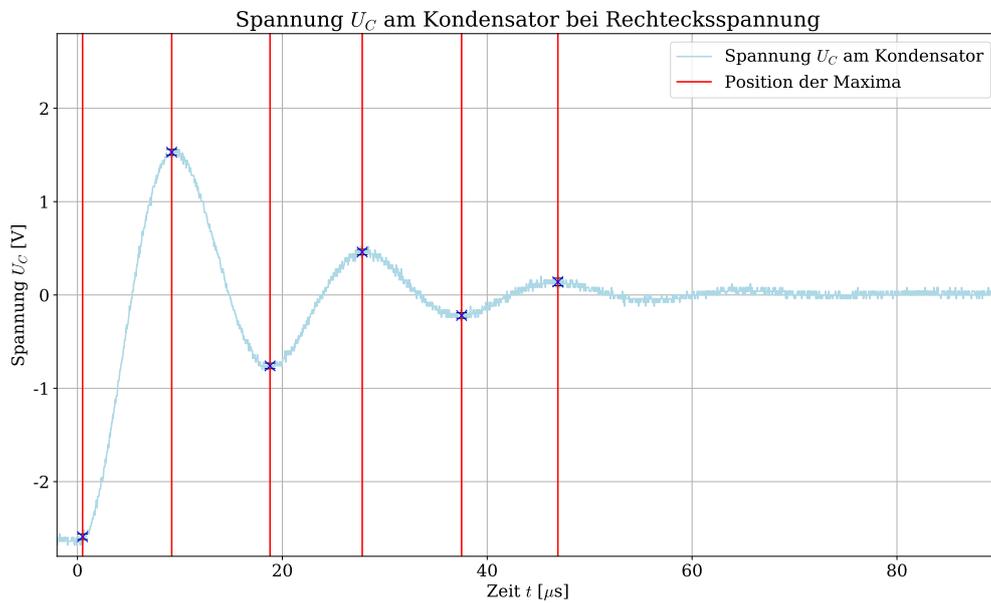


Abb. 8: Aufgetragen ist der Spannungsverlauf U_C in V am Widerstand gegen die Zeit t in μs . Dabei wird der Nullpunkt der Spannung auf die Amplitude der Rechtecksspannung gesetzt, damit die Spannung symmetrisch um die 0 schwingt. Zusätzlich sind die grafisch bestimmten Maxima mit geschätzten Unsicherheiten eingezeichnet.

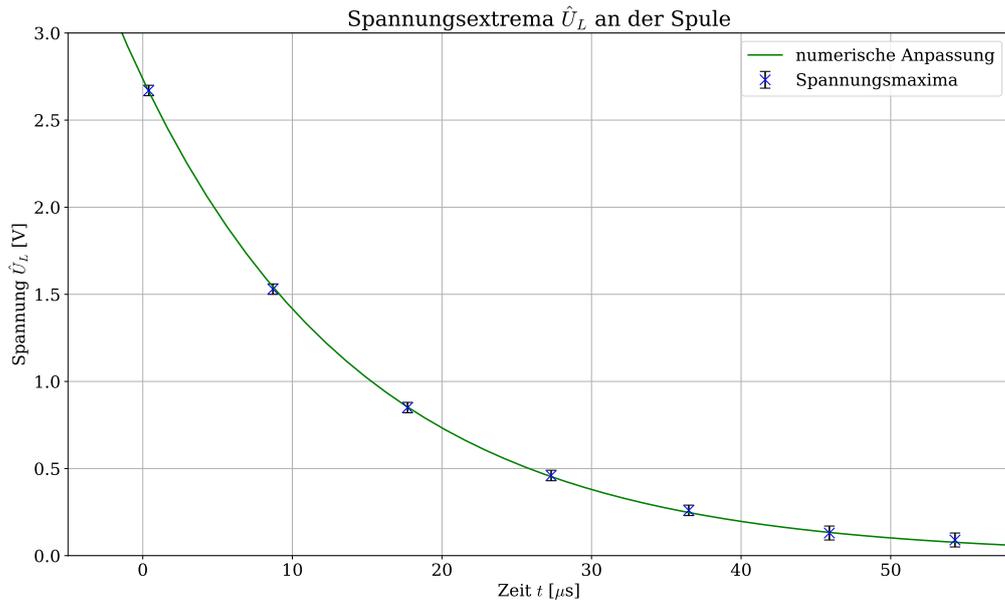


Abb. 9: Aufgetragen sind die Beträge der Spannungsextrema \hat{U}_L in V an der Spule gegen die Zeit t in μs . Die Unsicherheiten auf die Spannungsextrema sind dabei als Fehlerbalken dargestellt. Zusätzlich ist eine numerische Anpassung der Funktion der Einhüllenden eingezeichnet.

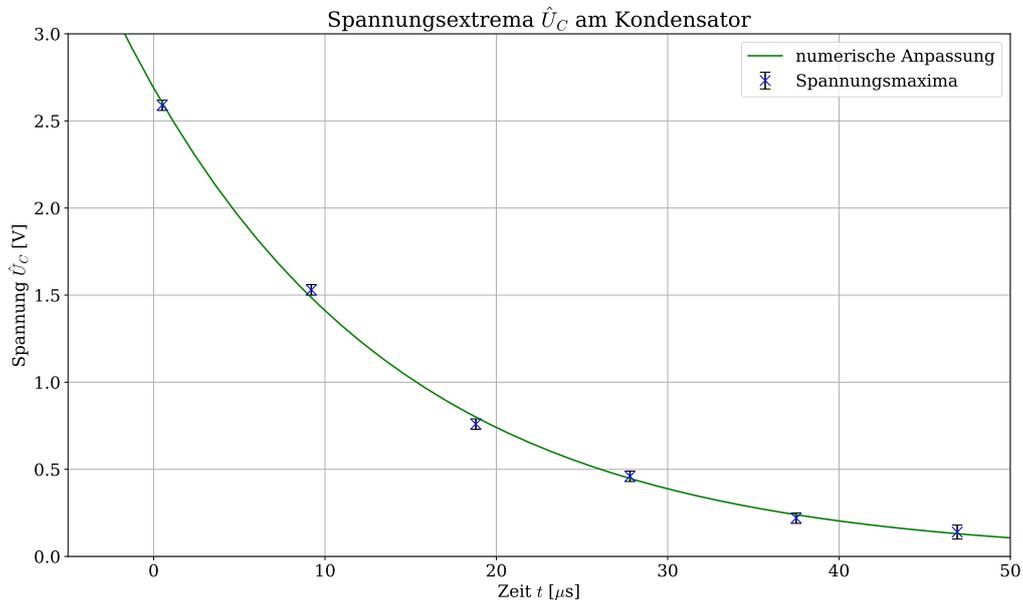


Abb. 10: Aufgetragen sind die Beträge der Spannungsextrema \hat{U}_C in V am Kondensator gegen die Zeit t in μs . Die Unsicherheiten auf die Spannungsextrema sind dabei als Fehlerbalken dargestellt. Zusätzlich ist eine numerische Anpassung der Funktion der Einhüllenden eingezeichnet.

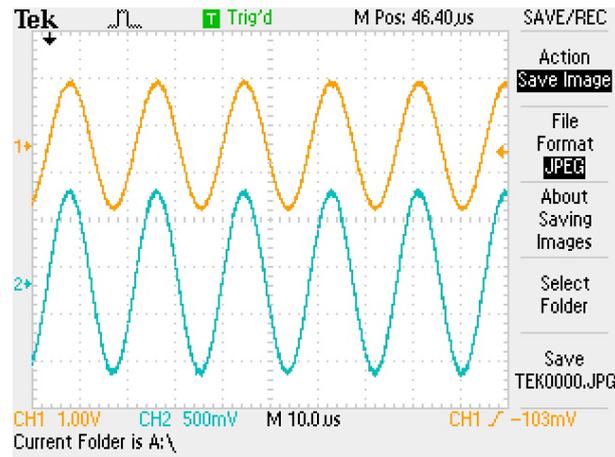


Abb. 11: Aufgetragen sind die sinusförmige Eingangsspannung U_0 und die gemessene Spannung am Widerstand U_R bei der Resonanzfrequenz f_r .

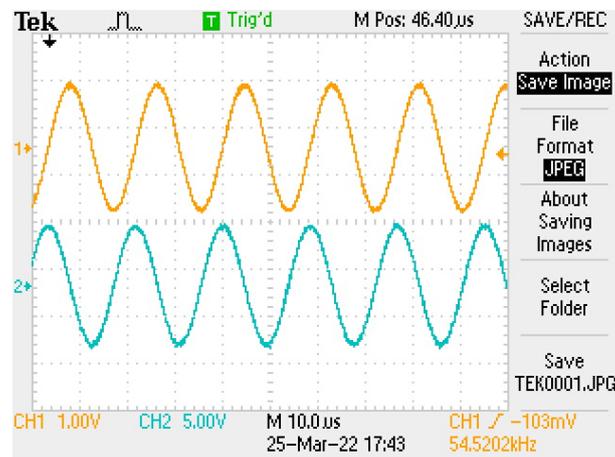


Abb. 12: Aufgetragen sind die sinusförmige Eingangsspannung U_0 und die gemessene Spannung an der Spule U_L bei der Resonanzfrequenz f_r .

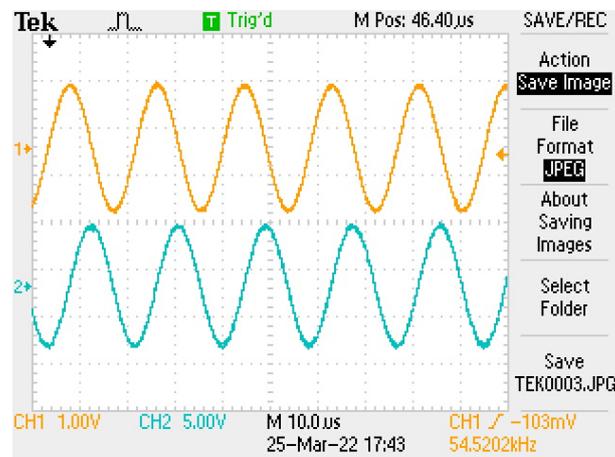
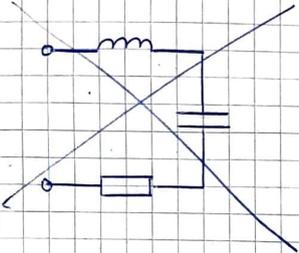


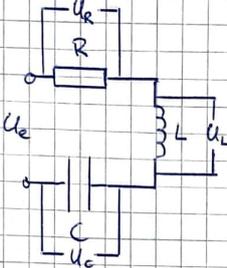
Abb. 13: Aufgetragen sind die sinusförmige Eingangsspannung U_0 und die gemessene Spannung am Kondensator U_C bei der Resonanzfrequenz f_r .

6.3 Laborbuch

Versuch 53 - 2503.22

1) Versuchsaufbau





$R = 50$
 $L = 953 \mu H$
 $C = 8,98 nF$

2) Messungen

2.1) $f = 312,0 \text{ Hz}$ $U_e = 2,562 \text{ V}$

2.2) roter Knopf gedrückt bei Messung

f in kHz	U_e in V	U_R in V	φ_R in $^\circ$	U_L in V	φ_L in $^\circ$	U_C in V	φ_C in $^\circ$
5,000(20)	17,4(1)	2,88(8)	-90(3)	2,08(8)	-150(2)		
4,99(1)	4,88(1)	0,84(1)	-90(7)	0,64(2)	-155(5)	49,6(8)	0(4)
10,0(1)	4,88(1)	1,50(4)	-88(2)	1,84(4)	-160(2)	51,2(1)	3(4)
ab jetzt kein gedrückter Knopf mehr							
10,0(1)	4,80(8)	0,202(4)	-100(10)	0,278(8)	-170(10)	5,08(4)	2(2)
20,0(1)	4,80(8)	0,368(4)	-90(5)	0,800(8)	-170(7)	5,68(1)	2(4)
30,0(1)	4,68(4)	0,616(6)	-82(6)	2,04(2)	-164(4)	6,80(8)	10(2)
40,0(2)	4,38(4)	1,06(2)	-72(5)	4,84(4)	-157(2)	9,12(8)	19(1)
50,0(2)	3,24(4)	1,82(2)	-40(3)	11,2(1)	-127(2)	13,4(2)	49(1)
60,0(3)	3,22(2)	1,84(2)	39(3)	13,5(1)	-48(2)	11,2(1)	127(2)
70,0(2)	4,12(4)	1,28(2)	64(3)	10,8(1)	-22(2)	6,32(1)	155(2)
79,9(3)	4,64(4)	0,940(1)	73(4)	8,44(4)	-10(2)	4,08(8)	162(2)
89,9(5)	4,60(4)	0,752(8)	76(4)	7,98(4)	-9(3)	2,92(4)	166(4)
100,0(4)	4,68(4)	0,624(20)	80(8)	6,88(8)	-6(2)	2,24(8)	169(4)
43,0(2)	4,16(1)	1,28(2)	-68(3)	6,32(8)	-152(3)	10,1(1)	24(2)
45,1(3)	4,00(1)	1,40(2)	-62(4)	7,36(1)	-144(2)	11,4(2)	27(2)
46,9(2)	3,72(4)	1,56(2)	-54(2)	8,60(4)	-140(1)	12,2(2)	33(2)
53,0(4)	3,04(8)	1,92(1)	-22(3)	12,4(1)	-112(2)	13,6(2)	64(2)
54,5(4)	2,76(4)	2,00(2)	-1(1)	13,2(2)	-89(2)	13,4(2)	87(2)
56,0(2)	2,80(4)	1,98(2)	12(1)	13,6(2)	-76(2)	12,8(2)	100(2)
57,9(2)	2,96(4)	1,96(4)	27(2)	13,6(2)	-60(4)	12,2(2)	117(1)
62,9(4)	3,56(1)	1,64(2)	51(2)	12,4(2)	-36(1)	9,60(20)	140(2)
66,9(3)	3,92(4)	1,40(2)	60(4)	11,4(2)	-28(2)	7,80(20)	148(2)
75,0(3)	4,30(2)	1,08(2)	69(2)	9,04(8)	-16(2)	4,88(8)	161(1)
35,0(1)	4,48(4)	0,816(20)	-76(3)	3,20(4)	-162(2)	7,68(8)	13(2)

Bei U_C kein Sinus

J Sell

Abb. 14: Laborbuch

Tabellenverzeichnis

1	Geschätzte Positionen der Maxima der freien Schwingung für die drei Bauteile . . .	15
---	--	----

Abbildungsverzeichnis

1	Schaltplan	2
2	Spannungen an den verschiedenen Bauteilen bei Rechteckspannung	4
3	Spannung am Widerstand mit geschätzten Amplitudenextrema	5
4	Spannungsextrema am Widerstand mit numerischer Anpassung der Einhüllenden	6
5	Amplitudenverhältnisse zwischen den drei Bauteilen und der Eingangsspannung mit theoretischen Verläufen	8
6	Phasenverschiebungen zwischen den drei Bauteilen und der Eingangsspannung mit theoretischen Verläufen	9
7	Spannung an der Spule mit geschätzten Amplitudenextrema	16
8	Spannung am Widerstand mit geschätzten Amplitudenextrema	16
9	Spannungsextrema an der Spule mit numerischer Anpassung der Einhüllenden	17
10	Spannungsextrema am Kondensator mit numerischer Anpassung der Einhüllenden	17
11	Screenshot des Oszilloskops bei Resonanzfrequenz am Widerstand	18
12	Screenshot des Oszilloskops bei Resonanzfrequenz an der Spule	18
13	Screenshot des Oszilloskops bei Resonanzfrequenz am Kondensator	18
14	Laborbuch	19