

Physiklabor für Anfänger*innen 2
Ferienpraktikum im Wintersemester 2018/19

Versuch 24: Statistische Schwankungen

(durchgeführt am 01. April 2019 bei)

02. April 2019

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
1 Ziel des Versuchs	1
2 Physikalische Grundlagen	2
3 Aufbau und Durchführung	3
3.1 Aufbau	3
3.2 Messung mit mäßig hoher Zählrate	4
3.3 Messung mit reduzierter Zählrate	4
3.4 Messung bei sehr niedriger Zählrate	4
4 Messung	4
4.1 Messung mit mäßig hoher Zählrate	4
4.2 Messung mit reduzierter Zählrate	5
4.3 Messung bei sehr niedriger Zählrate	5
5 Auswertung	5
5.1 Berechnung der Mittelwerte und Standardabweichungen	5
5.2 Berechnung der Schiefe und Kurtosis	7
5.3 Berechnung theoretischer Häufigkeitswerte und graphische Betrachtung	7
6 Diskussion	10
6.1 Berechnung der Mittelwerte und Standardabweichungen	10
6.2 Berechnung der Mittelwerte und Standardabweichungen	10
6.3 Graphische Betrachtung und Vergleich mit theoretischen Verteilungsfunktionen	12
A Anhang	13
A.1 Messwerte	13
A.2 Laborheft	15

In Tabelle 1 ist eine Übersicht über alle in diesem Versuchsprotokoll verwendeten Symbole gegeben.

Größensymbol	Bedeutung
N, N_0	Teilchenzahl
t	Zeit
Δt	Zeitintervall
λ	Parameter im Zerfallsgesetz
N	Gesamtzahl in der Binomialwahrscheinlichkeitsdichtefunktion
p	Ereigniswahrscheinlichkeit in der Binomialwahrscheinlichkeitsdichtefunktion
x	Erfolgszahl in der Binomialwahrscheinlichkeitsdichtefunktion
x	Registrierte Ereignisse im Zählexperiment
\dot{x}	Zählrate im Zählexperiment
μ	Erwartungswert der Poisson- und Normalverteilungswahrscheinlichkeitsdichtefunktion
σ^2	Varianz der Normalverteilung
c_k	k -tes zentrales Moment
\bar{x}	Arithmetischer Mittelwert von Beobachtungen der Größe x_i
n	Gesamtzahl registrierter Ereignisse x_i
m	Gesamtzahl verschiedener registrierter Ereignisse x_j
i, j	Indizes
N_j	Anzahl Ereignisse x_j
P_{Binomial}	Binomialwahrscheinlichkeitsdichtefunktion
$P_{\text{Gauß}}$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung
P_{Poisson}	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Poissonverteilung
H	Häufigkeitsverteilungen
S	Schiefte
K	Kurtosis
$\hat{\theta}$	Schätzer auf den wahren Wert θ
$\langle \theta \rangle$	Erwartungswert der Zufallsvariable θ
s_x	Unsicherheit auf (Mess-) Größe x

Tabelle 1: Symbole, die in diesem Versuchsprotokoll verwendet wurden.

1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch soll die Häufigkeitsverteilung der Impulse eines Zählrohres zunächst bei der Messung mit einem radioaktiven Präparat und anschließend bei der Bestimmung des Nulleffekts ermittelt werden. Die gemessenen Verteilungen sollen dann graphisch mit der Poisson- bzw. Gaußverteilung zum jeweils gleichen Mittel- bzw. Erwartungswert verglichen werden. Auch sollen die Momente der gemessenen Verteilungen berechnet und anschließend mit den theoretischen Verteilungen verglichen werden.

2 Physikalische Grundlagen

Für den radioaktiven Zerfall gilt das Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

Der radioaktive Zerfall ist ein Zählexperiment. Da eines von N radioaktiven Teilchen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p in einem Zeitintervall zerfällt (oder eben nicht), kann man mit einer Binomialverteilung

$$P_{\text{Binomial}, N, p}(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{N-x} \quad (2)$$

rechnen. Diese kann für $p \rightarrow 0$ und $N \rightarrow \infty$ durch

$$P_{\text{Poisson}, \mu}(x) = \frac{1}{x!} \mu^x e^{-\mu} \quad (3)$$

angenähert werden. Ist die mittlere Zerfallsrate N hoch genug, kann man diese durch die die Poisson-Verteilung annähern:

$$P_{\text{Gauss}, \mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\mu}}. \quad (4)$$

Für die zentralen Momente von Wahrscheinlichkeitsverteilungen gilt

$$c_k = \langle (x - \langle x \rangle)^k \rangle. \quad (5)$$

Das erste zentrale Moment ist der Erwartungswert, der sich mit dem Mittelwert \bar{x} optimal schätzen lässt:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n x_j N_j, \quad (6)$$

wobei N_j die absolute Häufigkeit des Vorkommens von dem Messwert x_j und m die Anzahl der *verschiedenen* x_j darstellt. n ist die Gesamtzahl an aufgenommenen Messzeitintervallen, also in unserem Fall $n = 400$. Die Darstellung der x_i durch verschiedene x_j bietet sich an, da unsere Daten in einem Histogramm vorliegen. Das zweite zentrale Moment ist die Varianz σ^2 mit

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n N_j (x_j - \bar{x})^2, \quad (7)$$

das dritte die Schiefe S

$$S = c_3(\mu) / \sigma^3 \quad (8)$$

mit dem Erwartungswert μ , wobei für diskrete Datensätze die Schiefe mit

$$\hat{S} = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_i \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right)^3 \quad (9)$$

als relative Häufigkeit des Auftretens von bestimmten Messpunkten geschätzt werden kann [3]. Das vierte zentrale Moment ist die Kurtosis K

$$K = c_4(\mu)/\sigma^4 - 3. \quad (10)$$

Diese kann für diskrete Datensätze mit

$$\hat{K} = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_i \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right)^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \quad (11)$$

geschätzt werden [2]. Für die wahren Werte für S und K folgt nach einer kurzen Rechnung aus Gleichungen (8) und (10) für eine Poissonverteilung mit Erwartungswert μ :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \\ K &= \frac{1}{\mu} \end{aligned} \quad (12)$$

Bei Zählexperimenten ist die statistische Unsicherheit streng mit dem Erwartungswert gekoppelt:

$$\mu = \sigma^2. \quad (13)$$

Zum Vergleich mit den in Gleichungen (9) und (11) angegebenen Schätzern werden wir zudem folgende alternative Schätzer S'_{Poisson} und K'_{Poisson} verwenden, die von Gleichung (12) motiviert sind:

$$\begin{aligned} \hat{S}'_{\text{Poisson}} &= \frac{1}{\sqrt{\hat{\mu}}} \\ \hat{K}'_{\text{Poisson}} &= \frac{1}{\hat{\mu}} \end{aligned} \quad (14)$$

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Aufbau

Im Versuchsaufbau tritt γ -Strahlung des radioaktiven Präparates Cäsium 137 durch ein enges Loch in seiner Abschirmung auf ein Zählrohr, das mit einem Hochspannungsgerät verbunden ist (siehe Abb. 1). Zwischen Quelle und Zählrohr können Absorberplatten eingeschoben werden. Das Zählrohr registriert γ -Quanten und der Zählimpulse. Die Zählgeräte sind jeweils an den Computer angeschlossen.

Zuerst schalteten wir den Computer und das Versorgungsgerät ein. Letzteres sollte während des gesamten Versuchs auf der selben Betriebsspannung eingestellt bleiben.

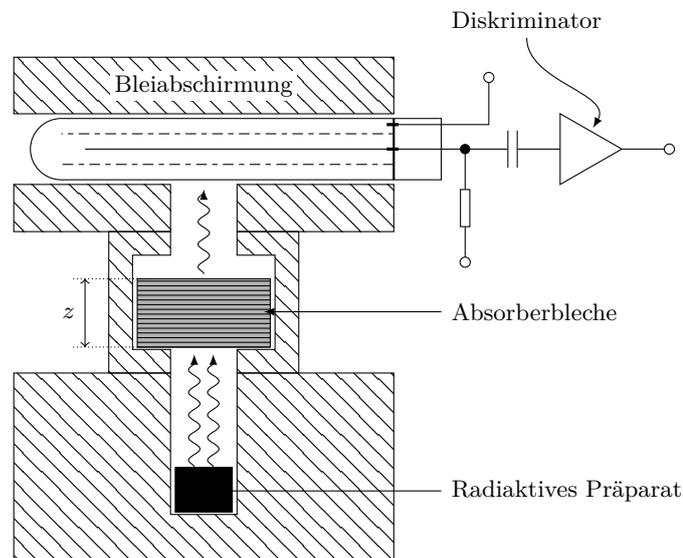


Abbildung 1: Schematischer Versuchsaufbau, adaptiert von dem Versuchskonvolut [1]

3.2 Messung mit mäßig hoher Zählrate

Nach Wahl eines passenden Messzeitintervalls (Registrierung von 20-30 Impulsen), beobachteten wir den Verlauf der Zählrate als Funktion der Zeit im Verlaufsdiagramm. Anschließend maßen wir die auftretende Zählrate über 400 mal und verfolgten sie bei geeigneter Skalierung im Histogramm.

3.3 Messung mit reduzierter Zählrate

Die vorherige Messung wiederholten wir, nachdem wir das Messzeitintervall auf die Registrierung von deutlich weniger Impulsen, etwa 4-6 Impulse, umgeschaltet hatten.

3.4 Messung bei sehr niedriger Zählrate

Erneut wiederholten wir die Messung der Zählrate. Diesmal allerdings mit einer Bleiabschirmung zwischen Präparat und Zählrohr. Wir wählten dafür ein Zeitintervall, in dem ein bis zwei Impulse auftraten.

4 Messung

4.1 Messung mit mäßig hoher Zählrate

Zuerst wählten wir ein passendes Messzeitintervall. Dafür stellten wir das Messzeitintervall so klein wie möglich auf eine Dauer von 1 s ein. In diesem

Messzeitintervall maßen wir allerdings noch deutlich zu viele registrierte Signale. Daraufhin probierten wir aus, wie viele Signale wir nach Einfügen von mehreren Alu- und Metallplatten in den Strahlengang messen konnten. Nachdem wir sechs Aluplatten eingelegt hatten, registrierten wir durchschnittlich etwa 25 Counts pro Messzeitintervall. Das entspricht nach [1] in etwa der gewünschten Anzahl an registrierten Signalen in einem Zeitintervall für die Messung mit mäßig hoher Zählrate. Deswegen entschieden wir uns dafür, diese Messung mit den sechs Platten im Strahlengang durchzuführen. Wir maßen die auftretende Zählrate in einem Messzeitintervall 400 mal. Die Ergebnisse befinden sich in Tabelle 4.

4.2 Messung mit reduzierter Zählrate

Für diese Messung wollten wir das Messzeitintervall auf die Registrierung von deutlich weniger Impulsen, etwa 4–6 Impulse, umschalten. Dafür probierten wir wieder aus, für wie viele Platten im Strahlengang dieses im kleinst möglichen Messzeitintervall von 1 s erfüllt ist. Das war für neun Blei zusammen mit zwei Aluplatten im Strahlengang der Fall. Nun nahmen wir wieder die auftretende Zählrate in einem Messzeitintervall 400 mal auf. Die Resultate unserer Messungen befinden sich in Tabelle 5.

4.3 Messung bei sehr niedriger Zählrate

Erneut wiederholten wir die Messung der Zählrate auf analoge Weise wie in den beiden Versuchsteilen zuvor. Diesmal allerdings mit einer Bleiabschirmung zwischen Präparat und Zählrohr. Unser Messzeitintervall stellten wir wieder so gering wie möglich auf 1 s ein, so dass möglichst wenig, d. h. 1–2, Impulse auftreten. Unsere Messergebnisse befinden sich in Tabelle 6.

5 Auswertung

Da die Auswertung für alle drei Versuchsteile analog abläuft, entschieden wir uns dazu, die Auswertung für Teil 1, die Messung bei mäßig hoher Zählrate, Teil 2, die Messung bei reduzierter Zählrate und Teil 3, die Messung bei sehr niedriger Zählrate parallel durchzuführen.

5.1 Berechnung der Mittelwerte und Standardabweichungen

Aus unseren Daten in Tabellen 4 bis 6 konnten wir über Gleichung (6) den Mittelwert dieser Messungen berechnen und erhielten:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 24,948 \\ \bar{x}_2 &= 5,213 \\ \bar{x}_3 &= 1,290\end{aligned}\tag{15}$$

Dieser Wert stellt bei einer großen Anzahl an Stichproben einen guten Schätzwert für den Erwartungswert μ dar. Die Stichproben-Standardabweichung lässt sich mit der Wurzel aus der Varianz nach Gleichung (7) berechnen. Dafür erhalten wir

$$\begin{aligned} s_{x_1} &= 5,111, \\ s_{x_2} &= 2,217, \\ s_{x_3} &= 1,168. \end{aligned} \tag{16}$$

Diese Werte stellen einen optimalen Schätzwert für die wahre Standardabweichung σ und damit für das Maß der Streuung der jeweiligen Messwerte um ihren Mittelwert dar und beschreiben somit die Unsicherheit einer einzelnen Messung.

Aus diesen Werten erhalten wir direkt über

$$s_{\bar{x}} = s_x / \sqrt{n} \tag{17}$$

die Standardabweichungen des Mittelwertes, wobei s_x Gleichung (16) entnommen werden kann. Die Ergebnisse für unsere Messungen sind:

$$\begin{aligned} s_{\bar{x}_1} &= 0,256 \\ s_{\bar{x}_2} &= 0,111 \\ s_{\bar{x}_3} &= 0,058 \end{aligned} \tag{18}$$

Diese Standardabweichungen der Mittelwerte lassen sich mit der Unsicherheit auf den Mittelwert \bar{x}_i identifizieren. Die Standardabweichung der Poissonverteilung können wir wegen Gleichung (13) aus $\sqrt{\bar{x}}$ berechnen und erhalten:

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{x}_1} &= 4,995 \\ \sqrt{\bar{x}_2} &= 2,283 \\ \sqrt{\bar{x}_3} &= 1,136 \end{aligned} \tag{19}$$

Aus den Mittelwerten und deren Standardabweichungen können wir leicht über

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}}{\Delta t} \tag{20}$$

und

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_{\bar{x}}}{\Delta t} \tag{21}$$

die mittleren Zählraten \bar{x} und deren Unsicherheiten berechnen. Unser Messzeitintervall war bei allen Messungen $t = 1$ s. Von daher lassen sich diese Größen einfach berechnen und wir erhalten

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= (25 \pm 5) \text{ Hz}, \\ \bar{x}_2 &= (5,2 \pm 2,2) \text{ Hz}, \\ \bar{x}_3 &= (1,3 \pm 1,2) \text{ Hz}. \end{aligned} \tag{22}$$

5.2 Berechnung der Schiefe und Kurtosis

Aus Gleichung (9) konnten wir die Schiefe der Datensätze schätzen. Das liefert uns die Ergebnisse:

$$\begin{aligned}\hat{S}_1 &= 0,232 \\ \hat{S}_2 &= 0,384 \\ \hat{S}_3 &= 0,832.\end{aligned}\tag{23}$$

Ebenfalls berechneten wir über Gleichung (11) einen Schätzer für die Kurtosis der Messreihen und erhielten:

$$\begin{aligned}\hat{K}_1 &= -0,144 \\ \hat{K}_2 &= -0,051 \\ \hat{K}_3 &= -0,408.\end{aligned}\tag{24}$$

Im Vergleich dazu gilt für die Schiefe und Kurtosis einer Gaußverteilung immer direkt

$$S_{\text{Gauss}} = K_{\text{Gauss}} = 0,\tag{25}$$

da diese symmetrisch ist. Ein alternativer Schätzer für die Schiefe der Poissonverteilung berechnet sich mit $S_{\text{Poisson}} = 1/\sqrt{\mu}$ und $\hat{\mu} = \bar{x}$, sowie dem Schätzer $\hat{S}'_{\text{Poisson}} = 1/\sqrt{\hat{\mu}}$ zu

$$\begin{aligned}\hat{S}'_{\text{Poisson},1} &= 0,200, \\ \hat{S}'_{\text{Poisson},2} &= 0,438, \\ \hat{S}'_{\text{Poisson},3} &= 0,880.\end{aligned}\tag{26}$$

Ebenso berechnete sich ein alternativer Schätzer für Kurtosis der Poissonverteilung mit $\hat{K}'_{\text{Poisson}} = 1/\mu'$. Das ergab die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}\hat{K}'_{\text{Poisson},1} &= 0,040, \\ \hat{K}'_{\text{Poisson},2} &= 0,192, \\ \hat{K}'_{\text{Poisson},3} &= 0,775.\end{aligned}\tag{27}$$

5.3 Berechnung theoretischer Häufigkeitswerte und graphische Betrachtung

Um die gemessenen Daten mit den theoretischen Verteilungsfunktionen zum gleichen Mittelwert zu vergleichen, berechneten wir die sich aus der Normalverteilung ergebenden theoretischen Häufigkeitswerte

$$H_{\text{Gauss},\bar{x}}(x) = n \cdot P_{\text{Gauss},\bar{x}}(x)\tag{28}$$

und die der entsprechend skalierten Poissonverteilung

$$H_{\text{Poisson},\bar{x}}(x) = n \cdot P_{\text{Poisson},\bar{x}}(x). \quad (29)$$

Dabei ist n wieder die Anzahl an insgesamt durchgeführten Messungen. Diese Datensätze trugen wir in die Grafiken der gemessenen Diagramme ein. Man kann sie in Abbildungen 2 bis 4 sehen.

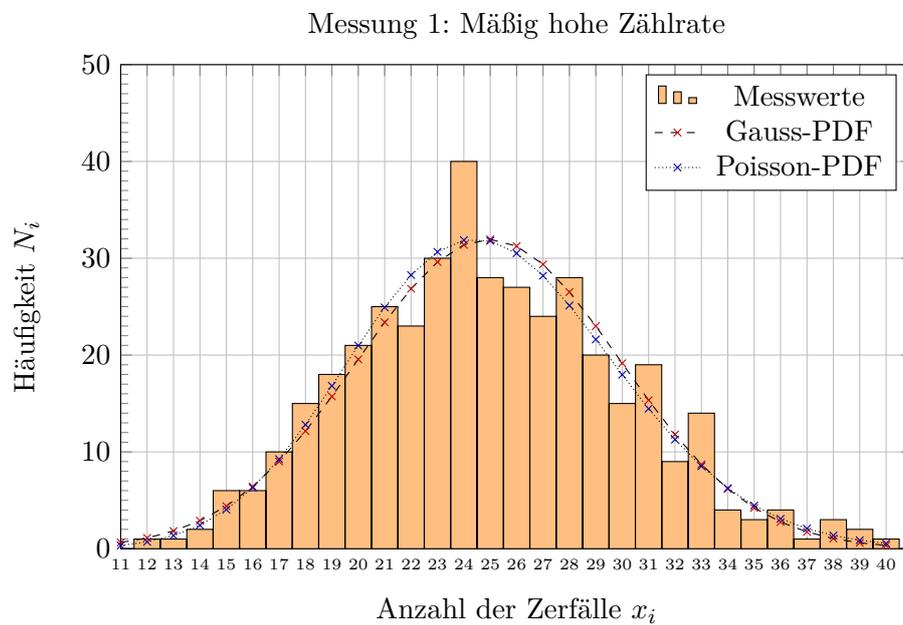


Abbildung 2: Messung 1 bei mäßig hoher Zählrate. Die gestrichelte Linie verbindet lediglich die durch Kreuze dargestellten Werte der jeweiligen Verteilungsfunktion.

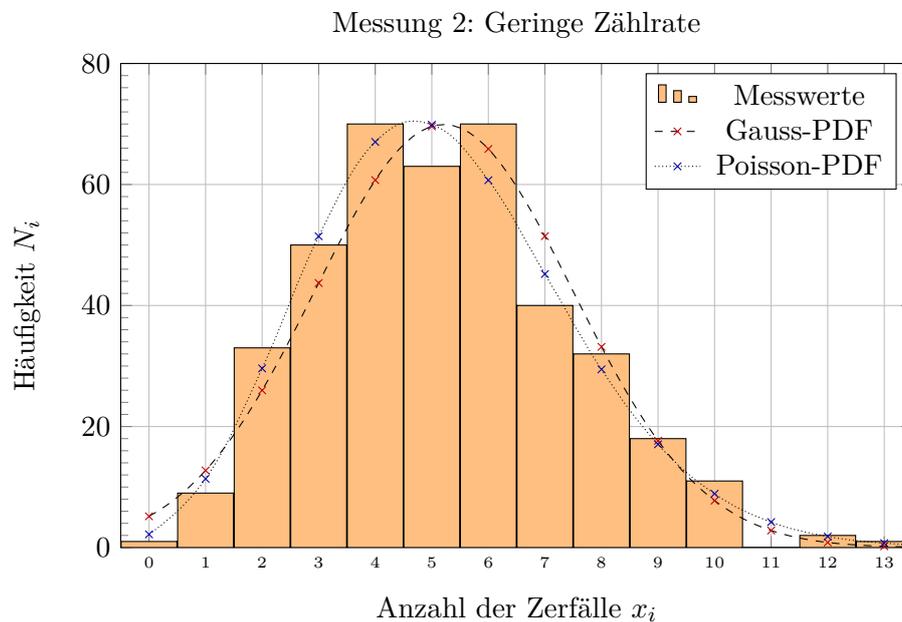


Abbildung 3: Messung 2 bei reduzierter Zählrate. Die gestrichelte Linie verbindet lediglich die durch Kreuze dargestellten Werte der jeweiligen Verteilungsfunktion.

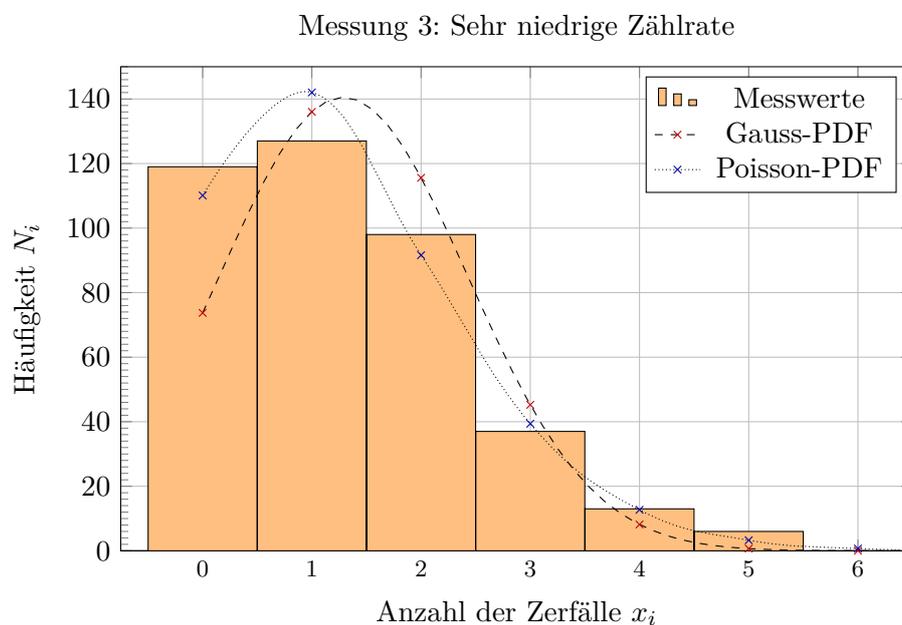


Abbildung 4: Messung 3 bei sehr niedriger Zählrate. Die gestrichelte Linie verbindet lediglich die durch Kreuze dargestellten Werte der jeweiligen Verteilungsfunktion.

6 Diskussion

6.1 Berechnung der Mittelwerte und Standardabweichungen

Aus unseren Daten konnten wir die in Tabelle 2 dargestellten Mittelwerte und Standardabweichungen berechnen.

Zählrate	\bar{x}	s_x	$s_{\bar{x}}$	$\sqrt{\bar{x}}$	\bar{x} in Hz	$s_{\bar{x}}$ in Hz
Hoch	24,948	5,111	0,256	4,995	24,948	5,111
Mäßig	5,213	2,217	0,111	2,283	5,213	2,217
Niedrig	1,290	1,168	0,058	1,136	1,290	1,168

Tabelle 2: Berechnung der Mittelwerte und Standardabweichungen der drei aufgenommenen Messreihen

Vergleicht man die Stichproben-Standardabweichung s_x mit $\sqrt{\bar{x}}$, fällt auf, dass für Messung 2 und 3 die Abweichungen voneinander kaum auffallen und dass die Abweichung für Messung 1 etwa 0,12 beträgt. Alles in allem sind die Abweichungen voneinander also eher gering. Deswegen können wir sagen, dass die Wertepaare im Rahmen der Genauigkeitsgrenzen für die Standardabweichung übereinstimmen. Somit können wir die den Verteilungen zugrunde liegenden Poissonverteilungen hier im Hinblick auf die ersten beiden zentralen Momente als verifiziert betrachten.

6.2 Berechnung der Mittelwerte und Standardabweichungen

Wir berechneten direkt Schätzer für die Schiefe und Kurtosis der Datensätze und ebenfalls die entsprechenden Werte aus den theoretischen Verteilungsfunktionen der Gauss- und Poissonverteilung. Wir erhielten folgende Ergebnisse:

Zählrate	\hat{S}	\hat{K}	$\hat{S}'_{\text{Poisson}}$	$\hat{K}'_{\text{Poisson}}$	$\frac{\hat{S}'_{\text{Poisson}}}{\hat{S}}$	$\frac{\hat{K}'_{\text{Poisson}}}{\hat{K}}$
Hoch	0,232	-0,144	0,200	0,040	0,862	-0,278
Mäßig	0,384	-0,051	0,438	0,192	1,141	-3,765
Niedrig	0,832	-0,408	0,880	0,775	1,058	-1,900

Tabelle 3: Berechnung der Schätzer für die Schiefe und Kurtosis der drei aufgenommenen Messreihen, sowie die entsprechenden Schätzwerte der theoretischen Verteilungsfunktionen. Schiefe und Kurtosis einer Normalverteilung sind stets null: $S_{\text{Gauss}} = K_{\text{Gauss}} = 0$.

Zunächst wollen wir die unterschiedlichen für die Schiefe berechneten Werte miteinander vergleichen: Es fällt auf, dass die gemessene und die theoretisch aus der Poissonverteilung berechnete (geschätzte) Schiefe mit abnehmender

Zählrate zunehmen. Nur für sehr hohe Zählraten nähert sich diese der Gaussverteilung an, welche keine Schiefe besitzt. Diesen Zusammenhang haben wir, wie in Abschnitt 2 genannt, erwartet und können nun bestätigen, dass sich die Verteilungsfunktion erst bei einer hohen Zählrate durch die Gaussverteilung annähern lässt. Dies ist bei uns höchstens noch für die mäßig hohe Zählrate erfüllt. Insbesondere bei der sehr niedrigen Zählrate ist die Häufigkeitsverteilung wegen der relativ großen Schiefe sehr asymmetrisch und kann daher nur mit der Poissonverteilung vernünftig beschrieben werden. Die aus der Messung berechneten Schiefen und die Schiefen aus der Poissonverteilung stimmen in etwa, wenn auch nicht sehr gut, überein. Diese Abweichungen sind auf die natürliche Schwankung der Verteilungsfunktion und die daraus folgenden Unsicherheiten der Schiefe, sowie des Mittelwertes zurückzuführen, die sich auf Grund der höheren Potenzen in der Bestimmungsgleichung Gleichung (5) nun stärker auswirken. Somit können wir die erwartete mögliche Beschreibung des radioaktiven Zerfalls für eine genügend hohe Zerfallszahl durch die Gaussverteilung als verifiziert ansehen.

Bei Betrachtung der unterschiedlichen berechneten Werte für die Kurtosis fällt auf, dass ihre Diskrepanz zueinander wieder mit abnehmender Zählrate zunimmt. Jedoch ist nun die Diskrepanz höher als bei der Schiefe. Der Grund dafür ist erneut die höhere Potenz in der Bestimmungsgleichung Gleichung (5). Trotzdem sehen wir aber auch hier, dass für eine ausreichend hohen Zerfallszahl die zugrundeliegende Verteilungsfunktion durch eine Gaussfunktion angenähert werden kann.

Die Abweichung beider Schätzer (einmal der erwartungstreue \hat{S} , bzw. \hat{K} , und der alternative \hat{S}' , bzw. \hat{K}') lässt sich auch dadurch erklären, dass die alternativen Schätzer, die wiederum aus erwartungstreuen Schätzern $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}$ konstruiert wurden, selber nicht erwartungstreu sein müssen. Obwohl die Zusammenhänge

$$S_{\text{Poisson}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \quad \text{und} \quad K_{\text{Poisson}} = \frac{1}{\mu} \quad (30)$$

für die Poissonverteilung gültig sind, muss beachtet werden, dass die Werte sich auf die wahren Werte, i. e. nicht auf Schätzer, beziehen. Im allgemeinen lassen sich aus erwartungstreuen Schätzern unter einer nicht-linearen Transformation (welche hier vorliegt, siehe Gleichung (14)) keine anderen Schätzer konstruieren, die dann ebenfalls erwartungstreu sind: Stattdessen liegt dann eine sog. *Bias* vor, sodass der Erwartungswert des aus Schätzern konstruierter Schätzers nicht mit dem zu schätzenden Wert übereinstimmt¹. Die meisten derart konstruierten Schätzer sind allerdings asymptotisch erwartungstreu, d. h. die erwartete Abweichung vom zu schätzenden Wert nimmt mit der Stichprobengröße n ab, was mit den von uns berechneten Werten plausibel erscheint.

¹Diese Phänomen führt auch zur Bessel-Korrektur beim Schätzen einer Varianz (siehe Gleichung (7)).

Da wir die zugrundeliegenden wahren Werte μ nicht kennen und ausschließlich – im Rahmen der Messung – geschätzt werden können, fällt es allgemein schwer, zu beurteilen, wie gut bestimmte Schätzer gegenüber anderen sind. Es fällt allerdings auf, dass die relative Diskrepanz beider Schätzer zueinander mit zunehmender Zahl an Ereignissen abnimmt². Dies lässt die Vermutung zu, dass der Einfluss der konkreten Wahl des Schätzers für eine zunehmende Stichprobengröße abnimmt, was mit der These der asymptotischen Erwartungstreue, die im vorigen Abschnitt kurz diskutiert wurde, übereinstimmt.

6.3 Graphische Betrachtung und Vergleich mit theoretischen Verteilungsfunktionen

Zuerst betrachten wir die verschiedenen Verteilungsfunktionen bei mäßig hoher Zählrate aus Abb. 2. Hier fällt auf, dass die theoretischen Verteilungsfunktionen in ihrem Verlauf beinahe übereinstimmen. Auf Grund der Vielzahl an Ereignissen kann die Poisson- sehr gut als Gaussverteilung genähert werden. Manchmal weichen die theoretisch berechneten Werte allerdings etwas von den tatsächlich gemessenen Werten ab. Dies ist wieder auf die natürlichen Schwankungen der dargestellten Häufigkeit sowie die begrenzte Zahl an Stichproben ($n = 400$) zurückzuführen. Da der Erwartungswert μ , welcher durch \bar{x} geschätzt wird, mit in die Berechnung der Verteilungsfunktion eingeht, bewirkt auch dessen Unsicherheit eine Fluktuation der Kurven.

Auch bei der Messung bei geringer Zählrate nähern die beiden theoretischen Verteilungen die zugrunde liegende Verteilungsfunktion relativ gut an. Die Abweichung der Gaussverteilung von den Messwerten ist hier deutlich geringer als bei der Messung des Nulleffekts, das heißt, dass die Verteilung bei sehr niedriger Zählrate nur noch durch die Poissonverteilung genähert werden kann. Das ist wieder auf die zu niedrige Zählrate zurückzuführen.

Insgesamt können wir daraus schließen, dass die Poissonverteilung durchweg eine bessere Modellierung der gemessenen Verteilungsfunktion darstellt als die Gaussverteilung. Die theoretischen Verteilung beschreiben die gemessenen Werte in Anbetracht der Tatsache, dass die gemessenen Zählraten selbst statistische Größen sind und daher streuen müssen, relativ gut. Man könnte bei der mäßig hohen Zählrate allerdings eine bessere Übereinstimmung erwarten. Dies könnte man mit einer größeren Unsicherheit des Mittelwertes \bar{x} ausgleichen. Wenn man diesen vergrößert, resultiert daraus zum einen eine größere Unsicherheit in der x -Position und zum anderen werden dann die theoretischen Verteilungsfunktionen flacher und breiter.

²Dies ist aus Tabelle 3 abzulesen.

A Anhang

A.1 Messwerte

j	x_j	N_j
1	11	0
2	12	1
3	13	1
4	14	2
5	15	6
6	16	6
7	17	10
8	18	15
9	19	18
10	20	21
11	21	25
12	22	23
13	23	30
14	24	40
15	25	28
16	26	27
17	27	24
18	28	28
19	29	20
20	30	15
21	31	19
22	32	9
23	33	14
24	34	4
25	35	3
26	36	4
27	37	1
28	38	3
29	39	2
30	40	1
31	41	0

Tabelle 4: Messung bei mäßig hoher Zählrate

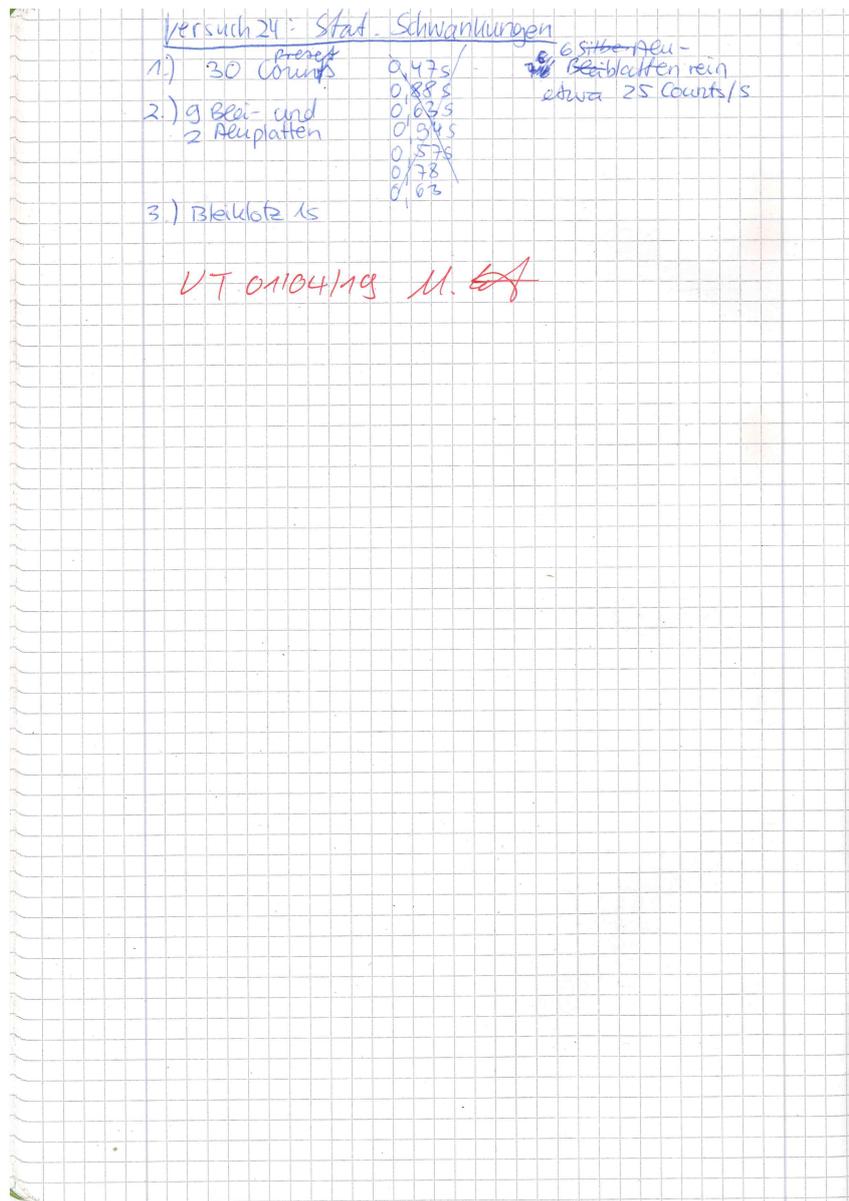
j	x_j	N_j
1	0	1
2	1	9
3	2	33
4	3	50
5	4	70
6	5	63
7	6	70
8	7	40
9	8	32
10	9	18
11	10	11
12	11	0
13	12	2
14	13	1
15	14	0

Tabelle 5: Messung bei geringer Zählrate

j	x_j	N_j
1	0	119
2	1	127
3	2	98
4	3	37
5	4	13
6	5	6
7	6	0

Tabelle 6: Messung bei sehr niedriger Zählrate

A.2 Laborheft



Literatur

- [1] O.V.: *Versuchsanleitungen zum Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 2*. 2019
- [2] VIRTUAL INSTITUTE OF APPLIED SCIENCE: *Kurtosis*. http://www.statistics4u.info/fundstat_germ/cc_kurtosis.html, 08. Oktober 2012. – [Online; aufgerufen 1. April 2019]
- [3] VIRTUAL INSTITUTE OF APPLIED SCIENCE: *Schiefe*. http://www.statistics4u.info/fundstat_germ/cc_skewness.html, 08. Oktober 2012. – [Online; aufgerufen 1. April 2019]