

Physiklabor für Anfänger*innen 2
Ferienpraktikum im Wintersemester 2018/19

Versuch 50: Wechselspannungen und Wechselströme

(durchgeführt am 08. März 2019 bei)

10. März 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuchs	5
2 Physikalische Grundlagen	5
3 Aufbau und Durchführung	7
3.1 Analyse verschiedener Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop	7
3.2 Untersuchung des Frequenzverhaltens von Wechselstromwiderständen	7
3.3 Messung von kapazitiven und induktivem Widerstand mit einer Wechselstrombrücke	8
4 Messung	9
4.1 Analyse verschiedener Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop	9
4.2 Untersuchung des Frequenzverhaltens von Wechselstromwiderständen	10
4.3 Messung von kapazitiven und induktivem Widerstand mit einer Wechselstrombrücke	11
5 Auswertung	12
5.1 Analyse verschiedener Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop	12
5.2 Bestimmung von Wechselstromwiderständen durch Strom- und Spannungsmessung	13
5.2.1 Ohmscher Widerstand	13
5.2.2 Kondensator	14
5.2.3 Spule	16
5.3 Bestimmung von kapazitiven und induktivem Widerstand mit einer Wechselstrombrücke	17
6 Diskussion	18
6.1 Analyse verschiedener Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop	18
6.2 Untersuchung des Frequenzverhaltens von Wechselstromwiderständen	19
6.3 Messung von kapazitiven und induktivem Widerstand mit einer Wechselstrombrücke	22
A Anhang	23

A.1	Zusammenhang zwischen Strom- und Spannungsamplituden und dem induktiven Widerstand einer Spule . . .	23
A.2	Berechnung der Effektiv- und Betragsmittelwerte . . .	24
A.2.1	Sinusförmige Spannung	24
A.2.2	Rechteckspannung	25
A.2.3	Dreiecksspannung	26
A.2.4	Sägezahnspannung	26
A.3	Laborheft	28

In Tabelle 1 ist eine Übersicht über alle in diesem Versuchsprotokoll verwendeten Symbole gegeben.

Größensymbol	Bedeutung
U	Spannung
I	Stromstärke
R	Elektrischer Widerstand
Z	Impedanz
L	Induktivität
C	Kapazität
l	Widerstandsverhältnis
ω	Kreisfrequenz
f, ν	Frequenz
T	Periodendauer
i	Imaginäre Einheit
e	Eulersche Zahl
k	Verhältnis zwischen Spannungsamplitude und Effektivspannung
s_x	Unsicherheit auf (Mess-) Größe x

Tabelle 1: Symbole, die in diesem Versuchsprotokoll verwendet wurden.

1 Ziel des Versuchs

Das Ziel von Versuch 50 ist die Untersuchung des Einflusses der Signalformen bei unterschiedlichen Messverfahren auf periodischer Spannungsverläufe, sowie die Untersuchung der Frequenzabhängigkeit von Wechselstromwiderständen. Zudem sollen mit einer Brückenschaltung für Wechselspannungen die Kapazität eines Kondensators und die Induktivität einer Spule bestimmt werden.

2 Physikalische Grundlagen

Für diesen Versuch ist wieder das ohmsche Gesetz [1]

$$U = RI \quad (1)$$

relevant, wobei für (periodische) Wechselspannungswiderstände analog

$$U = ZI \quad (2)$$

gilt.

Sinusförmige Wechselspannungen, sowie die dazugehörigen Ströme lassen sich durch den Zusammenhang

$$U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (3)$$

beschreiben. Aus der Gleichung für die Kapazität eines Kondensators

$$U = \frac{Q}{C}, \quad (4)$$

ergibt sich für den Kondensator die Impedanz

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (5)$$

Wichtig beim Kondensator ist die Eigenschaft, dass hier die Spannung dem Strom um 90° hinterher eilt.

Bei einer Spule gilt das Induktionsgesetz

$$U = L \cdot \dot{I}. \quad (6)$$

Aus dem Induktionsgesetz ergibt sich für die Spule die Impedanz

$$Z_L = i\omega L. \quad (7)$$

Die Herleitung dazu befindet sich im Anhang in Anhang A.1. Bei der Spule eilt der Strom stets der Spannung um 90° hinterher.

Bei realen Spulen muss man beachten, dass der Gesamtwiderstand sich aus einem ohmschen Widerstand und dem rein induktiven Widerstand zusammensetzt. Für den Gesamtwiderstand einer Spule ergibt sich damit

$$|Z_{L,R_L}| = \sqrt{(\omega L)^2 + R_L^2}. \quad (8)$$

Um aus der Phasendifferenz zwischen Stromstärke und Spannung sowie dem Betrag der Gesamtimpedanz die Wirk-, bzw. Blindwiderstände der zugehörigen Impedanz zu finden, bedient man sich den aus der komplexen Darstellung herleitbaren Beziehungen

$$\begin{aligned} R_L &= |Z_{L,R_L}| \sin \varphi, \\ \omega L &= |Z_{L,R_L}| \cos \varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Dabei ist φ die Phasendifferenz zwischen Stromstärke und Spannung.

Weiterhin müssen bei der Versuchsauswertung die Effektivspannungen und Betragsmittelwerte für verschiedene symmetrische Spannungsformen beachtet werden. Die Herleitungen dazu befinden sich ebenfalls in Anhang A.2.

Um unbekannte kapazitive Widerstände C_x zu bestimmen, benötigt man die Beziehung

$$\frac{R_x}{R_b} = \frac{1/\omega C_x}{1/\omega C_b} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2}. \quad (10)$$

Mit selbiger Gleichung kann man auch induktive Widerstände bestimmen. Dann verwendet man statt C_x L_x , sowie statt der bekannten Kapazität C_b die bekannte Induktivität L_b . l_1 und l_2 sind die Längen der Widerstände R_1 und R_2 .

	Effektivspannungen	Betragsmittelwerte
Rechteckspannung	U_0	U_0
Sinusspannung	$\frac{U_0}{\sqrt{2}}$	$\frac{2U_0}{\pi}$
Dreiecks- und Sägezahnspannung	$\frac{U_0}{\sqrt{3}}$	$\frac{U_0}{2}$

Tabelle 2: Effektivspannungen und Betragsmittelwerte für verschiedene symmetrische Spannungsformen

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Analyse verschiedener Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop

Im ersten Teil dieses Versuchsabschnitts haben wir den Funktionsgenerator an zwei Felder des Steckbretts (Aufbau siehe [1]) angeschlossen und die selbe Spannung mit dem Adapterkabel für das Oszilloskop abgegriffen. Dann haben wir qualitativ den Spannungsverlauf verschiedener periodischer Signalformen untersucht. Dafür haben wir sowohl Amplitude und Frequenz variiert, als auch mit dem Gleichspannungsoffset gespielt. Die verschiedenen periodischen Spannungsformen, die wir untersucht haben, sind Sinus-, Rechteck- und Dreiecksspannung.

Daraufhin haben wir quantitativ die Spannung der verschiedenen Spannungsverläufen bei unterschiedlichen Frequenzen untersucht, indem wir bei verschiedenen Frequenzen die Spannung am Oszilloskop, sowie die Effektivspannung am Digital-Multimeter gemessen haben.

3.2 Untersuchung des Frequenzverhaltens von Wechselstromwiderständen

Wir haben auf dem Steckbrett eine Schaltung (siehe Abb. 1) aufgebaut, mit welcher wir nacheinander einen ohmscher Widerstand, einen Kondensator und eine Spule bezüglich ihres Wechselstromwiderstandes untersuchen konnten. Als Spannungsquelle für eine sinusförmige Ausgangsspannung benutzten wir wieder den Funktionsgenerator. Über den einen Kanal des Oszilloskops, den wir über den Differential-Tastkopf angeschlossen haben, konnten wir die Spannung messen. Den Strom haben wir indirekt über den zweiten Kanal des Oszilloskops gemessen, indem wir die am Messwiderstand R_m abfallende Spannung gemessen haben.

Erneut haben wir in diesem Versuchsabschnitt mit der qualitativen Untersuchung begonnen und die Frequenz variiert, um den Zusammenhang zwischen dieser Größe und den Größen Spannung und Strom zu untersuchen. Auch haben wir die Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung

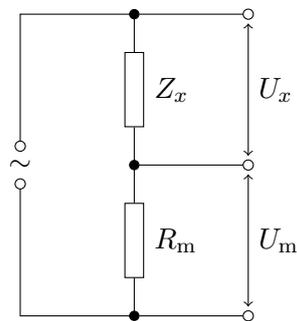


Abbildung 1: Schaltung zur Untersuchung des Frequenzverhaltens einer Impedanz Z_x

beobachtet. Diese Beobachtungen haben wir nacheinander für die drei Bauelemente ohmscher Widerstand, Kondensator und Spule durchgeführt.

Anschließend haben wir das Frequenzverhalten von den Wechselstromwiderständen quantitativ untersucht. Dies konnten wir durch die Bestimmung der Spannungsamplitude, der indirekten Bestimmung der Stromamplitude und der Untersuchung der Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung realisieren bei verschiedenen Frequenzen. Die Messungen haben wir wieder bei den drei verschiedenen Wechselstromwiderständen durchgeführt. Bei der Spule war es noch wichtig, zusätzlich ihren ohmschen Widerstand zu bestimmen.

3.3 Messung von kapazitiven und induktivem Widerstand mit einer Wechselstrombrücke

Zur Messung von kapazitiven und induktivem Widerstand mit einer Wechselstrombrücke haben wir den Aufbau in Abbildung 2 verwendet.

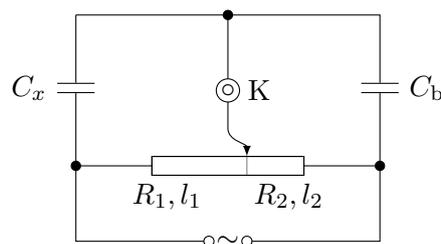


Abbildung 2: Schaltung zur Bestimmung einer unbekanntes Kapazität C_x . Zur Bestimmung einer Induktivität sind die Kondensatoren mit Spulen zu ersetzen und ein Potentiometer einzubauen.

Zur Messung der Induktivität sind die Kondensatoren jeweils durch eine Spule zu ersetzen und neben die Spule bekannter Induktivität ein Potentiometer einzubauen. Zur Versorgung verwendeten wir eine Wechselspannungs-

quelle. Mit einem Kopfhörer (K) konnten wir die Brücke abgleichen. Zuerst haben wir dies für den kapazitiven Widerstand gemacht, indem wir durch Drehen eines Rädchens das Verhältnis der Längen von R_1 und R_2 verändern konnten. Beim Abgleichen des induktiven Widerstands haben wir dies genauso gemacht, nur dass wir nun zusätzlich gleichzeitig mit dem Potentiometer den ohmschen Widerstand der Spule abgleichen mussten.

4 Messung

4.1 Analyse verschiedener Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop

Bei der qualitativen Untersuchung der verschiedenen Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop ist uns aufgefallen, dass wenn wir bei der sinusförmigen Spannung die Frequenz erhöhen/senken, die Spannungskurve breiter/schmäler wird. Ebenso nimmt bei der Rechteck- und Dreiecksspannung die Breite des Rechtecks und des Dreiecks mit dem Erhöhen der Frequenz zu. Vergrößert man die Amplitude, vergrößert sich damit auch die Amplitude der Sinuskurve bei der Sinusspannung. Bei den anderen zwei untersuchten Spannungsformen steigt mit dem Erhöhen der Frequenz die Höhe des Rechtecks bzw. die Höhe des obersten Punktes vom Dreieckssignal.

Durch Variieren des Gleichspannungsoffsets konnten wir den Graphen auf der y-Achse verschieben. Bei der Rechteck- und Sinusspannung wird der Graph gerade nach oben oder unten verschoben. Bei der Dreiecksspannung wird der Graph aber schräg nach oben oder unten verschoben.

Anschließend haben wir die Spannungsverläufe quantitativ untersucht. Wir haben uns dazu entschieden, die drei grundlegenden Spannungsverläufe bei 2 kHz, 10 kHz und 500 Hz zu untersuchen. Gleichzeitig haben wir dann die zweifache Amplitude der Spannung am Oszilloskop und den Effektivwert der Spannung mit dem Digital-Multimeter gemessen. In unser Laborheft haben wir nur den Wert der einfachen Amplitude vom Oszilloskop dokumentiert. Da wir diesen Wert aber durch Messung der doppelten Amplitude berechnet haben, indem wir diese durch zwei geteilt haben, können wir hier für den Wert der doppelten Amplitude den doppelten Wert der von uns im Laborheft notierten Messgröße verwenden. Damit ergeben sich die Ergebnisse aus ?? Die Unsicherheiten für Messungen mit dem Oszilloskop betragen nach der Anleitung des Oszilloskops für jeden unserer verwendeten Messbereiche 3% des Messwertes. Zusätzlich erhalten wir noch einen Fehler aus der Ablesungenauigkeit beim Zählen der Kästchen der Oszilloskopanzeige. Die gesamte Ungenauigkeit auf unsere Messwerte berechnen wir daher mit 4% des Messwertes. Die mit dem Digitalmultimeter gemessenen Werte müssen wir nach dessen Anleitung mit einem Fehler von $\pm 0,8\% + 2$ Digits versehen. Teilweise ähneln sich die Unsicherheiten der einzelnen Messwerte sehr. Das liegt daran, dass wir die Fehler passend zum Messwert gerundet haben.

	Generator	Oszilloskop		DMM
	f in kHz	U_{ss} in V	T in μ s	U_{eff} in V
Sinusspannung	0,500	$22,00 \pm 0,44$	1980 ± 79	$6,7 \pm 0,3$
	2,000	$22,00 \pm 0,44$	500 ± 20	$6,3 \pm 0,3$
	10,000	$22,00 \pm 0,44$	97 ± 4	$5,1 \pm 0,2$
Rechteckspannung	0,500	$22,00 \pm 0,44$	2000 ± 80	$10,5 \pm 0,3$
	2,000	$22,00 \pm 0,44$	480 ± 19	$9,3 \pm 0,3$
	10,000	$22,00 \pm 0,44$	99 ± 4	$6,5 \pm 0,3$
Dreiecksspannung	0,500	$22,00 \pm 0,44$	4000 ± 160	$5,1 \pm 0,2$
	2,000	$22,00 \pm 0,44$	1000 ± 40	$4,5 \pm 0,2$
	10,000	$22,00 \pm 0,44$	196 ± 8	$3,9 \pm 0,2$

Tabelle 3: verschiedene Spannungsverläufe am Oszilloskop

4.2 Untersuchung des Frequenzverhaltens von Wechselstromwiderständen

Im zweiten Versuchsteil haben wir als Messwiderstand einen Widerstand von $10,007 \Omega$ verwendet.

Zuerst haben wir das Frequenzverhalten qualitativ untersucht. Dabei ist uns aufgefallen, dass mit Erhöhung der Frequenz beim kapazitiven Widerstand die Amplitude des Stromes zunimmt, beim induktiven Widerstand abnimmt und beim ohmschen Widerstand gleich bleibt. Bei allen drei Impedanzen verändert sich die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung und die Spannungsamplitude nicht mit der Frequenz, aber die Breite der Kurve nimmt bei allen Widerständen mit der Frequenz zu.

Anschließend haben wir das Frequenzverhalten quantitativ untersucht. Wir haben uns dazu entschieden, bei den drei Frequenzen 2 kHz, 3 Hz und 10 Hz zu untersuchen. Wir haben dann mit dem Oszilloskop die zweifache Amplitude des Spannungsabfalls am Messwiderstand $U_{m_{ss}}$, die zweifache Amplitude der Spannung vom untersuchten Bauteil $U_{x_{ss}}$, die Periodendauer T und die Phasenverschiebung δt gemessen. Damit ergeben sich die Ergebnisse aus ??

Die Unsicherheiten für Messungen mit dem Oszilloskop betragen nach der Anleitung des Oszilloskops für jeden unserer verwendeten Messbereiche 3% des Messwertes. Wir nehmen aber auf unsere Messwerte wieder einen Fehler von insgesamt 4%, da wir zusätzlich noch die Ableseungenauigkeit beim Oszilloskop berücksichtigen müssen. Wegen Rundungen kann es wieder dazu kommen, dass sich die Fehler der einzelnen Messwerte sehr ähneln.

	Generator		Oszilloskop		
	f in kHz	$U_{x_{ss}}$ in V	$U_{m_{ss}}$ in V	T in μs	δt in μs
ohmscher	1,000	$0,64 \pm 0,03$	$0,25 \pm 0,01$	980 ± 39	
Widerstand	3,000	$0,66 \pm 0,03$	$0,24 \pm 0,01$	320 ± 13	
	10,000	$0,66 \pm 0,03$	$0,25 \pm 0,01$	98 ± 4	
Kondensator	1,000	$0,80 \pm 0,03$	$0,56 \pm 0,02$	980 ± 39	240 ± 10
	3,000	$0,80 \pm 0,03$	$0,19 \pm 0,01$	300 ± 12	32 ± 1
	10,000	$0,72 \pm 0,03$	$0,06 \pm 0,01$	95 ± 4	24 ± 1
Spule	1,000	$0,44 \pm 0,20$	$0,68 \pm 0,03$	980 ± 39	360 ± 15
	3,000	$0,66 \pm 0,03$	$0,48 \pm 0,02$	330 ± 13	60 ± 2
	10,000	$0,78 \pm 0,03$	$0,18 \pm 0,10$	100 ± 4	22 ± 4

Tabelle 4: Messwerte zur Bestimmung von Wechselstromwiderständen

4.3 Messung von kapazitiven und induktivem Widerstand mit einer Wechselstrombrücke

In diesem Versuchsteil haben wir zur Versorgung eine Wechselspannungsquelle mit der festen Frequenz $f = 1500$ Hz verwendet.

Zur Bestimmung des kapazitiven Widerstandes haben wir zuerst die bekannte Kapazität C_b so gewählt, dass die Brücke in der Nähe von l_1 l_2 abgeglichen ist. Dafür haben wir den Regler, der das Verhältnis zwischen l_1 und l_2 angibt auf 5 eingestellt (er lies sich zwischen 0 und 10 variieren). Dann haben wir die bekannte Kapazität, bei der wir die geringste Lautstärke durch die Kopfhörer wahrgenommen haben, gewählt. Das war bei uns eine Kapazität von 103 nF. Nun haben wir am Einstellrädchen gedreht, um die Verhältnisse der Längen von den Widerständen R_1 und R_2 zu verändern. So konnten wir bei einer bestimmten Länge von l_1 , aus der sich gezwungenermaßen auch die Länge von l_2 ergibt, ein Lautstärkeminimum wahrnehmen. Diese Messung haben wir mit vertauschten Positionen von R_1 und R_2 nochmal wiederholt und wieder l_1 für das wahrgenommene Lautstärkeminimum notiert. Aus den Messungen ergaben sich somit die Werte

$$\begin{aligned} l_1 &= 4,84 \pm 0,02 \\ l_2 &= 5,16 \pm 0,02. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Längen sind einheitenlos, da sie sich nur auf die Gesamtlänge von R_1 und R_2 beziehen. Die Gesamtlänge beträgt einen Wert von 10 Einheiten. Den Fehler der Längen haben wir mit $s_{C,l_1} = s_{C,l_2} = 0,02$ Einheiten wegen Ungenauigkeiten beim Ablesen des Rädchens zum Verstellen des Längenverhältnisses abgeschätzt.

Zur Bestimmung des induktiven Widerstands haben wir die selbe Messung analog durchgeführt, mit dem Unterschied, dass wir jetzt als bekannten Widerstand eine Spule L_b verwendet haben und dass wir zusätzlich mit einem Potentiometer den Innenwiderstand der Spule ausgleichen mussten.

Weil wir also zwei Regler – das Verstellrädchen und das Potentiometer – zur selben Zeit verwendet haben, haben wir nun eine Ungenauigkeit von $s_{L,l_1} = s_{L,l_2} = 0,05$ Einheiten auf unsere Messwerte abgeschätzt. Daraus ergeben sich für den letzten Teil dieses Versuchs die Werte:

$$\begin{aligned} l_1 &= 6,88 \pm 0,05 \\ l_2 &= 3,02 \pm 0,05. \end{aligned} \tag{12}$$

5 Auswertung

5.1 Analyse verschiedener Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop

In diesem Abschnitt sollen die Effektivspannungen aus den Spannungsamplituden, sowie die Frequenzen aus den gemessenen Periodendauern berechnet werden. Grundlage zu den hier erbrachten Berechnungen bildet ???. Um die Effektivwerte zu berechnen, muss zunächst die Amplitude der Spannung U_0 aus der Spannungsspitzenendifferenz U_{ss} berechnet werden. Dies geschieht durch Division mit 2:

$$U_0 = \frac{U_{ss}}{2} \tag{13}$$

Die Unsicherheit auf U_0 ergibt sich somit als $s_{U_0} = s_{U_{ss}}/2$. Um von der Amplitude auf die Effektivspannung zu kommen, multiplizieren wir mit einer kurvenspezifischen Konstante k , deren Wert Tabelle 2 zu entnehmen ist:

$$k := \begin{cases} 1, & \text{Rechteckspannung} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{Sinusspannung} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \text{Dreiecks-/Sägezahnspannung} \end{cases} \tag{14}$$

Damit ist offensichtlich $U_{\text{eff}}^{\text{berechnet}} = k \cdot U_0$. Der Fehler auf die berechnete Effektivspannung lässt sich aus der Unsicherheit der Amplitude leicht berechnen: $s_{U_{\text{eff}}^{\text{berechnet}}} = k \cdot s_{U_0} = \frac{k}{2} s_{U_{ss}}$.

Nun ist die Frequenz ν zu bestimmen. Dies geschieht einfach durch Bildung des Reziproken der gemessenen Periodendauer T :

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{15}$$

Der Fehler auf diesen Wert lässt sich mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung recht einfach berechnen:

$$s_\nu = \frac{\partial \nu}{\partial T} s_T = \frac{s_T}{T^2} \tag{16}$$

Die berechneten Werte sind in Tabelle 5 eingetragen.

	Generator	DMM	Berechnete Werte	
	f in kHz	U_{eff} in V	$U_{\text{eff}}^{\text{berechnet}}$ in V	ν in Hz
Sinusspannung	0,500	$6,7 \pm 0,3$	$7,78 \pm 0,23$	505 ± 15
	2,000	$6,3 \pm 0,3$	$7,78 \pm 0,23$	2000 ± 60
	10,000	$5,1 \pm 0,2$	$7,78 \pm 0,23$	$10\,309 \pm 309$
Rechteckspannung	0,500	$10,5 \pm 0,3$	$11,00 \pm 0,33$	500 ± 15
	2,000	$9,3 \pm 0,3$	$11,00 \pm 0,33$	2083 ± 62
	10,000	$6,5 \pm 0,3$	$11,00 \pm 0,33$	$10\,101 \pm 303$
Dreiecksspannung	0,500	$5,1 \pm 0,2$	$6,35 \pm 0,19$	500 ± 15
	2,000	$4,5 \pm 0,2$	$6,35 \pm 0,19$	2000 ± 60
	10,000	$3,9 \pm 0,2$	$6,35 \pm 0,19$	$10\,040 \pm 301$

Tabelle 5: Effektivspannungen und Frequenzen am Oszilloskop

5.2 Bestimmung von Wechselstromwiderständen durch Strom- und Spannungsmessung

Im Folgenden sollen die drei verschiedenen Bauteile ohmscher Widerstand, Kondensator und Spule hinsichtlich Wirkwiderstand und Phasenbeziehungen analysiert werden. Grundlegend gehen wir dabei von den Messdaten aus ?? aus.

5.2.1 Ohmscher Widerstand

Zunächst berechnen wir aus der Spannungsspitzenendifferenz $U_{x,ss}$ die Amplitude U_x der am unbekanntem ohmschen Widerstand anliegende Spannung. Dies geschieht auf die folgende und in ?? bereits benutzte Art:

$$U_x = \frac{U_{x,ss}}{2}, \quad s_{U_x} = \frac{s_{U_{x,ss}}}{2} \quad (17)$$

Ebenso lässt sich die Amplitude U_m des bekannten Widerstands berechnen:

$$U_m = \frac{U_{m,ss}}{2}, \quad s_{U_m} = \frac{s_{U_{m,ss}}}{2} \quad (18)$$

Um aus dieser Spannung die Stromstärke durch den unbekanntem Widerstand R_x zu erhalten, bedienen wir uns dem bekannten Widerstand $R_m = 10,007 \Omega$. Für die Amplitude I der Stromstärke durch beide Widerstände gilt:

$$I = \frac{U_m}{R_m}, \quad s_I = \frac{s_{U_m}}{R_m} \quad (19)$$

Aus diesen beiden Amplituden lässt sich der elektrische Widerstand des ohmschen Widerstands berechnen:

$$R_x = \frac{U_x}{I}. \quad (20)$$

Mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung erhalten wir die Unsicherheit auf diesen Wert in Abhängigkeit der Unsicherheiten von Spannung und Strom am unbekanntem Widerstand:

$$s_{R_x} = \sqrt{\left(\frac{s_{U_x}}{I}\right)^2 + \left(\frac{U_x}{I^2} s_I\right)^2} \quad (21)$$

Obwohl es nicht für die Berechnung des Gesamtwiderstands vonnöten ist, berechnen wir an dieser Stelle aus der gemessenen Periodendauer T die zugehörige Kreisfrequenz ω am Widerstand, um die berechneten Widerstände gegen die anderen Impedanzen im Frequenzdiagramm aufzutragen. Die Kreisfrequenz erhalten wir einfach mit

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (22)$$

woraus sich die zugehörige Unsicherheit leicht durch Gaußsche Fehlerfortpflanzung ausrechnen lässt: $s_\omega = \frac{2\pi s_T}{T^2}$. Die obigen Werte, d. h. Stromstärke, Widerstand, Spannungen und Kreisfrequenz, sind für die drei Frequenzen f in ?? aufgeführt. Aus den Werten für den Widerstand $(R_x)_i$ wollen wir nun

Generator	Berechnete Werte				
f in kHz	U_x in V	U_m in V	ω in kHz	I in mA	R_x in Ω
1,000	$0,34 \pm 0,01$	$0,13 \pm 0,01$	$6,41 \pm 0,19$	$12,49 \pm 0,37$	$27,22 \pm 1,15$
3,000	$0,33 \pm 0,01$	$0,12 \pm 0,01$	$19,64 \pm 0,59$	$11,99 \pm 0,36$	$27,52 \pm 1,17$
10,000	$0,33 \pm 0,01$	$0,12 \pm 0,01$	$64,11 \pm 1,92$	$12,24 \pm 0,37$	$27,00 \pm 1,14$

Tabelle 6: Werte zur Bestimmung des elektrischen Widerstands eines ohmschen Widerstands

den Mittelwert bestimmen. Da die Unsicherheiten auf die einzelnen $(R_x)_i$ unterschiedlich sind, bedienen wir uns des gewichteten Mittelwerts:

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{(R_x)_i}{s_{(R_x)_i}^2}}{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{s_{(R_x)_i}^2}} = 27,23 \Omega \quad (23)$$

Den Fehler auf diesen Wert erhalten wir wie folgt:

$$s_{\bar{R}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{s_{(R_x)_i}^2}}} = 0,67 \Omega \quad (24)$$

5.2.2 Kondensator

Für den Kondensator sind analog zu Gleichungen (17) bis (19) die Amplituden der Spannungen sowie die Stromstärke, die durch den Kondensator

mit unbekannter Kapazität C_x fließt, zu bestimmen. Im Gegensatz zu vorhin ist für die unmittelbare Berechnung der Impedanz des Kondensators die Kreisfrequenz ω benötigt, weswegen diese ebenfalls nach Gleichung (22) berechnet werden muss.

Ebenfalls zu berechnen ist hier die Phasendifferenz φ zwischen Stromstärke und Spannung. Diese lässt sich mit wenig Aufwand aus $\varphi = \omega \cdot \delta T$, wobei δT die zeitliche Differenz zwischen Strom- und Spannungswerten gleicher Phase ist, berechnen. Da sowohl auf ω als auch auf δT eine Unsicherheit vorhanden ist, ist die Fehlerfortpflanzung ein wenig komplizierter:

$$s_\varphi = \sqrt{(\omega s_{\delta T})^2 + (\delta T s_\omega)^2} \quad (25)$$

Wie im Versuchskonvolut [1] beschrieben ist lässt sich der Betrag der Impedanz des Kondensators aus dem Verhältnis von Spannung U_x durch den Kondensator und Stromstärke I berechnen:

$$Z_{C_x} = \frac{U_x}{I} \quad (26)$$

Die Unsicherheit erhalten wir hier erneut mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$s_{Z_{C_x}} = \sqrt{\left(\frac{sU_x}{I}\right)^2 + \left(\frac{U_x}{I^2} sI\right)^2} \quad (27)$$

Mit der Kreisfrequenz ω lässt sich aus der Kondensatorimpedanz die Kapazität des Kondensators berechnen:

$$C_x = \frac{1}{\omega Z_{C_x}} \quad (28)$$

Auch hier lässt sich die Unsicherheit berechnen:

$$s_{C_x} = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega Z_{C_x}^2} s_{Z_{C_x}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega^2 Z_{C_x}} s_\omega\right)^2} \quad (29)$$

Bis auf die Spannungen am Kondensator unbekannter Kapazität sowie am bekannten Widerstand sind alle relevanten Größen in Tabelle 7 aufgeführt. Aus den Einzelkapazitäten $(C_x)_i$ lässt sich durch Bildung des gewichteten

Generator		Berechnete Werte			
f in kHz	ω in kHz	I in mA	φ in Grad	Z_{C_x} in Ω	C in mH
1,000	$66,14 \pm 1,98$	$27,98 \pm 0,84$	$90,9 \pm 12,8$	$12,87 \pm 0,55$	$1,18 \pm 0,06$
3,000	$20,27 \pm 0,61$	$9,49 \pm 0,28$	$92,0 \pm 12,9$	$42,13 \pm 1,79$	$1,17 \pm 0,06$
10,000	$6,41 \pm 0,19$	$3,20 \pm 0,10$	$88,2 \pm 12,6$	$125,09 \pm 5,31$	$1,25 \pm 0,06$

Tabelle 7: Berechnete Werte zur Impedanzbestimmung eines Kondensators

Mittelwerts ähnlich wie bei den ohmschen Widerständen die mittlere Kapazität berechnen:

$$\bar{C} = \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{(C_x)_i}{s_{(C_x)_i}^2}}{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{s_{(C_x)_i}^2}} = 1,20 \mu\text{F} \quad (30)$$

Den Fehler auf diesen Wert erhalten wir wie folgt:

$$s_{\bar{C}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{s_{(C_x)_i}^2}}} = 0,04 \mu\text{F} \quad (31)$$

5.2.3 Spule

Für die Spule sind zunächst analog zum Kondensator und zum Widerstand die Strom- und Spannungsamplituden nach Gleichungen (17) bis (19) zu berechnen. Ebenfalls benötigt werden Phase und Kreisfrequenz, welche sich nach Gleichungen (22) und (25) berechnen lassen. Nach diesen Rechnungen kann dann der Betrag der Gesamtimpedanz $|Z_{L_x}|$ berechnet werden. Dafür dividieren wir die Spannungsamplitude an der Spule durch die Stromamplitude:

$$|Z_{L_x}| = \frac{U_x}{I} \quad (32)$$

Die Unsicherheit auf den Betrag der Gesamtimpedanz erhalten wir wieder mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$s_{|Z_{L_x}|} = \sqrt{\left(\frac{sU_x}{I^2}\right)^2 + \left(\frac{U_x}{I^2}s_I\right)^2} \quad (33)$$

Aus der Darstellung der Impedanz in der komplexen Ebene ist folgender Zusammenhang zwischen Wirkwiderstand und Impedanzbetrag der Spule schlüssig:

$$R_{L_x} = |Z_{L_x}| \cos \varphi \quad (34)$$

Die Unsicherheit auf den Wirkwiderstand ist gegeben durch

$$s_{R_{L_x}} = \sqrt{\left(s_{|Z_{L_x}|} \cos \varphi\right)^2 + \left(\sin \varphi |Z_{L_x}| s_{\varphi}\right)^2}. \quad (35)$$

Aus demselben Grund erhalten wir aus der Darstellung in der komplexen Zahlenebene den Blindwiderstand ωL_x der Spule, den wir nach der Induktivität L_x umstellen können:

$$L_x = \frac{|Z_{L_x}|}{\omega} \sin \varphi \quad (36)$$

Da die Größen $|Z_{L_x}|$, ω und φ mit einer Unsicherheit versehen sind, muss wieder Gaußsche Fehlerfortpflanzung angewandt werden, um die Unsicherheit auf die Induktivität L_x zu erhalten:

$$s_{L_x} = \sqrt{\left(\frac{\sin \varphi}{\omega} s_{|Z_{L_x}|}\right)^2 + \left(\frac{\cos \varphi |Z_{L_x}|}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{|Z_{L_x}| \sin \varphi}{\omega^2} s_{\omega}\right)^2} \quad (37)$$

Bis auf die Spannungen an Widerstand und Bauteil sind alle relevanten Werte in Tabelle 8 gegeben. Aus den einzelnen Induktivitäten $(L_x)_i$ kann

Generator		Berechnete Werte				
f in kHz	ω in kHz	I in mA	φ in Grad	Z_{L_x} in Ω	R in Ω	L in μF
1,000	$6,41 \pm 0,19$	$33,98 \pm 1,02$	$88,2 \pm 12,6$	$6,47 \pm 0,27$	$0,21 \pm 1,42$	$1,01 \pm 0,05$
3,000	$19,04 \pm 0,57$	$23,98 \pm 0,72$	$76,4 \pm 11,7$	$13,76 \pm 0,58$	$3,24 \pm 2,73$	$0,70 \pm 0,05$
10,000	$62,83 \pm 1,88$	$8,74 \pm 0,26$	$79,2 \pm 11,9$	$44,60 \pm 1,89$	$8,35 \pm 9,11$	$0,70 \pm 0,04$

Tabelle 8: Berechnete Werte zur Impedanzbestimmung einer Spule

noch – wie bereits bei Kondensator und ohmschem Widerstand – die mittlere Induktivität durch Bildung des gewichteten Mittelwerts bestimmt werden:

$$\bar{L} = \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{(L_x)_i}{s_{(L_x)_i}^2}}{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{s_{(L_x)_i}^2}} = 0,79 \text{ mH} \quad (38)$$

Die Unsicherheit auf diesen Wert lässt sich ebenfalls berechnen:

$$s_{\bar{L}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{s_{(L_x)_i}^2}}} = 0,03 \text{ mH} \quad (39)$$

5.3 Bestimmung von kapazitiven und induktivem Widerstand mit einer Wechselstrombrücke

Aus den beiden Ergebnissen für aus Gleichung (11) erhalten wir mit $l_2 + l_1 = 10$ und mit ?? für C_x die beiden Bestwerte: $C_{x_1} = 109,81 \text{ nF}$ und $C_{x_2} = 96,61 \text{ nF}$. Den Fehler dieser Werte berechnen wir jeweils mit

$$s_{C_x} = \sqrt{\left(\frac{l_2}{l_1^2} C_b s_{C,l_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{l_1} C_b s_{C,l_2}\right)^2} = 0,55 \text{ nF}. \quad (40)$$

Da beide Bestwerte den selben Fehler besitzen, erhalten wir über den arithmetischen Mittelwert für die unbekannte Kapazität insgesamt den Wert:

$$C_x = (103,21 \pm 0,55) \text{ nF}. \quad (41)$$

Die selbe Rechnung haben wir auch für die Bestimmung von L_x verwendet. Für L_x erhalten wir aus Gleichung (12) und ?? mit $L_b = 40 \text{ mH}$ die beiden Bestwerte: $L_{x_1} = 18,1 \text{ mH}$ und $L_{x_2} = 17,3 \text{ mH}$. Diese sind mit den jeweiligen Unsicherheiten, die sich über

$$s_{L_x} = \sqrt{\left(\frac{l_2}{l_1^2} L_b s_{L,l_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{l_1} L_b s_{L,l_2}\right)^2} \quad (42)$$

berechnen lassen, behaftet. Da die Fehler der beiden Bestwerte nicht signifikant voneinander abweichen, können wir über den arithmetischen Mittelwert die unbekannt Induktivität bestimmen und erhalten:

$$L_x = (17,7 \pm 0,3) \text{ mH.} \quad (43)$$

6 Diskussion

6.1 Analyse verschiedener Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop

Bei der qualitativen Untersuchung der verschiedenen Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop ist uns aufgefallen, dass mit Erhöhung der Frequenz, die Spannungskurve bzw. die Rechtecks- oder Dreiecksbreite bei den drei untersuchten Spannungsarten Sinusspannung, Rechteckspannung und Dreiecksspannung schmaler wird. Das liegt daran, dass die Frequenz reziprok zu Periodendauer der Spannungskurve ist. Vergrößert man die Amplitude, nimmt damit auch bei allen drei Spannungsformen logischerweise die Amplitude der Kurve bzw. die Höhe des Rechtecks oder des Dreiecks zu. Das Gleichspannungsoffset dient der Verschiebung des Graphen auf der y-Achse.

In der quantitativen Untersuchung der Spannungsverläufe konnte im Rahmen der Unsicherheiten eine einigermaßen gute Übereinstimmung der aus den am Oszilloskop abgelesenen Amplituden berechneten theoretischen Effektivwerten für die Spannung mit den direkt über das DMM gemessenen Werten nachgewiesen werden. Es fällt jedoch auf, dass alle mit dem DMM gemessenen Werte kleiner als die berechneten Effektivspannungswerte sind (vgl. Tabelle 5). Der Grund dafür ist ein systematischer Fehler und lässt sich auf Unsicherheiten, die sich aus der Eichtoleranz des DMM ergeben, zurückführen. Außerdem fällt noch auf, dass mit dem DMM bezüglich einer Spannung verschiedene Effektivspannungswerte gemessen werden. Dies sollte aber nicht der Fall sein, weil die Effektivspannung sich bezüglich ein und derselben Spannungsart nicht ändert.

Deswegen können wir darauf schließen, dass mit dem DMM nicht immer exakt die Effektivspannungen gemessen werden und, dass die Messungen mit dem DMM wahrscheinlich von der Frequenz beeinflusst werden, obwohl dies nicht gewollt ist. Nun kann man aus den Messwerten auch noch erkennen, dass je nach Art der Spannung bei fester Frequenz der berechnete, sowie der direkt gemessene Wert von den Werten der anderen Spannungsarten unterscheiden. Bei der Rechteckspannung ist die Effektivspannung stets höher als bei der Sinusspannung. Die Effektivspannung bei der Sinusspannung ist wiederum immer höher als bei der Dreiecksspannung.

6.2 Untersuchung des Frequenzverhaltens von Wechselstromwiderständen

Bei der qualitativen Untersuchung des Frequenzverhaltens von Wechselstromwiderständen ist uns aufgefallen, dass mit Erhöhung der Frequenz beim kapazitiven Widerstand die Amplitude des Stromes zunimmt, beim induktiven Widerstand abnimmt und beim ohmschen Widerstand gleich bleibt. Der Grund dafür sind die Abhängigkeiten des induktiven und kapazitiven Widerstandes von der Frequenz des anregenden Stromes. Der ohmsche Widerstand ist unabhängig von der Frequenz, der induktive Widerstand ist linear abhängig von der Frequenz und der kapazitive Widerstand ist reziprok von der Frequenz abhängig. Bei allen drei Impedanzen verändert sich die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung und die Spannungsamplitude nicht mit der Frequenz. Diese sind also unabhängig von der Frequenz. Aber die Breite der Kurve nimmt bei allen Widerständen mit der Frequenz ab. Der Grund dafür ist wieder das reziproke Verhältnis von Frequenz zu Periodendauer.

Aus den Messungen erhalten wir quantitativ für den ohmschen Widerstand

$$\bar{R} = (27,23 \pm 0,67) \Omega. \quad (44)$$

Der Fehler ergibt sich hier aus dem Fehler, den man nach der Anleitung des Oszilloskops auf Grund seiner Empfindlichkeit oder Zeitablenkung beachten muss und zusätzlich noch aus den Ungenauigkeiten beim Ablesen der Werte vom Oszilloskop. Eine Phasendifferenz konnten wir beim ohmschen Widerstand nicht messen, weil bei diesem Strom und Spannung in Phase sind.

Für den Kondensator erhalten wir die Impedanz

$$\bar{C} = (1,20 \pm 0,04) \mu\text{F}. \quad (45)$$

Der Fehler hat die selben Ursachen wie bei dem ohmschen Widerstand.

Der Wert der Phasendifferenzen (vgl. Tabelle 7) stimmt im Rahmen der Unsicherheiten sehr gut mit dem erwarteten Wert überein. Beim Kondensator eilt die Spannung dem Strom nämlich immer um 90° hinterher. Eigentlich ist es theoretisch nicht möglich Phasendifferenzen über 90° zu messen. Jetzt haben wir aber einen so großen Fehler auf unsere Messwerte, dass geringe Abweichungen des theoretisch erwarteten Wertes nach oben und unten bedenkenlos sind. Der Grund dafür, dass der Fehler auf die berechneten Phasendifferenzen über zehn Prozent des Messwertes liegt, ist dass sich die Unsicherheit der Phasendifferenz aus mehreren Messgrößen zusammensetzt, die wiederum alle fehlerbehaftet sind.

Für die Spule erhalten wir die Impedanz

$$\bar{L} = (0,79 \pm 0,03) \text{mH}. \quad (46)$$

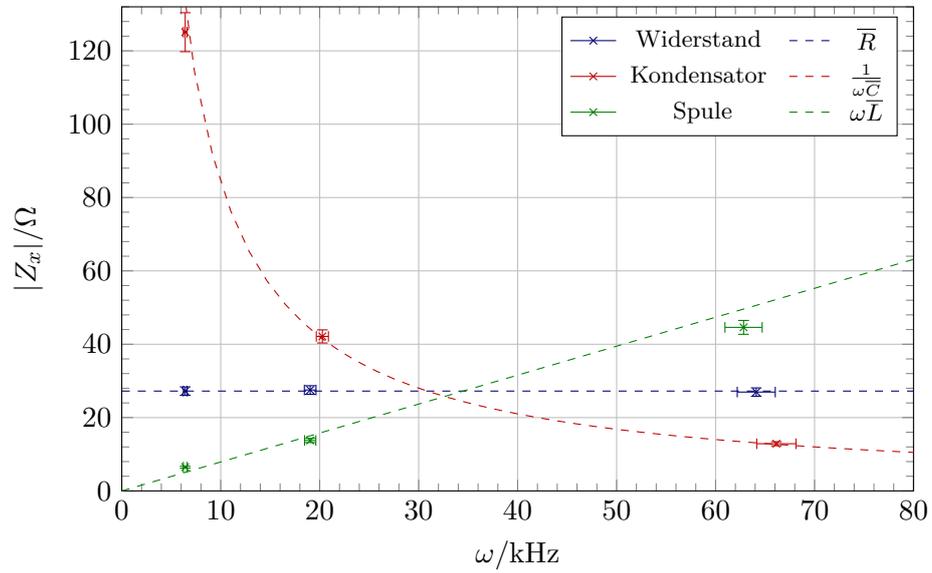
Auch hier beruht der Fehler wieder auf denselben Gründen wie beim ohmschen Widerstand.

Der Wert der Phasendifferenz hat hier wieder aus den selben Gründen wie beim Kondensator eine große Unsicherheit. Bei einer Spule ist jedoch noch zu beachten, dass sich ihr Widerstand aus ihrem frequenzabhängigem Widerstand und ihrem Wirkwiderstand zusammensetzt. Ihr Wirkwiderstand ist ein ohmscher Widerstand. Der berechnete Wert ist aber mit einem sehr großen Fehler behaftet (vgl. Tabelle 8). Allerdings ist nicht nur der große Fehler auf den Wirkwiderstand von Interesse, sondern auch der Wirkwiderstand selbst: Dieser verläuft je nach Frequenz zwischen $0,21 \Omega$ und $8,35 \Omega$, obwohl wir bei einer realen Spule erwarten, dass lediglich der Blindwiderstand frequenzabhängig ist. Da allerdings auch die Unsicherheit auf den Blindwiderstand stets die gleiche Größenordnung wie dieser hat, können wir nicht entscheiden, ob wir es mit einem systematischen, bzw. grobem Fehler zu tun haben, oder ob die Rechnung und Unsicherheiten auf andere Werte keine genauere Ergebnisse zulassen.

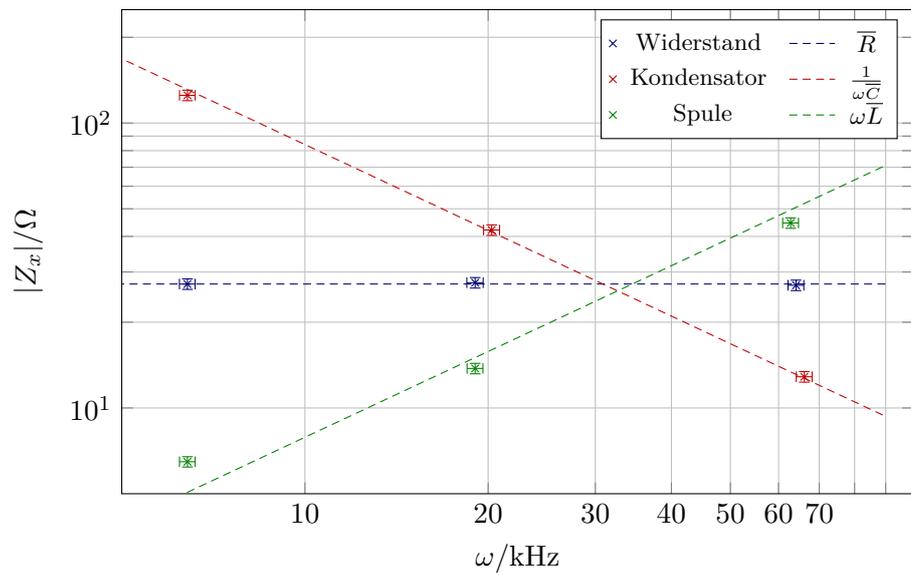
Wie bereits oben erwähnt, kann man bei einem ohmschen Widerstand keine Phasendifferenz wahrnehmen. Theoretisch erwarten wir auch bei der Spule eine Phasendifferenz von 90° , weil hier der Strom der Spannung immer um 90° hinterherhinkt. Dieser Zusammenhang gilt allerdings nur bei einer idealen Spule, welche keinen Wirkwiderstand besitzt. Unsere reelle Spule hat einen Wirkwiderstand, welcher den theoretisch erwarteten Wert der Phasendifferenz verringert. Das erklärt, warum wir bei der Spule stets eine Phasendifferenz von weniger als 90° messen.

Abschließend sollten noch die Impedanzen und Phasen graphisch aufgetragen werden. In Abbildung 3 sind die Impedanzbeträge aller drei Bauteile über der Kreisfrequenz in zwei verschiedenen Maßstäben eingetragen. Zusätzlich zu den Messwerten, welche mit Kreuzen gekennzeichnet wurden, sind die aus den gemittelten Endergebnissen für Widerstand, Kapazität und Induktivität erwarteten Impedanzbeträge als Funktion von ω eingezeichnet. Besonders am linearen Maßstab erkennt man die Übereinstimmung der ungefähren Form des Impedanzverlaufs von Messungen und „erwartetem“ Wert. Betrachtet man hingegen den doppelt-logarithmischen Kurvenverlauf, so machen sich dort gewisse Abweichungen der Messwerte von der Kurve bemerkbar. Trotz der guten Übereinstimmung im linearen Messbereich darf die Aussagekraft dieser Darstellung nicht überschätzt werden, da nur jeweils drei Messpunkte aufgenommen wurden, was keiner allzu großen Stichprobe entspricht. Dass alle Kurve in etwa auf der Messkurve liegen, bestätigt jedoch zumindest die Konsistenz der Messwerte untereinander.

In Abbildung 4 sind die Beträge der berechneten Phasendifferenzen von Stromstärke und Spannung am Kondensator und an der Spule aufgetragen. Sofort fällt auf, dass die Messungen mit einer recht großen Unsicherheit versehen sind, was eine Interpretation schwierig macht. Zumindest bei der Spule erwarteten wir eine Abnahme des Wirkwiderstands mit wachsen-



(a) Linearer Maßstab



(b) Doppelt-logarithmischer Maßstab

Abbildung 3: Betrag der Impedanz $|Z_x|$ der drei untersuchten Bauteile in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω in linearem (a) und doppelt-logarithmischem Maßstab (b).

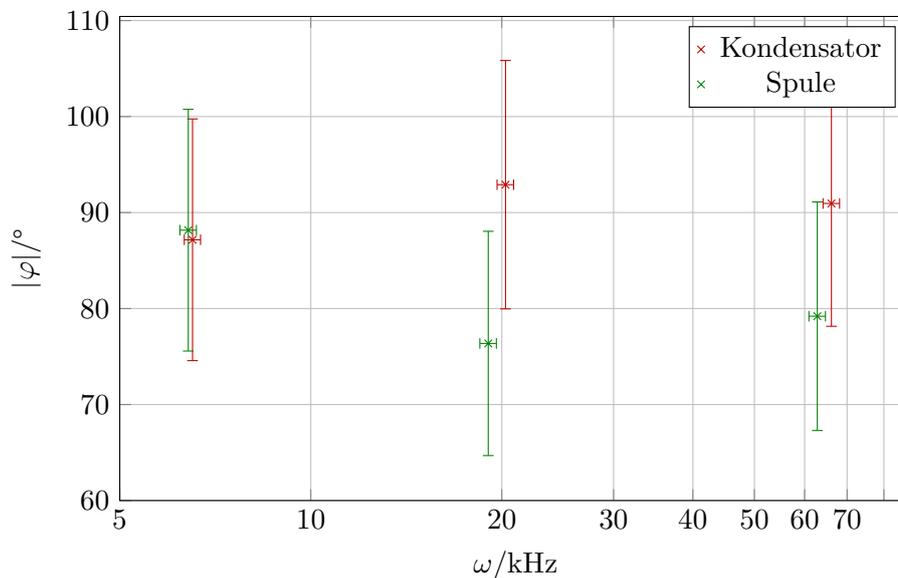


Abbildung 4: Betrag der Phase $|\varphi|$ von Kondensator und Spule in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω .

der Kreisfrequenz, was mit einer Annäherung der Phasendifferenz an 90° einhergeht. Wie man an der Abbildung allerdings sieht, stimmen auch die Bestwerte der Phasendifferenzen nicht mit den Erwartungen überein. Da die Unsicherheiten allerdings derart groß sind, impliziert dies zumindest keinen systematischen Fehler oder eine Diskrepanz zwischen Messung und Theorie, sondern bedeutet lediglich, dass der Messung von Phasendifferenzen wenig Aussagekraft zukam.

6.3 Messung von kapazitivem und induktivem Widerstand mit einer Wechselstrombrücke

Aus der Messung des kapazitivem Widerstandes erhielten wir den Wert

$$C_x = (103,21 \pm 0,55) \text{ nF}. \quad (47)$$

In der Messung haben wir zwar extra die Anordnung der bekannten Widerstände vertauscht, für beide gemessenen Längenverhältnisse die Berechnungen durchgeführt und dann den Mittelwert aus diesen beiden Ergebnissen gebildet, um ein genaueres Ergebnis zu bekommen. Dennoch ist dieser Wert nicht sehr genau. Die Gründe dafür führen wir im Folgenden auf: Schon die Messungen waren ungenau, weil wir einerseits nicht genau sagen konnten, wo sich das Lautstärkeminimum befindet. Das lag zum einen daran, dass wir

das Lautstärkeminimum nicht genau an einem Punkt identifizieren konnten, sondern wir eher einen Bereich wahrgenommen haben, in dem die Lautstärke leiser geworden ist. Zum Anderen wurde unsere Lautstärkewahrnehmung durch die Umgebungsgeräusche beeinflusst. Zusätzlich spielt natürlich auch die Anzeige des Drehrädchens eine Rolle. Wir konnten nämlich nicht exakt ablesen, bei welchem genauen Verhältnis der Längen von den Widerständen sich das Lautstärkeminimum befindet. Auch bei der Berechnung des Mittelwerts sind sicherlich Ungenauigkeiten entstanden, weil die Unsicherheiten auf die einzelnen Bestwerte gerundet den selben Wert ergaben. Wir haben uns deswegen dazu entschieden, den arithmetischen Mittelwert zu berechnen. Hätte man die Unsicherheiten genauer angegeben, könnte man den gewichteten Mittelwert berechnen und würde somit insgesamt ein vertrauenswürdigeres Ergebnis für die unbekannte Kapazität erhalten.

Bei der Bestimmung des induktiven Widerstandes fließen die selben Fehlerquellen wie oben mit ein. Jedoch muss der Innenwiderstand einer Spule zusätzlich noch mit dem Potentiometer ausgeglichen werden. Dieses ist ein ebenfalls ein feines Rädchen. Da wir dieses gleichzeitig mit dem Rädchen eingestellt haben, mit welchem wir das Längeverhältnis der Widerstände reguliert haben, haben sich die Rädchen eventuell noch gegenseitig beeinflusst, sodass wir möglicherweise nicht das absolute Lautstärkeminimum bestimmt haben. Natürlich fließt jetzt auch die Unsicherheit beider Einstellrädchen mit in die Fehler- und Mittelwertberechnung mit ein. Weil wir in diesem Versuchsteil zwei Rädchen verwendeten, ist die Unsicherheit nun größer als bei Bestimmung des kapazitiven Widerstandes. Somit wäre es hier eventuell auch sinnvoll gewesen, die einzelnen Unsicherheiten noch genauer zu berechnen, um anschließend einen gewichteten Mittelwert bilden zu können. Abschließend lässt sich folglich sagen, dass unser Wert für die unbekannte Induktivität

$$L_x = (17,7 \pm 0,3) \text{ mH} \quad (48)$$

auch nicht sehr genau war.

A Anhang

A.1 Zusammenhang zwischen Strom- und Spannungsamplituden und dem induktiven Widerstand einer Spule

Bei einer Spule gilt das Induktionsgesetz Gleichung (6). Wechselspannungen beschreiben wir mit Gleichung (3). Analog dazu lässt sich der Strom durch

$$I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (49)$$

beschreiben. Setzt man die Gleichungen für die Spannung und die zeitliche Ableitung des Stromes in das Induktionsgesetz ein, erhält man für den

Zusammenhang zwischen Strom- und Spannungsamplituden:

$$U_0 \cdot e^{i\omega t} = Li\omega I_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (50)$$

$$\Leftrightarrow U_0 = Li\omega I_0. \quad (51)$$

A.2 Berechnung der Effektiv- und Betragsmittelwerte

In diesem Teil des Anhangs sollen Effektivspannungen und Beitragsmittelwerte von nicht-sinusförmigen, periodischen Spannungsverläufen berechnet werden. Zu untersuchen sind dabei Sinus-, Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnspannungen.

A.2.1 Sinusförmige Spannung

Eine sinusförmige Spannung mit Amplitude U_0 und Kreisfrequenz ω hat im Allgemeinen die Form

$$U(t) = U_0 \sin \omega t, \quad (52)$$

mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Die Effektivspannung lässt sich mit der Identität $\sin x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \omega t$ leicht berechnen:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}^2 &= \frac{U_0^2}{T} \int_0^T dt \sin^2 \omega t \\ &= \frac{U_0^2}{2T} \int_0^T dt [1 - \cos \omega t] \\ &= \frac{U_0^2}{2T} \left[t - \frac{1}{\omega t} \sin \omega t \right]_{t=0}^{t=T} \\ &= \frac{U_0^2}{2}. \end{aligned} \quad (53)$$

Daraus erhalten wir also $U_{\text{eff}} = U_0/\sqrt{2}$. Den Betragsmittelwert U_{Bmw} erhalten wir ganz einfach durch Einsetzen von $U(t)$ in die Definition:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{Bmw}} &:= \frac{1}{T} \int_0^T dt |U(t)| \\
 &= \frac{2U_0}{T} \int_0^{T/2} dt \sin \omega t \\
 &= \frac{2U_0}{T} \left[-\frac{1}{\omega} \cos \omega t \right]_{t=0}^{t=T/2} \\
 &= \frac{4U_0}{T\omega} \\
 &= \frac{2U_0}{\pi}.
 \end{aligned} \tag{54}$$

A.2.2 Rechteckspannung

Eine rechteckförmige Spannung mit Amplitude U_0 und Periodendauer T hat im Allgemeinen die Form

$$U(t) = \begin{cases} U_0, & \text{falls } 0 \leq t < T/2, \\ -U_0, & \text{falls } T/2 \leq t < T. \end{cases} \tag{55}$$

Daraus lässt sich die Effektivspannung U_{eff} leicht berechnen:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T dt U^2(t) \\
 &= \frac{U_0^2}{T} \int_0^T dt \\
 &= U_0^2.
 \end{aligned} \tag{56}$$

Daraus erhalten wir $U_{\text{eff}} = U_0$. Die Berechnung des Betragsmittelwerts gestaltet sich ähnlich aufwendig:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{Bmw}} &= \frac{1}{T} \int_0^T dt U_0 \\
 &= U_0.
 \end{aligned} \tag{57}$$

A.2.3 Dreiecksspannung

Eine Dreiecksspannung mit Amplitude U_0 und Periodendauer T hat im Allgemeinen die Form

$$U(t) = \begin{cases} U_0 \left(1 - 4\frac{t}{T}\right), & \text{falls } 0 \leq t < T/2, \\ U_0 \left(4\frac{t}{T} - 3\right), & \text{falls } T/2 \leq t < T. \end{cases} \quad (58)$$

Bevor die Effektivspannung selbst berechnet wird, ist das Quadrat der Spannung auszurechnen:

$$U^2(t) = \begin{cases} U_0^2 \left(1 - 8\frac{t}{T} + 16\frac{t^2}{T^2}\right), & \text{falls } 0 \leq t < T/2 \\ U_0^2 \left(16\frac{t^2}{T^2} - 24\frac{t}{T} + 9\right), & \text{falls } T/2 \leq t < T. \end{cases} \quad (59)$$

Nun lässt sich die Effektivspannung berechnen:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} dt \left(1 - 8\frac{t}{T} + 16\frac{t^2}{T^2}\right) + \int_{T/2}^T dt \left(9 - 24\frac{t}{T} + 16\frac{t^2}{T^2}\right) \right] \\ &= \frac{U_0^2}{T} \left[\left(\frac{T}{2} - T + \frac{2}{3}T\right) + \left(9T - 12T + \frac{16}{3}T - \frac{9}{2}T + 3T - \frac{2}{3}T\right) \right] \\ &= \frac{U_0^2}{3}. \end{aligned} \quad (60)$$

Damit erhalten wir also $U_{\text{eff}} = U_0/\sqrt{3}$. Um den Betragsmittelwert zu berechnen, muss zunächst der Betrag der Spannungsfunktion ermittelt werden:

$$|U(t)| = \begin{cases} U_0 \left(1 - 4\frac{t}{T}\right), & \text{falls } 0 \leq t < T/4 \wedge T/2 \leq t < 3T/4 \\ U_0 \left(4\frac{t}{T} - 1\right), & \text{falls } T/4 \leq t < T/2 \wedge 3T/4 \leq t < T \end{cases} \quad (61)$$

Nun kann der Betragsmittelwert berechnet werden:

$$\begin{aligned} U_{\text{Bmw}} &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/4} dt U_0 \left(1 - 4\frac{t}{T}\right) + \int_{T/4}^{T/2} dt U_0 \left(4\frac{t}{T} - 1\right) \right] \\ &= \frac{2U_0}{T} \left(\left[t - \frac{2t^2}{T} \right]_{t=0}^{t=T/4} + \left[\frac{2t^2}{T} - t \right]_{t=T/4}^{t=T/2} \right) \\ &= \frac{U_0}{2}. \end{aligned} \quad (62)$$

A.2.4 Sägezahnspannung

Nun ist noch Effektivspannung und Betragsmittelwert von einer Spannung zu berechnen, die in Sägezahnform vorliegt, d. h. dass die Spannung die Form

$$U(t) = \begin{cases} 2U_0 \frac{t}{T}, & \text{falls } 0 \leq t < T/2 \\ 2U_0 \frac{t-T}{T}, & \text{falls } T/2 \leq t < T. \end{cases} \quad (63)$$

hat, wobei T die Periodendauer und U_0 die Spannungsamplitude ist. Daraus lässt sich der Effektivwert der Spannung einfach berechnen:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} dt \frac{4U_0^2 t^2}{T^2} + \int_{T/2}^T dt \frac{4U_0^2 (t-T)^2}{T^2} \right] \\
 &= \frac{4U_0^2}{T^3} \left(\frac{T^3}{3 \cdot 8} + \frac{T^3}{3 \cdot 8} \right) \\
 &= \frac{U_0^2}{3}.
 \end{aligned} \tag{64}$$

Um den Betragsmittelwert auszurechnen, benötigen wir zunächst den Betrag der Spannung:

$$|U(t)| = \begin{cases} 2U_0 \frac{t}{T}, & \text{falls } 0 \leq t < T/2 \\ 2U_0 \frac{T-t}{T}, & \text{falls } T/2 \leq t < T \end{cases} \tag{65}$$

Nun kann der Betragsmittelwert einfach berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{Bmw}} &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} dt 2U_0 \frac{t}{T} + \int_{T/2}^T dt 2U_0 \frac{T-t}{T} \\
 &= \frac{1}{T} \int_{T/2}^T dt 2U_0 \\
 &= \frac{U_0}{2}.
 \end{aligned} \tag{66}$$

A.3 Laborheft

Versuch 50: Wechselspannungen & -ströme 08.0

A)

1.) f erhöhen - Kurve wird breiter (oder Rechteck/Dreieck)
 A erhöhen - Amplitude Kurve wird höher (Oberer Plot Rechteck Dreieck)
 Gleichspannungseffekt - Verschiebung Graph y-Achse (Dreieck schräg nach oben)

2.) Sinus

Generator	Oszilloskop	DM	Dreip.
U _{eff} [V]	f [kHz] U _{eff} [V] U _{eff} [V] T [μs]	U _{eff} [V]	U _{eff} [V]
2	11 ± 3% 500 ± 3% 0,2ms	6,3	±0,8% + 2 Digi
10	11 ± 3% 400 ± 3% 0,2ms	5,1	
0,5	11 7980 1ms	6,7	
Rechteck			
10	11 98 5μs	6,5	
2	11 480 0,2ms	7,3	
0,5	11 2000 1ms	10,5	
Dreieck			
10	11 4,9 10μs	4,83	
2	11 5,5 50μs	4,5	
0,5	11 5,5 0,2ms	5,1	

B) $R_m = 10,007 \Omega$

1.) f erhöhen - I ändert sich nicht erkennbar \leftarrow I wird kleiner bei
 - Kurve wird breiter (C, R, L) (R-Reaktor gleich)
 - U bleibt gleich (C, R, L)
 - U bleibt gleich (C, R, L)

Widerstand $U_{\text{eff}} = U_{\text{komponente}} = U_x$

Gener.	U_{eff} [V]	U_{eff} [V]	I_{eff} [mA]	T [μs]	Δt [μs]	φ (°)	ZL [kΩ]	R_x [Ω]
1	2,5-0,2V	3,2-0,2V		1,8-0,2ms				
3	3,3-0,2V	2,4-0,1V		1,6-0,2ms				
10	2,3-0,2V	2,45-0,1V		4,9-20μs				
Kondensator								
10	3,6-0,2V	2,8-0,2V		1,9-50μs	1,2-20μs			
3	4,8-0,2V	3,8-50μV		1,1-1ms	1,6-50μs			
1	1,6-0,5V	3,2-20mV		4,9-0,2ms	1,2-0,2ms			
Glühlampe Spule								
1	2,2-0,2V	3,4-0,2mV		4,9-0,2ms	1,2-0,2ms			
3	3,3-0,2V	2,4-0,2mV		3-0,2ms	1,2-50μs			
10	3,9-0,2V	3,5-50mV		3,3-0,7ms	1,1-20μs			

C) keine Stelle $(7,36 \dots 2,1, 2n \neq)$

C_x : $2,18nF$ $7,32$ $4,84$
 $10,3nF$ $2,76$ getauscht $5,16 \pm 0,02$
 L_1

L_x : $6,88$ $\pm 0,05$ 08.03.2019
 $3,02$ (11:10)

Literatur

- [1] o.V.: *Versuchsanleitungen zum Physikkabor für Anfänger*innen, Teil 2.*
2019