

Physiklabor für Anfänger*innen 2
Ferienpraktikum im Wintersemester 2018/19

Versuch 44: Spannung, Strom und Widerstandsnetzwerke

(durchgeführt am 04. März 2019 bei)

04. März 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuchs	4
2 Physikalische Grundlagen	4
3 Aufbau und Durchführung	5
3.1 Arbeiten am Steckbrett	5
3.2 Widerstandswürfel	5
3.3 Optionale Aufgabe: Widerstandsnetzwerk	7
4 Messung	7
4.1 Arbeiten am Steckbrett	7
4.2 Widerstandswürfel	9
4.3 Optionale Aufgabe	9
5 Auswertung	10
5.1 Arbeiten am Steckbrett	10
5.1.1 Kirchhoffsche Regeln	11
5.1.2 Widerstandsnetzwerke	11
5.2 Bestimmung des Gesamtwiderstandes des Widerstandswürfels auf drei Arten	12
5.3 Bestimmung des Gesamtwiderstandes des Tetraeders auf drei Arten	13
6 Diskussion	14
6.1 Kirchhoffsche Regeln und Widerstandsnetzwerke	14
6.1.1 Kirchhoffsche Regeln	14
6.1.2 Widerstandsnetzwerke	15
6.2 Gesamtwiderstand des Würfels	16
6.3 Gesamtwiderstand des Tetraeders	17
A Anhang	19
A.1 Analyse der Widerstandsnetzwerke	19
A.2 Herleitung des Gesamtwiderstands des Widerstandstetraeders	19
A.3 Laborheft	21

In Tabelle 1 ist eine Übersicht über alle in diesem Versuchsprotokoll verwendeten Symbole gegeben.

Größensymbol	Bedeutung
U	Spannung
I	Stromstärke
R	Elektrischer Widerstand
s_x	Unsicherheit auf (Mess-) Größe x

Tabelle 1: Symbole, die in diesem Versuchsprotokoll verwendet wurden.

1 Ziel des Versuchs

In Teil eins des Versuchs geht es darum, sich mit den Messgrößen Strom und Spannung vertraut zu machen. Außerdem sollen die Kirchhoffschen Regeln verifiziert, sowie Kombinationen von Reihen- und Parallelschaltung untersucht werden.

Im zweiten Versuchsteil soll eigenständig ein Widerstandswürfel gelötet und anschließend sein Gesamtwiderstand auf drei verschiedene Arten berechnet werden.

2 Physikalische Grundlagen

In dem Versuch sollen das ohmsche Gesetz [1]

$$U = RI \quad (1)$$

und die Kirchhoffschen Gesetze, also die Knotenregel

$$\sum_k I_k = 0 \quad (2)$$

sowie die Maschenregel

$$\sum_k U_k = 0 \quad (3)$$

verifiziert werden. Aus den Kirchhoffschen Gesetzen folgt die Addition von Widerständen für Reihen- und Parallelschaltung. Für die Reihenschaltung von Widerständen gilt:

$$R = \sum_k R_k. \quad (4)$$

Bei der Parallelschaltung gilt:

$$\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}. \quad (5)$$

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Arbeiten am Steckbrett

Zu Beginn des Versuchs sollte das Netzgerät auf die maximale Spannung eingestellt werden, sodass man mit einem digitalen Multimeter die maximal gelieferte Spannung U_{\max} und Stromstärke I_{\max} gemessen werden kann.

Daraufhin sollten vier verschiedene Schaltkreise, die aus Glühbirnen und Brücken bestanden, sowohl qualitativ als auch quantitativ untersucht werden. Eine Übersicht über die Schaltkreise, in der auch die Position der von uns verwendeten Multimeter abgebildet ist, ist in Abbildung 1 gegeben.

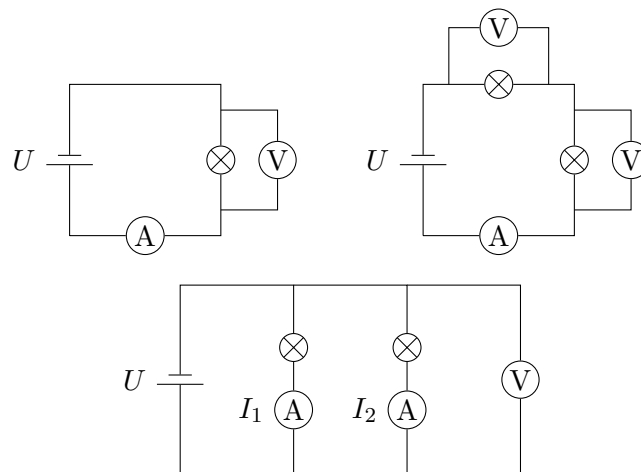


Abbildung 1: Übersicht der in Abschnitt 3.1 verwendeten Schaltkreise.

Zuletzt bauten wir zwei Widerstandsnetzwerke aus je fünf Einzelwiderständen, von denen wir zuvor mit der Ohmfunktion des digitalen Multimeters den elektrischen Widerstand gemessen haben. Nachdem wir die jeweilige Schaltung gebaut haben, maßen wir mit demselben Multimeter den Gesamtwiderstand. Die von uns konstruierten Widerstandsnetzwerke sind in Abbildung 2 zu sehen. Die eigentliche Messung geschah ereignislos.

3.2 Widerstandswürfel

Im zweiten Teil des Versuchs sollte ein Widerstandswürfel unter Zuhilfenahme eines Lötgerätes erstellt und untersucht werden. Dafür untersuchten wir zunächst zwölf einzelne Widerstände mit einem digitalen Multimeter auf ihren elektrischen Widerstand. Diese verlöteten wir dann mit einem Lötgerät zu einem Würfel. Das Schaltbild des Würfels ist in Abbildung 3 dargestellt. Nach dem Verlöten maßen wir mit demselben Multimeter den Widerstand zwischen zwei zueinander diagonalen Ecken des Würfels mit der Ohmfunktion des Multimeters.

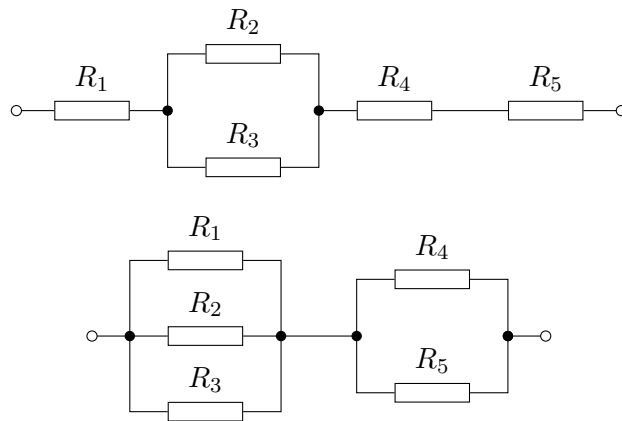


Abbildung 2: Widerstandsnetzwerke aus Abschnitt 3.1

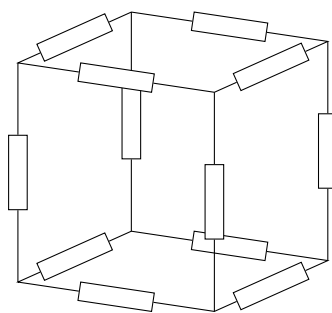


Abbildung 3: Schaltbild des Widerstandswürfels

Danach haben wir den Würfel mit dem Steckbrett verbunden, um dann das Netzgerät auf Maximalspannung an den Würfel anzuschließen und mit dem digitalen Multimeter die abfallende Spannung, sowie mit dem analogen Multimeter die Stromstärke zu messen. Danach benutzten wir das digitale Multimeter für die Strommessung und das analoge Multimeter für die Spannungsmessung. Das Messen beider Größen verlief ereignislos.

3.3 Optionale Aufgabe: Widerstandsnetzwerk

Da uns zum Schluss noch ein wenig Zeit blieb, löteten wir aus sechs zuvor wie oben vermessenen Widerständen ein Widerstandstetraeder. Nach dem Löten vermaßen wir den Gesamtwiderstand des Tetraeders auf die oben beschriebene Weise zwischen zwei benachbarten Punkten auf dem Tetraeder. Das Schaltbild des Tetraeders ist in Abbildung 4 gezeigt.

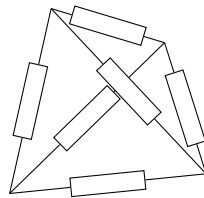


Abbildung 4: Schaltbild des Widerstandstetraeders

4 Messung

4.1 Arbeiten am Steckbrett

Im ersten Versuchsteil haben wir zuerst folgende maximalen Werte von Strom und Spannung gemessen:

$$\begin{aligned} I_{\max} &= (0,199 \pm 0,004) \text{ A} \\ U_{\max} &= (9,96 \pm 0,06) \text{ V.} \end{aligned} \tag{6}$$

Anschließend haben wir drei Schaltkreise bestehend aus ein oder zwei Glühlampen auf dem Steckbrett nach Abbildung 1 aufgebaut. Die von uns gemessenen Werte sind in Tabelle 2 aufgeführt.

Dabei konnten wir beobachten, dass zum einen eine der Lampen einzeln deutlich schwächer leuchtet als die andere. Zum anderen fiel uns auf, dass beide Glühlampen in Reihenschaltung schwächer leuchten als einzeln. Bei der Parallelschaltung dagegen leuchteten die beiden Lampen etwa genauso stark, wie sie es einzeln in einem Stromkreis tun würden. Als wir dann eine Brücke parallel dazu schalteten, sahen wir, dass gar keine Lampe mehr leuchtete. Die genauen Werte des verbleibenden Stromes in der Parallelschaltung waren in

Schaltkreis	Spannungen (V)	Stromstärken (A)
Einfache Lampe	$9,44 \pm 0,06$	$0,197 \pm 0,010$
Zwei Lampen - Reihenschaltung	$1,95 \pm 0,02$ $8,02 \pm 0,05$	$0,081 \pm 0,004$
Zwei Lampen - Parallelschaltung	$5,04 \pm 0,04$	$0,060 \pm 0,004$ $0,142 \pm 0,008$

Tabelle 2: Messergebnisse verschiedener Schaltkreise mit Glühlampen aus Abbildung 1. Mehrfachnennungen derselben Größe innerhalb eines Schaltkreises beziehen sich auf die verschiedenen Volt-, bzw. Amperemeter.

diesem Fall:

$$\begin{aligned} I_1 &= (0,009 \pm 0,001) \text{ A} \\ I_2 &= (0,037 \pm 0,002) \text{ A.} \end{aligned} \quad (7)$$

Um später die Kirchhoffschen Regeln überprüfen zu können, haben wir zusätzlich zu den Werten aus Tabelle 2 noch die Stromstärken des ein- und auslaufenden Stromes gemessen. Die unterschiedlichen Unsicherheiten der in Tabelle 3 angegebenen Werte sind dabei auf die verschiedenen Skalen des digitalen Multimeters zurückzuführen: Diese berechneten wir mit der auf der Anleitung des digitalen Multimeters angegebenen Formel, die im Laborheft (siehe Anhang) angegeben ist.

i	I_i in A
1	$0,061 \pm 0,002$
2	$0,139 \pm 0,003$
3	$0,199 \pm 0,004$
4	$0,199 \pm 0,004$

Tabelle 3: Stromstärken in der Parallelschaltung von Glühlampen. Die Definitionen von I_i ist dem Parallelschaltbild aus Abbildung 1 zu entnehmen.

Abschließend haben wir zwei Netzwerke aus Widerständen aufgebaut (siehe Abbildung 2), von denen wir die Einzelwiderstände und die Gesamtwiderstände jeweils mit der Ohmfunktion des Multimeters gemessen haben. Die Einzelmessungen sind in Tabelle 4 angegeben, wobei auch hier die Unsicherheiten mit der in der Anleitung angegebenen und im Laborheft (siehe Anhang) aufgeführten Formel berechnet wurde.

Dabei haben wir auch die Gesamtwiderstände

$$R_{\text{ges},1} = (201 \pm 3) \Omega \quad (8)$$

und

$$R_{\text{ges},2} = (49,9 \pm 1,0) \Omega \quad (9)$$

i	R_i in Ω
1	$10,2 \pm 1,8$
2	$82,3 \pm 0,8$
3	$10,2 \pm 1,8$
4	$82,2 \pm 0,8$
5	$99,6 \pm 0,9$

Tabelle 4: Einzelwiderstände in beiden Widerstandsnetzwerken. Die Definitionen von R_i sind in Abbildung 2 auffindbar.

gemessen.

4.2 Widerstandswürfel

Bevor der Würfel zusammenzulöten war, sollten die Widerstände einzeln ausgemessen werden. Die Messwerte sind mitsamt Unsicherheiten in Tabelle 5 angegeben. Die Unsicherheiten sind dabei nicht komplett gleich, wurden allerdings auf den gleichen Wert gerundet (und wurden wie auf dem Anleitungsblatt des Digitalmultimeters angegeben berechnet). Nach dem Löten

Widerstände in Ω		
474 ± 5	471 ± 5	470 ± 5
473 ± 5	477 ± 5	473 ± 5
471 ± 5	469 ± 5	472 ± 5
474 ± 5	476 ± 5	474 ± 5

Tabelle 5: Werte der 12 Widerstände.

des Würfels haben wir mehrere Messungen durchgeführt, um den Gesamtwiderstand auf drei verschiedene Arten zu bestimmen: Zunächst sollte mit der Ohmfunktion des digitalen Multimeters der Gesamtwiderstand bestimmt werden. Das Ergebnis beträgt

$$R = (392 \pm 4) \Omega. \quad (10)$$

Daraufhin war mit einer Kombination von analogem und digitalem Multimeter die Stromstärke, bzw. die Spannung zu bestimmen, die durch den Würfel beim Anschließen des Netzteils fließt, bzw. darüber abfällt. Werte für Stromstärke und Spannung sind in Tabelle 6 gegeben.

4.3 Optionale Aufgabe

Genau wie in dem Versuchsteil mit Widerstandswürfel war bei der Bestimmung des Gesamtwiderstands eines Widerstandstetraeders zunächst sechs

Spannungs-/Strommessgerät	U in V	I in A
DMM/AMM	$9,37 \pm 0,06$	$0,023 \pm 0,001$
AMM/DMM	$9,5 \pm 0,6$	$0,026 \pm 0,001$

Tabelle 6: Werte zur Berechnung des Gesamtwiderstandes des Widerstandswürfels.

Einzelwiderstände zu vermessen. Die elektrischen Widerstände dieser sind mitsamt Unsicherheit in Tabelle 7 aufgeführt (letztere wurden wie oben nach Anleitung berechnet). Auch hier haben wir zunächst mit der Ohmfunktion

Widerstände in Ω	
468 ± 5	465 ± 5
471 ± 5	466 ± 5
468 ± 5	465 ± 5

Tabelle 7: Werte der sechs Widerstände

des Digitalmultimeters den Gesamtwiderstand bestimmt:

$$R = (235 \pm 5) \Omega \quad (11)$$

Schließlich waren noch Spannung und Stromstärke analog zu oben zu bestimmen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 8 aufgeführt.

Spannungs-/Strommessgerät	U	I
DMM/AMM	$9,71 \pm 0,06\text{V}$	$0,040 \pm 0,001\text{A}$
AMM/DMM	$9,50 \pm 0,45\text{V}$	$0,043 \pm 0,001\text{A}$

Tabelle 8: Werte zur Berechnung des Gesamtwiderstandes des Widerstandstetraeders

5 Auswertung

5.1 Arbeiten am Steckbrett

Die Beobachtung, dass die Lampen weniger hell leuchten, wenn sie in Reihe geschaltet werden, lässt sich mit ?? und dem ohmschen Gesetz erklären. Schaltet man nämlich mehrere Widerstände in Reihe, so addieren sich deren Widerstände. Daraus folgt dann, dass bei gleich bleibender Spannung der gesamte Stromfluss kleiner wird. Durch den verringerten Stromfluss leuchten die Lampen weniger stark. Schaltet man die Lampen parallel, ändert

sich ihre Helligkeit im Vergleich dazu, wenn sie alleine im Stromkreis sind, nicht, weil in jeder Masche die Stärke des Stromes und der Spannung gleich im Vergleich zur Einzelschaltung ist. Der Strom muss in jeder Masche nur durch eine Lampe fließen. Diese leuchten daher alle genauso stark, wie in der Einzelschaltung. Schaltet man eine Brücke parallel zu den Lampen, leuchtet keine Lampe mehr, da es in diesem Fall zu einem Kurzschluss kommt.

5.1.1 Kirchhoffsche Regeln

Um die Kirchhoffschen Gesetze zu verifizieren, sind die Messergebnisse aus Tabelle 2 auszuwerten. Wir beginnen mit der Maschenregel: Diese besagt für unsere Reihenschaltung, dass die Summe der gemessenen Einzelspannungen $U_{\Sigma} := U_1 + U_2$ gerade die durch das Multimeter zuvor bestimmte Maximalspannung U_{\max} ausmacht. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} U_{\Sigma} &= U_1 + U_2 \\ &= 9,97 \text{ V} \\ s_{U_{\Sigma}} &= \sqrt{s_{U_1}^2 + s_{U_2}^2} \\ &= 0,05 \text{ V} \end{aligned} \tag{12}$$

Im Vergleich zu $U_{\max} = (9,95 \pm 0,06) \text{ V}$ erhalten wir damit eine berechnete Spannung von $U_{\Sigma} = (9,97 \pm 0,05) \text{ V}$. Die prozentuale Abweichung des gemessenen Werts vom berechneten Wert beträgt absolut 0,2%.

Nun überprüfen wir die Knotenregel an unserem Glühlampen-Parallelkreis. Die Kirchhoffsche Knotenregel besagt hier, dass die Summe der auslaufenden Ströme in einem Knoten gleich der Summe der einlaufenden Ströme im selben Knoten ist, i. e. $I_{\max} = I_{\Sigma}$, wobei $I_{\Sigma} := I_1 + I_2$. Die Berechnung letzterer Größe gestaltet sich sehr einfach:

$$\begin{aligned} I_{\Sigma} &= I_1 + I_2 \\ &= 0,202 \text{ A} \\ s_{I_{\Sigma}} &= \sqrt{s_{I_1}^2 + s_{I_2}^2} \\ &= 0,0089 \text{ A} \end{aligned} \tag{13}$$

Im Vergleich zum erwarteten Wert von $I_{\max} = 0,199 \text{ A}$ erhalten wir somit $I_{\Sigma} = (0,202 \pm 0,009) \text{ A}$. Die prozentuale Abweichung des gemessenen Werts vom berechneten Wert beträgt vom Betrag her 1,5%.

5.1.2 Widerstandsnetzwerke

Um die aus den Kirchhoffschen Regeln hergeleiteten Formeln für die Gesamtwiderstände von Reihen- und Parallelschaltungen von Widerständen zu verifizieren, müssen die Messergebnisse aus Tabelle 4 ausgewertet werden. Für das erste Widerstandsnetzwerk setzen wir die Einzelwiderstände

der Tabelle in den im Anhang hergeleiteten Zusammenhang (45) ein und erhalten

$$R_{\text{ges},1} = 201,08 \Omega. \quad (14)$$

Der Fehler auf diesen Wert lässt sich mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung aus (45) berechnen:

$$\begin{aligned} s_{R_{\text{ges},1}} &= \sqrt{\sum_{i=1}^5 \left(\frac{\partial R_{\text{ges},1}}{\partial R_i} s_{R_i} \right)^2} \\ &= 1,20 \Omega \end{aligned} \quad (15)$$

Die Unsicherheiten s_{R_i} sind dabei in Tabelle 4 auffindbar. Wir erhalten somit für den aus den Einzelmessungen berechneten erwarteten Wert für den Gesamtwiderstand des ersten Widerstandsnetzwerks

$$R_{\text{ges},1} = (201,08 \pm 1,20) \Omega. \quad (16)$$

Die prozentuale Abweichung des gemessenen Werts (siehe Gleichung (8)) vom Bestwert beträgt absolut 0,4%.

Auf dieselbe Weise lässt sich ebenfalls der Gesamtwiderstand des zweiten Widerstandsnetzwerks berechnen: Einsetzen der Einzelwiderstände aus Tabelle 4 in Gleichung (46) liefert

$$R_{\text{ges},2} = 49,84 \Omega. \quad (17)$$

Mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung lässt sich wie oben der Fehler auf diesen Wert berechnen:

$$\begin{aligned} s_{R_{\text{ges},2}} &= \sqrt{\sum_{i=1}^5 \left(\frac{\partial R_{\text{ges},2}}{\partial R_i} s_{R_i} \right)^2} \\ &= 0,30 \Omega \end{aligned} \quad (18)$$

Als Ergebnis erhalten wir daher für den aus den Einzelmessungen berechneten erwarteten Wert für den Gesamtwiderstand des zweiten Widerstandsnetzwerks

$$R_{\text{ges},2} = (49,84 \pm 0,30) \Omega. \quad (19)$$

Die prozentuale Abweichung des bestimmten Werts (siehe Gleichung (9)) vom Bestwert beträgt absolut 0,1%.

5.2 Bestimmung des Gesamtwiderstandes des Widerstandswürfels auf drei Arten

Bei der direkten Messung erhielten wir über die Ohm-Funktion des Multimeters für den Widerstand den Wert

$$R_{\text{direkt}} = (392 \pm 4) \Omega. \quad (20)$$

Aus den Werten aus Tabelle 6 für die Messung mit DMM/AMM ergibt sich der Gesamtwiderstand des Tetraeders aus Gleichung (1) mit dem Fehler

$$s_R = \sqrt{\left(\frac{U}{I^2} s_I\right)^2 + \left(\frac{1}{I} s_U\right)^2} = 17,90 \Omega. \quad (21)$$

Insgesamt erhalten wir aus dieser Messung also den Gesamtwiderstand

$$R_{\text{DMM/AMM}} = (407,39 \pm 17,90) \Omega. \quad (22)$$

Die selbe Rechnung mit den Werten aus Tabelle 6 liefert jetzt für die Messung mit AMM/DMM analog zu der Messung mit DMM/AMM den Gesamtwiderstand

$$R_{\text{AMM/DMM}} = (365,38 \pm 27,02) \Omega. \quad (23)$$

Aus den Regeln für Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen ergibt sich aus ?? und ?? für den Gesamtwiderstand des Würfels der berechnete Wert:

$$R_{\text{ges}} = \frac{5}{6} R \quad (24)$$

Den Widerstand R können wir als arithmetischen Mittelwert oder gewichteten Mittelwert aus den Werten aus Tabelle 5 berechnen. Da unsere Messungen für die einzelnen Widerstände unterschiedlich genau gemessen sind, entscheiden wir uns für den gewichteten Mittelwert. Aus den Gewichtungsfaktoren und unseren Messwerten ergibt sich das gewichtete arithmetische Mittel zu

$$\bar{R} = \frac{\sum_i \left(\frac{1}{s_{R_i}}\right)^2 R_i}{\sum_i \left(\frac{1}{s_{R_i}}\right)^2} = 472,82 \Omega \quad (25)$$

mit dem Fehler

$$s_{\bar{R}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i \left(\frac{1}{s_{R_i}}\right)^2}} = 1,38 \Omega. \quad (26)$$

Wir gehen also von

$$R = (472,82 \pm 1,38) \Omega \quad (27)$$

aus. Aus Gleichung (24) ergibt sich damit

$$R_{\text{ges}} = (394,02 \pm 1,15) \Omega. \quad (28)$$

5.3 Bestimmung des Gesamtwiderstandes des Tetraeders auf drei Arten

Bei der direkten Messung erhielten wir über die Ohm-Funktion des Multimeters für den Widerstand den Wert

$$R_{\text{direkt}} = (235 \pm 5) \Omega. \quad (29)$$

Aus den Werten aus Tabelle 8 für die Messung mit DMM/AMM ergibt sich der Gesamtwiderstand des Tetraeders aus Gleichung (1) mit dem Fehler

$$s_R = \sqrt{\left(\frac{U}{I^2} s_I\right)^2 + \left(\frac{1}{I} s_U\right)^2} = 6,25 \Omega. \quad (30)$$

Insgesamt erhalten wir aus dieser Messung also den Gesamtwiderstand

$$R_{\text{DMM/AMM}} = (242,75 \pm 6,25) \Omega. \quad (31)$$

Wiederum liefert die selbe Rechnung wie bei der Messung mit DMM/AMM jetzt mit den Werten für AMM/DMM aus Tabelle 8 das Ergebnis für den Gesamtwiderstand des Tetraeders:

$$R_{\text{AMM/DMM}} = (220,93 \pm 11,66) \Omega. \quad (32)$$

Man berechnet den erwarteten Wert für den Gesamtwiderstand des Tetraeders mit Gleichung (47). Den durchschnittlichen Widerstand R berechnen wir mit dem gewichteten arithmetischen Mittel:

$$\bar{R} = \frac{\sum_i \left(\frac{1}{s_{R_i}}\right)^2 R_i}{\sum_i \left(\frac{1}{s_{R_i}}\right)^2} = 467,15 \Omega \quad (33)$$

mit dem Fehler:

$$s_{\bar{R}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i \left(\frac{1}{s_{R_i}}\right)^2}} = 1,93 \Omega. \quad (34)$$

Mit Gleichung (47) und

$$R = (467,15 \pm 1,93) \Omega \quad (35)$$

ergibt sich

$$R_{\text{ges}} = (233,58 \pm 0,97) \Omega. \quad (36)$$

6 Diskussion

6.1 Kirchhoffsche Regeln und Widerstandsnetzwerke

6.1.1 Kirchhoffsche Regeln

Für die Reihenschaltung berechneten wir eine Gesamtspannung von $U_{\Sigma} = (9,97 \pm 0,05) \text{ V}$, die verhältnismäßig nahe am erwarteten Wert von $U_{\text{max}} = (9,95 \pm 0,06) \text{ V}$ liegt. Da beide Werte innerhalb des $1\text{-}\sigma$ -Bereichs des jeweils anderen Wertes liegen, können beide Messungen als miteinander verträglich angesehen werden. Zusätzlich ist auch neben der Übereinstimmung im

jeweiligen Quantil die prozentuale Abweichung mit 0,2% sehr gering. Die Vorhersage der Kirchhoffschen Maschenregel hat sich also hier bestätigt.

Bei der Analyse der Parallelschaltung berechneten wir eine Stromstärke von $I_{\Sigma} = (0,202 \pm 0,009) \text{ A}$, die ebenfalls nahe am erwarteten Wert von $I_{\max} = (0,199 \pm 0,004) \text{ A}$ liegt. Auch hier liegen beide Werte innerhalb des $1\text{-}\sigma$ -Bereichs des jeweils anderen Wertes. Obwohl die prozentuale Abweichung mit 1,5% nicht ganz so gering ist wie die Abweichung der Werte bei der Reihenschaltung, können wir mit unserem Experiment die Kirchhoffsche Knotenregel als bestätigt ansehen.

Trotz der geringen Abweichung vom erwarteten Wert ist eine Diskussion möglicher Fehler nicht zu vernachlässigen: Als Hauptquellen systematischer Fehler lassen sich zum einen die Innenwiderstände der verwendeten Leiter, Netzteile und Messgeräte aufführen: Da Widerstände nicht negativ sein können, kann eine gemessene Spannung stets über dem „wahren“, nicht durch den Innenwiderstand verfälschten Wert liegen. Zum anderen haben wir bei der Analyse von Reihen- und Parallelkreis nicht die Gesamtspannungen und -ströme direkt am Netzteil gemessen, sondern die Gesamtspannungen und -ströme aus dem vorangegangenen Teil übernommen. Obwohl dies für ideale Spannungsquellen keinen Unterschied machen sollte, können für reale Spannungsquellen dort nicht zu vernachlässigende Unterschiede auftauchen. Möglicherweise sind die oben bestimmten geringen Abweichungen daher fehlerhaft.

6.1.2 Widerstandsnetzwerke

Für das erste von uns konstruierte Widerstandsnetzwerk maßen wir mit der Ohmfunktion des digitalen Multimeters einen Gesamtwiderstand von $R_{\text{ges},1} = (201 \pm 3) \Omega$ und berechneten aus den Einzelwiderständen den Wert $R_{\text{ges},1}^{\text{berechnet}} = (201,08 \pm 1,20) \Omega$. Erneut befinden sich beide Werte im $1\text{-}\sigma$ -Bereich des jeweils anderen Wertes, weswegen wir von einer guten Übereinstimmung von Messung und über Widerstandsaddition ermittelte Rechnung sprechen können. Dabei ist auch hier der Fehler nicht allzu groß, da auch die prozentuale Abweichung mit 0,4% relativ gering ist.

Beim zweiten Widerstandsnetzwerk haben wir mit der Ohmfunktion des Multimeters einen Widerstandswert von $R_{\text{ges},2} = (49,9 \pm 1,0) \Omega$ gemessen und mit der im Anhang hergeleiteten Vorschrift einen Wert von $R_{\text{ges},2}^{\text{berechnet}} = (49,84 \pm 0,30) \Omega$. Beide Werte befinden sich im $1\text{-}\sigma$ -Bereich vom jeweils anderen Wert. Wir können daher auch hier von einer guten Übereinstimmung von Rechnung und Messung sprechen. Da auch die prozentuale Übereinstimmung mit 0,1% sehr gering ist, liegt die gute Übereinstimmung nicht (nur) am eventuell zu hoch abgeschätzten Fehler.

Auch hier ist trotz der relativ guten Übereinstimmung zwischen berechneten und gemessenen Werten eine Fehlerdiskussion nicht zu unterschlagen: Genau wie oben ist eine große Fehlerquelle der Innenwiderstand von Netzteil,

Leitern und Messgeräte, die uns einen scheinbar höheren Widerstandswert liefern könnte. Der Fehler ist daher auch hier systematischer Natur.

6.2 Gesamtwiderstand des Würfels

Aus der direkten Messung ergab sich für den Gesamtwiderstand des Würfels

$$R_{\text{direkt}} = (392 \pm 4) \Omega. \quad (37)$$

Dabei spielen statistische Unsicherheiten, wie das Wackeln der selbstgebauten Krokodilklemmen und Schwankungen in der Anzeige des Multimeters eine Rolle. Zusätzlich kann man noch in Betracht ziehen, dass die Innenwiderstände der Kabel und der Krokodilklemmen nicht zu vernachlässigen sind. Das ist aber ein systematischer Fehler. Wir können nicht sagen, wie sich die mechanische Deformation auf Widerstände auswirkt und wissen deswegen nicht, ob das Verknicken der Widerstände als systematischer oder statistischer Fehler zu betrachten ist.

Bei der Bestimmung durch Strom- und Spannungsmessung erhielten wir für den Gesamtwiderstand mit DMM/AMM:

$$R_{\text{DMM/AMM}} = (407,39 \pm 17,90) \Omega. \quad (38)$$

und mit AMM/DMM:

$$R_{\text{AMM/DMM}} = (365,38 \pm 27,02) \Omega. \quad (39)$$

Auch hier fließen statistische Unsicherheiten, wie das Wackeln der Krokodilklemmen und Schwankungen in der Anzeige des digitalen Multimeters, so wie Ungenauigkeiten beim Ablesen des analogen Multimeters ein. Systematische Fehler sind die Innenwiderstände der Kabel und der Krokodilklemmen. Außerdem fließt hier auch noch mit ein, wie gut wir die einzelnen Widerstände zusammengelötet haben. Das Zusammenlöten ist uns manchmal, trotz dem Einklemmen der Widerstände in die Krokodilsklemmen nicht so gut gelungen, weil die bereits gelöteten Ecken teilweise wieder aufgesprungen sind, wenn wir mit dem heißen LötKolben eine bereits zusammengelötete Ecke berührt haben, um noch einen dritten Widerstand an diese Ecke zu löten. Eventuell verknickte Widerstände können sich wieder als systematische oder statistische Fehler auswirken. Bei beiden Messungen (AMM/DMM und DMM/AMM) ist es auch noch wichtig zu bedenken, dass wir die Spannung und den Strom jeweils mit unterschiedlichen Messgeräten messen. Da beide Messgeräte auch einen verschiedenen Fehler haben, kann es sein, dass es bei der Verrechnung von zwei Werten von unterschiedlichen Messgeräten zu einer noch größeren Unsicherheit des Ergebnisses kommt.

Beim Messen der Einzelwiderstände mit dem Multimeter fließen wieder die selben oben genannten statistischen und systematischen Unsicherheiten

ein. Insgesamt ergibt sich für den arithmetischen Mittelwert der Einzelwiderstände mit Fehler der durchschnittliche Widerstand

$$\bar{R} = (472,82 \pm 1,38) \Omega. \quad (40)$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem nominellen Wert $R = 47 \cdot 10^1 \Omega$ mit 5% Toleranz, also einer Abweichung von $\pm 23,5 \Omega$, erkennt man das der berechnete Wert für den Widerstand ?? gut mit dem nominellen Wert der Widerstände übereinstimmt und in dessen Toleranzbereich liegt.

Der berechnete Wert für den Gesamtwiderstand des Würfels ergibt sich mit Gleichung (24) und ?? zu

$$R_{\text{berechnet}} = (394,02 \pm 1,15) \Omega. \quad (41)$$

Wir haben jetzt drei verschiedene Werte für den Gesamtwiderstand des Würfels.

$$\begin{aligned} R_{\text{direkt}} &= (392 \pm 4) \Omega \\ R_{\text{DMM/AMM}} &= (407,39 \pm 17,90) \Omega \\ R_{\text{AMM/DMM}} &= (365,38 \pm 27,02) \Omega \end{aligned} \quad (42)$$

Wir entscheiden uns dafür, nicht die Werte $R_{\text{DMM/AMM}} = (407,39 \pm 17,90) \Omega$ und $R_{\text{AMM/DMM}} = (365,38 \pm 27,02) \Omega$ für weitere Rechnungen zu verwenden. Der Grund ist das oben bereits angeführte Problem, dass die Messungen für die berechneten Ergebnisse hier mit zwei unterschiedlichen Messgeräten durchgeführt worden sind, die Werte mit sehr großen Fehlern behaftet sind. Außerdem ist leicht erkennbar, dass die Werte für den Gesamtwiderstand aus den Rechnungen mit DMM/AMM bzw. AMM/DMM stark nach oben und unten von dem dritten möglichen Werte, sowie dem berechneten Wert für den Gesamtwiderstand des Würfels abweichen. $R_{\text{direkt}} = (392 \pm 4) \Omega$ und $R_{\text{berechnet}} = (394,02 \pm 1,15) \Omega$ weichen um weniger als einen Prozent voneinander ab. Um mit einem möglichst genauen Wert für den Gesamtwiderstand des Würfels zu rechnen, entscheiden wir uns für weitere Rechnungen mit $R_{\text{direkt}} = (392 \pm 4) \Omega$ zu rechnen. Allerdings sollten wir beim berechneten Wert für den Gesamtwiderstand noch beachten, dass beim Messen der Einzelwiderstände wieder systematische Unsicherheiten, wie Innenwiderstände der Kabel und der Krokodilklemmen, und statistische Unsicherheiten, wie Ungenauigkeit und Schwankungen in der Anzeige des Messgeräts aufgetreten sein können. Auch kann sich das Verklicken der Widerstände Unsicherheiten entstehen lassen.

6.3 Gesamtwiderstand des Tetraeders

Bei der Bestimmung des Gesamtwiderstandes des Tetraeders müssen die selben statistischen und systematischen Unsicherheiten, wie bei der Bestimmung des Gesamtwiderstandes des Würfels beachtet werden, weil die selben

Messungen durchgeführt werden. Der einzige Unterschied ist, dass wir jetzt sechs statt zwölf zusammengelötete Widerstände verwenden. Aus unseren Messungen haben wir drei verschiedene Werte für den Gesamtwiderstand des Tetraeders erhalten.

$$\begin{aligned}R_{\text{direkt}} &= (235 \pm 5) \Omega \\R_{\text{DMM/AMM}} &= (242,75 \pm 6,25) \Omega \\R_{\text{AMM/DMM}} &= (220,93 \pm 11,66) \Omega\end{aligned}\tag{43}$$

Der berechnete Wert ist

$$R_{\text{berechnet}} = (233,58 \pm 0,97) \Omega.\tag{44}$$

Aus den selben Gründen wie oben entscheiden wir uns dafür, für weitere Messungen den Wert $R_{\text{direkt}} = (235 \pm 5) \Omega$ zu verwenden. Dieser weicht wieder um weniger als einen Prozent vom berechneten Wert ab.

A Anhang

A.1 Analyse der Widerstandsnetzwerke

Wir betrachten die in Abbildung 2 gezeigten Widerstandsnetzwerke. Um die Gültigkeit des Gesamtwiderstands von Reihen- und Parallelschaltung zu verifizieren, muss der Gesamtwiderstand beider Netzwerke rechnerisch ermittelt werden, um diesen mit dem gemessenen zu vergleichen. Wir beginnen mit dem ersten Netzwerk: Dieses besteht aus einer Reihenschaltung von drei Einzelwiderständen und einer Parallelschaltung von zwei Einzelwiderständen. Mit den Zusammenhängen in ??? erhalten wir einfach:

$$R_{\text{ges},1} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4 + R_5 \quad (45)$$

Nun kann das zweite Widerstandsnetzwerk analysiert werden. Mit denselben Zusammenhängen kommen wir mit geringem rechnerischem Aufwand auf

$$R_{\text{ges},2} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}. \quad (46)$$

A.2 Herleitung des Gesamtwiderstands des Widerstandstetraeders

Für die Analyse des Gesamtwiderstands des Widerstandstetraeders muss dieser zunächst rechnerisch ermittelt werden. Der in Abbildung 4 gezeigte Tetraeder kann mit einem einfachen Ersatzschaltbild (siehe Abb. 5 links) gezeichnet werden. Nehmen wir nun an, dass zwischen den Punkten A und D eine Potentialdifferenz anliegt, so stellen wir fest, dass die Punkte B und C zwangsweise auf dem gleichen Potential liegen müssen. Der Widerstand zwischen ihnen kann daher entfernt werden (siehe Abb. 5 rechts). Nun haben wir es mit einem sehr übersichtlichen Schaltplan zu tun, dessen Gesamtwiderstand mit ??? einfach berechnet werden kann, da es sich um eine Parallelschaltung eines Widerstandes mit zwei Reihenschaltungen jeweils zweier Widerstände handelt.

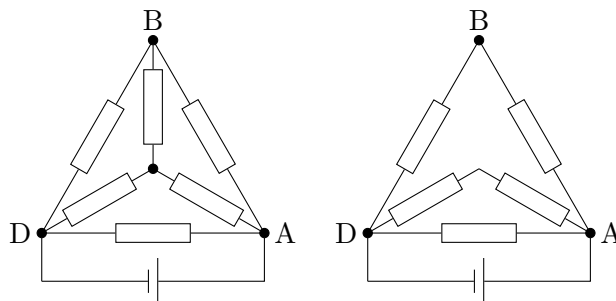


Abbildung 5: Ersatzschaltbilder des Widerstandstetraeders

Der Gesamtwiderstand berechnet sich daher wie folgt:

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{R_{\text{AD}}} + \frac{1}{R_{\text{AC}+R_{\text{CD}}} + \frac{1}{R_{\text{AB}+R_{\text{BD}}}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{R}{2}. \quad (47)$$

A.3 Laborheft


Versuch 44: Spannung, Strom, Widerstandsnetzwerke 04.03.19

Teil 1
digitales Multimeter


a) U_{max} schwankt zwischen 9,95 V und 9,96 V (Einstellung 20)
 $I_{\text{max}} = 0,199 \text{ A} \pm 1 \text{ mA}$ - Schwankung - Skaleneinstellung

analoges Multimeter
 $U_{\text{max}} = 9,95 \text{ V} \pm 0,9 \text{ V}$ SEW 30 (1/2 Skala)
 $I_{\text{max}} = 0,19 \text{ A} \pm 0,03 \text{ A}$ (0,03 Skala) SEW 0,3

digitales Multimeter
 b) eine Glühlampe
 $U_{\text{max}} = 9,44 \text{ V} \pm 0,01 \text{ V}$
 $I = 197 \text{ mA} \pm 1 \text{ mA}$

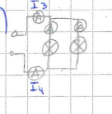


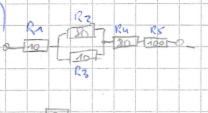
2 Glühlampen in Reihe
 $U_1 = 1,95 \text{ V}$
 $U_2 = 8,02 \text{ V}$
 $I = 80,8 \text{ mA}$




2 Glühlampen parallel
 $U = 5,04 \text{ V}$
 $I_1 = 60,4 \text{ mA}$
 $I_2 = 141,8 \text{ mA}$

wenn Brücke parallel dazu: $I_2 = 3,7 \text{ mA}$
 $I_1 = 0,9 \text{ mA}$

c) 
 $I_2 = 138,7 \text{ mA}$
 $I_1 = 61,4 \text{ mA}$
 $I_3 = 0,199 \text{ A}$
 $I_4 = 0,199 \text{ A}$

d) 
 $R_1 = 10,2 \Omega$
 $R_2 = 82,3 \Omega$
 $R_3 = 10,2 \Omega$
 $R_4 = 82,2 \Omega$
 $R_5 = 99,6 \Omega$
 $R_{\text{ges}} = 201 \Omega$ $\pm 0,1 \Omega$ - Modell - Skala (0,01) - Schwankung


 $R_{\text{ges}} = 49,9 \Omega$

analog: $\pm 1\%$ von Skaleneinheit (SEW)
 digital: $U \pm (0,5\% + 1 \text{ Digit})$
 $I \pm (1,5\% + 1 \text{ Digit})$
 $R \pm (0,8\% + 1 \text{ Digit})$ $R \pm (0,8\% + 3 \text{ Digits}) (200)$

Literatur

- [1] o.V.: *Versuchsanleitungen zum Physikkabor für Anfänger*innen, Teil 2.*
2019