Universität Freiburg Physiklabor für Anfänger, Teil 2 Ferienpraktikum im Wintersemester 2023/2024

Versuch 44 Leitfähigkeit

(Gruppe 312)

7. November 2024

Datum der Durchführung: 4. März 2024 Tutor.

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	des V	Versuches .	3	
2	Versuch				
	2.1	Aufba	u	3	
	2.2	Durch	führung	3	
3	Auswertung und Fehleranalyse				
	3.1	Bestin	nmung des spezifischen Widerstands	4	
	3.2	Abhär	ngigkeit des Widerstands von der Drahtlänge	6	
	3.3	Bestin	nmung des Endergebnisses	7	
4	Diskussion der Ergebnisse				
	4.1	Übers	ichtliche Angabe der Endergebnisse	8	
	4.2	Vergle	eich mit erwartetem Ergebnis	9	
		4.2.1	Bestimmung des spezifischen Widerstands	9	
		4.2.2	Abhängigkeit des Widerstands von der Drahtlänge	10	
		4.2.3	Bestimmung des Endergebnisses	10	
	4.3	Verbe	sserte Methoden	10	
5	Erk	lärung	zur Autorenschaft	11	
6	Anl	nang		12	
	6.1 Rohdaten mit Vortestat				
	Lite	Literatur			

1 Ziel des Versuches

Ziel des Versuches ist es, den spezifische Widerstand ϱ von Silber zu bestimmen.

2 Versuch

2.1 Aufbau

Der Versuch besteht aus drei unterschiedlichen Schaltkreisen, aus denen sechs Messreihen genommen werden. Dazu werden die drei Aufbauten, die in Abb. 1^1 zu sehen sind so aufgebaut, dass jeweils einmal das digitale Multimeter das Amperemeter in der Schaltung repräsentiert und das analoge Multimeter das Voltmeter, sowie andersherum. Dort, wo R in der Schaltung steht, wird ein Silberdraht eingespannt.

In Schaltung 1 und 2 wird das Voltmeter vor das Amperemeter geschaltet. Dazu wird das Amperemeter an die Phase des Netzteils mit einem Kabel mit Bananensteckern angeschlossen. Das Voltmeter wird in den Stecker im Amperemeter über ein Kabel seitlich in ein Loch des Bananensteckers gesteckt. An dem anderen Anschluss des Amperemeters wird, über ein Kabel mit einer Krokodilklemme auf dem Bananenstecker des Kabels, der Silberdraht eingeklemmt. Der Nullleiter des Netzteils wird mit einem Kabel äquivalent mit einer Krokodilklemme mit dem Silberdraht verbunden. An den Bananenstecker auf der Seite des Drahtes wird der andere Anschluss des Voltmeters angeschlossen. Die Kabel sind aus Kupfer.

In Schaltung 3 und 4 bleibt der bisherige Stromkreis bestehen. Nur das Voltmeter wird nun an beide Bananenstecker die mit dem Draht verbunden sind, angeschlossen.

In Schaltung 5 und 6 wird das Voltmeter mit separaten Krokodilklemmen zwischen die anderen Anschlüsse an den Draht geklemmt. Der restliche Aufbau bleibt weiter unverändert.

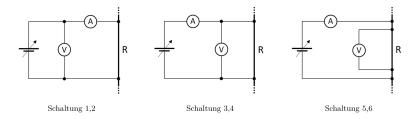


Abbildung 1: Die sechs Schaltungen, Bild aus der Versuchsbeschreibung¹

2.2 Durchführung

Zuerst wir mit einer Messschraube der Drahtdurchmesser d bestimmt, sowie mit einem Maßband die effektive Drahtlänge L, welche die Länge des Drahtes zwischen den ange-

¹[Bar24c]

schlossenen Krokodilklemmen angibt. Für Schaltung 5 und 6 ist das die Länge zwischen den Krokodilklemmen die zu dem Voltmeter führen. Dann wird für alle sechs Schaltungen die Spannung U und die Stromstärke I gemessen. Dazu werden mehrere Werte für die Stromstärke am Netzteil eingestellt und dann die Spannung und Stromstärke in der Schaltung mit Multimetern gemessen.

Im zweiten Versuchsteil, wird die beste Schaltung ausgewählt und für unterschiedliche Längen L die Abhängigkeit des Widerstands R von der Länge L untersucht. Dazu wird Schaltung 6 verwendet und der Abstand der Anschlüsse des Voltmeters verändert. Für jeden Abstand werden mehrere Werte für I und U erhoben.

3 Auswertung und Fehleranalyse

Stellt man die Messschraube auf Null, fällt auf, dass diese d=0,2mm anzeigt. Diese Abweichung wird im folgenden von dem gemessenen Drahtdurchmesser abgezogen, um genauere Werte zu erhalten. Die Messunsicherheit für die Messschraube wird mit a=0,005mm dreiecksverteilt angenommen. Für den gemessenen Wert des Drahtdurchmessers $d_{mess}=(0,510\pm0,002)$ mm folgt somit für den echten Wert mit Fehlerfortpflanzung $d=(0,490\pm0,003)$ mm. Die Unsicherheit folgt nach $\Delta d=\frac{a}{\sqrt{6}}=0,002$ mm.

3.1 Bestimmung des spezifischen Widerstands

Das analoge Multimeter wird in den Bereichen I=1000mA für die Stromstärke und U=2,5V für die Spannung verwendet. Die angegebenen Fehler liegen bei 2% des Skalenendwerts und 1,5% des Skalenendwerts für die Strom- bzw. Spannungsmessung. Somit folgen die Unsicherheiten $\Delta_{Isys}=20\text{mA}$ und $\Delta_{Usys}=0,0375\text{V}$. Hinzu kommt der Ablesefehler des Gerätes. Dieser wird durch einen Spiegelstreifen verringert, indem man die Messnadel und ihre Spiegelung so fokussiert, dass beide übereinander liegen. Damit wird ein Parallaxenfehler vermieden. Dieser Fehler wird mit der Größe eines halben Skalenstrichs dreicksverteilt angenommen. Für den Messbereich I=1000mA folgt $a_I=10\text{mA}$ und für U=2,5V folgt $a_U=0,05\text{V}$. Somit ist $\Delta_{Ista}=4\text{mA}$ und $\Delta_{Usta}=0,02\text{V}$. Die Gesamtunsicherheit berechnet sich durch

$$\Delta_{kom} = \sqrt{\Delta_{sta}^2 + \Delta_{sys}^2}.$$

Insgesamt folgt für die Messunsicherheit des analogen Multimeters für die Stromstärke

$$\Delta I = \pm 20 \text{mA}$$

und für die Spannung

$$\Delta U = \pm 0,04 \text{V}.$$

An den Unsicherheiten sieht man, dass die Ableseunsicherheit, gegenüber der Unsicherheit des Messgeräts, vernachlässigbar klein ist.

Das digitale Multimeter wird in den Bereichen I=2A für die Stromstärke und für die Spannung in den Bereichen U=2V für Schaltung 1, sowie U=200 mV für die restlichen Schaltungen verwendet. Die angegebenen Fehler liegen bei

$$\Delta I = \pm (1, 5\% \cdot I_{mess} + 1A),$$

sowie

$$\Delta U = \pm (0, 5\% \cdot U_{mess} + 1 \text{mV})$$

für den Messbereich U = 2V und

$$\Delta U = \pm (0, 5\% \cdot U_{mess} + 0, 1 \text{mV})$$

für den Messbereich U=200mV, wobei I_{mess} und U_{mess} die Messwerte sind.

Die Unsicherheit für die Länge L des Drahts kommt aus der dreiecksverteilten Ableseungenauigkeit $a=0,05\mathrm{cm}$ und hat den Wert $\Delta L=\frac{a}{\sqrt{6}}=0,02\mathrm{cm}$. Somit ergibt sich der Wert für die Länge

$$L = (55, 80 \pm 0, 02)$$
cm.

Aus der gemessenen Stromstärke I und Spannung U lässt sich der Widerstand R mit dem Ohmschen Gesetz

$$R = \frac{U}{I} \tag{1}$$

berechnen. Für den spezifischen Widerstand ρ gilt

$$R = \frac{\varrho L}{A} \Longleftrightarrow \varrho = \frac{RA}{L}.$$
 (2)

Die Unsicherheiten von R und ϱ folgen aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung² aus den Unsicherheiten von U und I mit Gleichung (1) zu

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\Delta I\right)^2}$$

und zusätzlich mit den Unsicherheiten von A und L folgt für Gleichung (2)

$$\Delta \varrho = \sqrt{\left(\frac{\partial \varrho}{\partial R} \Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial A} \Delta A\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial L} \Delta L\right)^2}.$$

Dabei folgt die Leiterquerschnittsfläche $A = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$. Für den spezifischen Widerstand ϱ der sechs Schaltungen folgen jeweils die in Tabelle 1 abgebildeten Werte für die unterschiedlichen Schaltungen und die gemessenen Spannungen und Stromstärken. Der t-Test wird für ein Signifikanzniveau von 5% durchgeführt³. Es gilt die Formel

$$t = \frac{|\hat{\varrho} - \varrho_{Lit}|}{\Delta \varrho}.$$

Da alle Werte > 2 sind, weichen sie signifikant vom Literaturwert ab.

²[Bar24a]

³[Bar24a]

Mittelwerte für einzelne Schaltungen						
Schaltung	spez. Widerstand $\varrho[n\Omega m]$	t-Test				
1	418 ± 6	67,4				
2	$173,0 \pm 0,7$	227,7				
3	$33,6 \pm 0,7$	27,3				
4	38 ± 2	9,1				
5	$17, 2 \pm 0, 5$	3,0				
6	$18,41 \pm 0,07$	35,4				

Tabelle 1: spezifischer Widerstand ϱ und t-Test

3.2 Abhängigkeit des Widerstands von der Drahtlänge

Um die Abhängigkeit R(L) zu untersuchen, wird Schaltung 6 verwendet, näheres dazu in 4.2.1. Das analoge Multimeter misst im Bereich $I=1000\mathrm{mA}$ die Stromstärke und das digitale Multimeter die Spannung im Bereich $U=200\mathrm{mV}$. Die Länge L bezieht sich auf den Innenabstand der Anschlüsse des Voltmeters an den Draht.

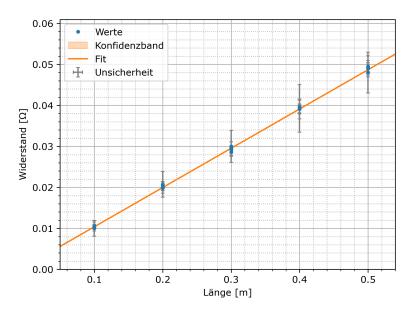


Abbildung 2: Abhängigkeit des Widerstands R von der Länge L

In Abb. 2 sind pro Länge L fünf Messwerte und ihre Unsicherheiten für den Widerstand R dargestellt. Diese liegen alle sehr nah beieinander, mit ihren Unsicherheitsbalken liegen alle Werte auf der durch lineare Regression bestimmten Ausgleichsgeraden. Die Abweichung ist so gering, dass das Konfidenzband nicht sichtbar ist. Dies erkennt man auch gut an Abb. 3. Die Güte des Fits⁴ ist hoch, da $\chi = 1, 9 \ll 23$. Anhand von Abb. 2 kann

⁴[Bar24b]

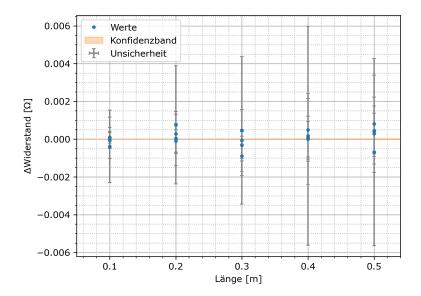


Abbildung 3: Residuen für Abb. 2

zudem bestätigt werden, dass $R \propto L$. Die Steigung s der Ausgleichsgeraden $\frac{R}{L}$ ist nach Gleichung (2) auch der spezifische Widerstand pro Durchschnittsfläche des Drahts $\frac{\varrho}{A}$

$$s = (0,096 \pm (2 \cdot 10^{-7})) \frac{\Omega}{\mathrm{m}}.$$

3.3 Bestimmung des Endergebnisses

Für das Endergebniss des spezifischen Widerstands wird Schaltung 6 verwendet, da hier die gemessene Spannung sich nur auf das Silber bezieht und die Kombination aus digitalem Voltmeter und analogem Amperemeter es ermöglicht viele Messwerte aufzunehmen. Die Schaltungen 1-4 sind ungeeigneter, da zwischen den Anschlüssen des Voltmeters noch ein Teil Kupferkabel liegt, welches dann mit gemessen wird. Kupfer hat einen etwas größeren spezifischen Widerstand⁵ als Silber, deshalb überwiegt dieser, wenn lange Stücke Kupfer mit gemessen werden. Bei Schaltung 5 und 6 wird dies minimiert. Dort ist kein Kupferkabel des Stromkreises in die Spannungsmessung involviert, aber die Anschlusskabel zwischen dem Silberdraht und dem Voltmeter sind leider immer aus Kupfer.

Für die Bestimmung von ϱ wird die zweite Messreihe genutzt, bei der eine Schaltung bei mehreren Längen genutzt, da man aus der Steigung s der Ausgleichsgeraden ϱ leicht über folgenden Zusammenhang berechnen kann:

$$\varrho = s \cdot A$$

wobei A die Querschnittsfläche des Drahtes ist. Man erhält:

$$\varrho = (18, 1 \pm 0, 2) \mathrm{n}\Omega\mathrm{m}$$

⁵[Wik23]

Die Unsicherheit ergibt sich aus Fehlerfortpflanzung durch die Unsicherheiten auf die Steigung und auf die Fläche mit

$$\Delta\varrho = \sqrt{\left(\frac{\partial\varrho}{\partial s}\Delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial\varrho}{\partial A}\Delta A\right)^2}.$$

Die Fläche ist

$$A = (189 \pm 2) \cdot 10^{-9}$$
m²

und die Steigung beträgt

$$s = (0,096 \pm (2 \cdot 10^{-7})) \frac{\Omega}{\mathrm{m}}.$$

Die Unsicherheit der Fläche kommt aus der Fehlerfortpflanzung mit der Unsicherheit des Durchmessers

 $\Delta A = \frac{\partial A}{\partial d} \Delta d.$

Die Unsicherheit der Steigung entsteht durch die lineare Regression, mit entsprechender Gewichtung durch die Unsicherheiten auf den Widerstand.

4 Diskussion der Ergebnisse

4.1 Übersichtliche Angabe der Endergebnisse

Für den spezifischen Widerstand ϱ folgen die Ergebnisse in Tabelle 2

Mittelwerte für einzelne Schaltungen						
Schaltung	spez. Widerstand $\varrho[n\Omega m]$					
1	418 ± 6					
2	$173,0 \pm 0,7$					
3	$33,6 \pm 0,7$					
4	38 ± 2					
5	$17, 2 \pm 0, 5$					
6	$18,41 \pm 0,07$					

Tabelle 2: spezifischer Widerstand ϱ

Der Widerstand R ist proportional zur Drahtlänge L. Dabei ist die Proportionalitätskonstante s die Steigung aus Abb. 2

$$s = (0,096 \pm (2 \cdot 10^{-7})) \frac{\Omega}{\mathrm{m}}.$$

Aus dieser Steigung berechnet sich das Endergebnis des spezifischen Widerstands

$$\rho = (18, 1 \pm 0, 2) \text{n}\Omega \text{m}.$$

4.2 Vergleich mit erwartetem Ergebnis

4.2.1 Bestimmung des spezifischen Widerstands

Der Literaturwert für den spezifischen Widerstand⁶ von Silber ist $\varrho_{Lit}=0,01587\frac{\Omega\cdot\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$. Dabei ist $1\frac{\Omega\cdot(\mathrm{mm})^2}{\mathrm{m}}=1\mu\Omega\mathrm{m}$. Also ist

$$\varrho_{Lit} = 15,87 \text{n}\Omega\text{m}.$$

In Abschnitt 4.1 sind die gemessenen Werte für ρ der Schaltungen dargestellt. Es ist zu erkennen, dass für jede Schaltung zu groß gemessen wird. Die Werte für Schaltung 1 und 2 liegen um eine Größenordnung über dem Literaturwert. Da die restlichen Werte in der richtigen Größenordnung liegen, sind die ersten beiden Schaltungen für diese Messung ungeeignet. Dies ist erwartet worden, da hier das Voltmeter noch vor dem Amperemeter geschaltet wird. Der Nachteil hieraus ist, dass sehr viel Kupferkabel zwischen dem Voltmeter und dem Silberdraht liegt, durch welches Strom fließt. Dadurch fällt ein Teil der Stromstärke am Widerstand der Kabel ab und der gemessene Widerstand wird größer. Es handelt sich um Spannungsfehlerschaltungen, welche aus den genannten Gründen für kleine Widerstände ungeeignet sind. Bei Messung 3 und 4 wird dies verringert, indem die Spannungsmessung kurz vor den Anschlüssen am Silberdraht von statten geht. Bei Messung 5 und 6 wird der fehler minimiert, da das voltmeter direkt an den Draht angeschlossen wird. Die Werte sind dennoch alle etwas zu hoch, weil ein Voltmeter zwar hochohmig ist, aber trotzdem minimal Strom hindurch fließt. Deshalb ist die Stromstärke in dem Silberdraht geringer als erwartet, wodurch nach $R = \frac{U}{I}$ der Widerstand größer als erwartet ist.

Schaltung	t-Test
1	67,4
2	227,7
3	27,3
4	9,1
5	3,0
6	35,4

Tabelle 3: t-Test für die sechs Schaltungen

In Tabelle 3 ist zu sehen, dass alle Messungen wegen den oben beschriebenen Gründen signifikant von dem Literaturwert abweichen. Die Werte Schaltung 4 und 5 kommen am nächsten an eine tolerierbare Abweichung. Das kommt daher, dass bei Schaltung 4 eine sehr große Unsicherheit vorliegt. Schaltung 5 hat mit $\varrho = (17, 2\pm 0, 5)$ n Ω m den Bestwert, der am nächsten an den Literaturwert herankommt. Obwohl nach der Argumentation oben, Schaltung 6 gut geeignet sein müsste, ist der Bestwert leicht größer als bei Schaltung

⁶[Wik23]

5. Da die Unsicherheit für Messung 6 extrem klein ist, kommt die große Abweichung im t-Test zustande.

Der Innenwiderstand des digitalen Voltmeters⁷ ist 200 mal größer als der des analogen Voltmeters⁸. Da ein Voltmeter hochohmig sein muss um präzise zu messen, ist es sinnvoll das digitale Multimeter als Voltmeter zu verwenden, um eine präzisere Messung zu bekommen. Da der Aufbau von Schaltung 5 und 6 offensichtlich die besten Werte liefert, wird Schaltung 6 für die weiteren Messungen verwendet, da hier das digitale Multimeter als Voltmeter verwendet wird.

4.2.2 Abhängigkeit des Widerstands von der Drahtlänge

Anhand der Messergebnisse lässt sich gut erkennen, dass ein linearer Zusammenhang gut passt, dies erkennt man auch an dem geringen χ -Wert von $\chi=1,9$. Selbiger lässt aber auch den Rückschluss zu, dass die Unsicherheiten für die Spannung oder die Stromstärke viel zu hoch angenommen wurden. Ein Test, bei dem die Stromstärke als exakt angenommen wird, und somit die lineare Regression für wesentlich kleinere Fehler durchgeführt wird ergibt $\chi=21,2$. Um genauere Werte zu erreichen muss also unbedingt die Stromstärke präziser gemessen werden.

4.2.3 Bestimmung des Endergebnisses

Wird der Literaturwert von $\varrho_{Lit}=15,87n\Omega m$ mit dem gemessenen Ergebnis $\varrho=(18,1\pm0.2)n\Omega m$ verglichen, fällt auf, dass der gemessene Wert signifikant größer ist, ein t-Test auf ein Signifikanzniveau von 5% ergibt t=10,28. Dies ist allerdings wenig verwunderlich, da der spezifische Widerstand von mehr als den hier kontrollierten Parametern abhängt, so ist er z.B. von der Reinheit des benutzen Drahts und dessen Temperatur abhängig. Die Unsicherheiten, die in dieser Messung vorliegen sind zum größten Teil aus der Unsicherheit des Durchmessers des Drahts entstanden, da er im Vergleich zur Unsicherheit der Steigung um Größenordnungen näher am Bestwert der entsprechenden Größe liegt. Die sehr geringe Unsicherheit auf die Steigung entsteht hauptsächlich durch die vielen Datenpunkte. Die Unsicherheit der Messpunkte spielt nur eine untergeordnete Rolle, da sie in jedem Fall sehr bzw. zu hoch ist, wird aber maßgeblich durch die Unsicherheit in der Stromstärke bestimmt. Die Unsicherheit auf die Länge des Drahts geht vollständig nicht in die Unsicherheit des spezifischen Widerstands ein, da diese in der linearen Regression nicht berücksichtigt wird.

4.3 Verbesserte Methoden

Um die Messung präziser zu machen, ist es wichtig die einzelnen Messwerte mit geringen Fehlern zu bestimmen. Dabei ist es entscheidend systematische Fehler zu vermeiden.

⁷[GUA]

⁸[Mes14]

Also müssen die Messinstrumente sauber messen. Dafür könnte man eine Messschraube verwenden, welche Null anzeigt, wenn sie komplett geschlossen ist. Um die Stromstärke präzsier zu bestimmen, würde es sich empfehlen ein zweites digitales Multimeter zu nutzen. Um eine wirklich präzise Messung durchzuführen wäre allerdings ein vollständig andere Aufbau nötig.

5 Erklärung zur Autorenschaft

Alle auf der Titelseite genannten Autoren haben in gleichen Teilen zu allen Inhalten dieses Protokolls beigetragen.

6 Anhang

6.1 Rohdaten mit Vortestat

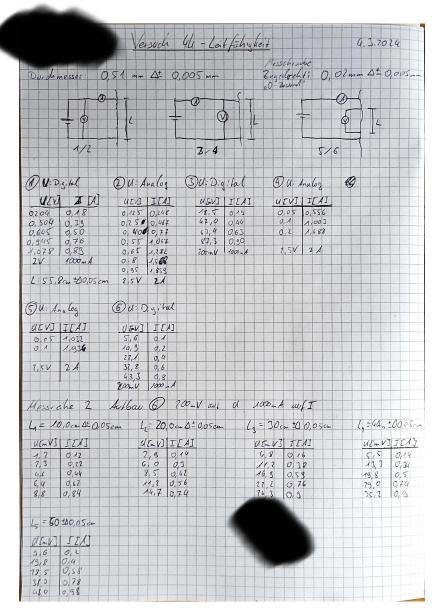


Abbildung 4: Rohdaten

Literatur

- [Bar24a] Dr. Christof Bartels. Datenanalyse A. 29. Jan. 2024. URL: https://ilias.uni-freiburg.de/goto.php?target=file_3372920_download&client_id=unifreiburg (besucht am 05.03.2024).
- [Bar24b] Dr. Christof Bartels. Datenanalyse B. 29. Jan. 2024. URL: https://ilias.uni-freiburg.de/goto.php?target=file_3372919_download&client_id=unifreiburg (besucht am 22.02.2024).
- [Bar24c] Dr. Christof Bartels. Versuch 44. 12. Feb. 2024. URL: https://ilias.uni-freiburg.de/goto.php?target=file_3386193_download&client_id=unifreiburg (besucht am 22.02.2024).
- [GUA] UNI-TREND TECHNOLOGY(DONG GUAN)LIMITED. Digitales Multimeter. URL: https://phypra.uni-freiburg.de/ap/44/Uni-T%20UT51%200perating%20Manual.pdf (besucht am 05.03.2024).
- [Mes14] PeakTech Prüf- und Messtechnik GmbH. Analoges Multimeter. Aug. 2014. URL: https://phypra.uni-freiburg.de/ap/44/PeakTech%203260%20Bedienungsanleitung.pdf (besucht am 05.03.2024).
- [Wik23] Wikipedia. Spezifischer Widerstand. 12. Dez. 2023. URL: https://de.m.wikipedia.org/wiki/Spezifischer_Widerstand (besucht am 04.03.2024).