

Universität Freiburg
Physiklabor für Anfänger
Ferienpraktikum im Sommersemester 2023


Versuch 19

gekoppelte Pendel



7. November 2024

Datum der Durchführung: 28. September 2023

Tutor 

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuches	3
2	Versuchsdurchführung	3
3	Auswertung und Fehleranalyse	4
3.1	Auslenkungswinkel in der Ruhelage	4
3.2	Fundamentalschwingungen	7
3.2.1	Gleichsinnige Schwingung	7
3.2.2	Gegensinnige Schwingung	8
3.3	Kopplungsschwingung	9
4	Diskussion der Ergebnisse	11
4.1	Zusammenfassung der Ergebnisse	11
4.2	Verbesserte Methoden	11
5	Anhang	13
5.1	Diagramm zur Bestimmung der Federkonstante D_F	13
5.2	Diagramm zur Bestimmung der Gesamtmasse m_{ges}	13
5.3	Rohdaten mit Vortestat	14
	Literatur	15

1 Ziel des Versuches

Ziel des Versuches ist es, die Kreisfrequenzen eines gekoppelten Pendels für die Kopplungs- und Fundamentalschwingungen zu bestimmen und mit erwarteten Abhängigkeiten zu vergleichen.

2 Versuchsdurchführung

In Abb. 1 ist der Aufbau des Versuches skizziert. Zu sehen sind zwei identische physikalische Pendel der Länge l mit den Massen m . Die beiden Massen sind jeweils an einer Stange befestigt und ihre Position kann genau eingestellt werden. Zu Beginn des Versuches werden die Stangen so positioniert, dass beide Pendel mit gleicher Periodendauer schwingen. Dann werden die beiden Pendel über eine Feder, mit der Federkonstanten D_F , gekoppelt. Die Feder ist mit einer Klemmschraube an der Stange befestigt, kann jedoch auf unterschiedliche Kopplungslängen ϱ eingestellt werden. Der Winkel zwischen der Ruhelage in gekoppeltem Zustand und der Lotgerade wird für das linke Pendel φ_{01} und das rechte Pendel φ_{02} genannt. Hinter dem Pendel, unterhalb der Massen, ist ein Maßband fest angebracht. Mit dieser Messskala kann die Position x_1 bzw. x_2 der beiden Pendel bestimmt werden.

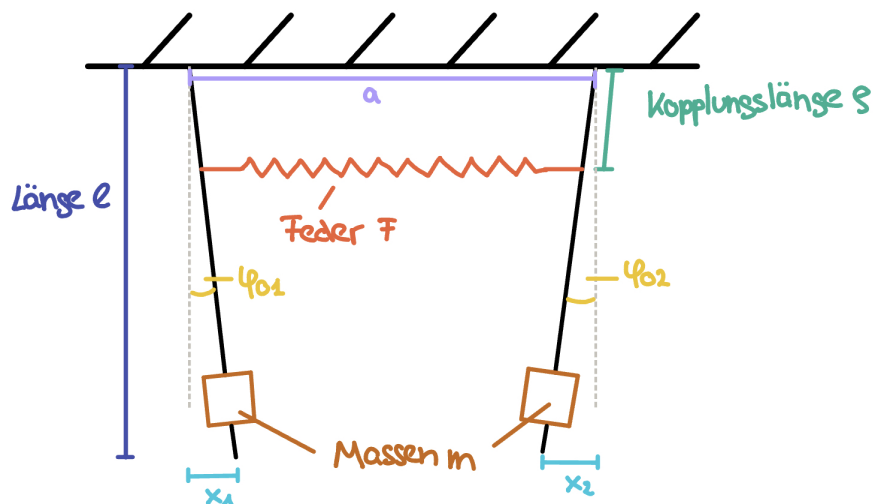


Abbildung 1: Zwei physikalische Pendel die mit einer Feder gekoppelt sind

Die Pendel werden für verschiedene Kopplungslängen ϱ , mit auf einer Stange befestigten Arretierungshebeln, ausgelenkt und losgelassen. Zunächst werden beide Pendel gleich weit nach rechts ausgelenkt, um eine sogenannte gleichsinnige Schwingung zu erzielen. Dann werden beide Pendel nach außen ausgelenkt, was eine gegensinnige Schwingung bewirkt. Zuletzt wird das rechte Pendel ausgelenkt, das Linke bleibt in seiner Ruhelage.

Dies erzeugt eine Kopplungsschwingung. Mit einer Stoppuhr werden die Schwingungsdauern gemessen.

3 Auswertung und Fehleranalyse

3.1 Auslenkungswinkel in der Ruhelage

Zunächst sollen die Auslenkungswinkel φ_{01} und φ_{02} in Abhängigkeit von der Kopplungslänge ϱ ermittelt werden. Um den Winkel φ_{01} zu bestimmen wird die Position x_1 des unteren Ende des Stabes, bei gegebener Kopplung, an der Messskala abgelesen. Ist die Länge des Stabes bekannt, kann anschließend der Winkel mit der Formel

$$\varphi = \frac{x}{l}$$

ausgerechnet werden. Für φ_{02} kann man analog vorgehen. Die Länge l des Pendels wird mit einem Maßband gemessen:

$$l = (97,50 \pm 0,12)\text{cm}$$

Die Unsicherheit folgt dabei aus der Ableseungenauigkeit und wird mittels Dreiecksverteilung ($a = 0,3$)cm berechnet. Abbildung 2 stellt die Werte für die Winkel die aus der Messung abgeleitet werden, grafisch dar. Wie erwartet, sind die Ruheauslenkungen für Pendel 1 und Pendel 2 nahezu identisch. Zusätzlich zu den Messpunkten sind Fehlerbalken für die Kopplungslänge ϱ und den Winkel φ eingezeichnet. Die Standardunsicherheit $\Delta\varrho = 0,6$ cm ist bedingt durch die Ungenauigkeit in der Einstellung der Kopplungslänge mithilfe von Kerben, die in der Stange in 5cm Schritten angebracht sind. Die Standardunsicherheit $\Delta\varphi$ wird mittels der Gaußschen Fehlerfortpflanzung für jede Position x wie folgt berechnet:

$$\Delta\varphi = \sqrt{\left(\frac{1}{l} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{x}{l^2} \Delta l\right)^2}$$

Wobei $\Delta x = 0,08$ cm den Fehler in der Bestimmung der Position x darstellt und mit Dreiecksverteilung ($a = 0,2$ cm) ausgerechnet wird. Darüber hinaus können diese Ergebnisse mit errechneten Winkeln φ^* verglichen werden. Die errechneten Ergebnisse sind ebenfalls in Abb. 2 eingezeichnet. Für geringe Kopplungslängen ϱ deckt sich der errechnete Verlauf mit den experimentell bestimmten Werten. Mit zunehmender Kopplungslänge nimmt jedoch auch die Abweichung zu.

Um die errechneten Werte zu bestimmen, wird ausgenutzt, dass die Drehmomente die auf das Pendel wirken sich in der Ruhelage ausgleichen. Es gilt hierbei $M_g = M_F$, wobei M_g das von der Schwerkraft erzeugte Drehmoment ist und M_F das Drehmoment ist, welches von der Feder erzeugt wird. Dieser Ansatz liefert:

$$m_{ges}gl_r\varphi^* = \varrho D_F(a - z - 2\varrho\varphi^*)$$

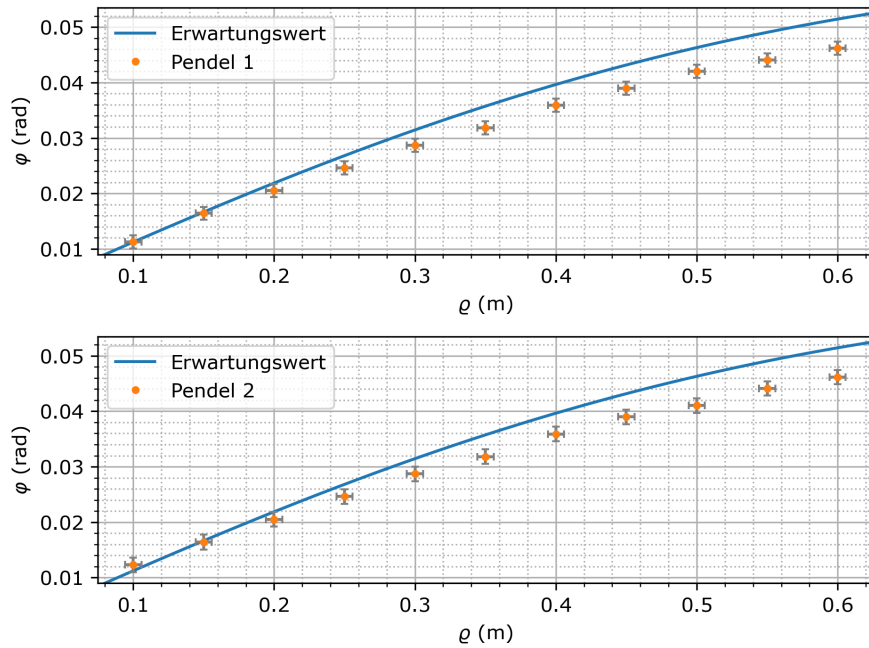


Abbildung 2: Auslenkungswinkel φ für Pendel 1 und Pendel 2, mit Fehlerbalken, in Abhängigkeit von der Kopplungslänge ϱ . Vergleich mit erwartetem Verlauf (blaue Linie).

Umgestellt nach φ^* folgt:

$$\varphi^* = \frac{\varrho D_F (a - z)}{m_{ges} g l_r + 2\varrho^2 D_F}$$

Hierbei ist m_{ges} die Gesamtmasse, g die Erdbeschleunigung, l_r die reduzierte Pendellänge, D_F die Federkonstante der Feder, a der Abstand der Pendel (siehe Abb. 1) und z die Länge der Feder im entspannten Zustand. Wie diese benötigten Größen bestimmt werden, wird im Folgenden dargestellt.

- **Erdbeschleunigung g** : Für die Erdbeschleunigung g wird ein mit der WELMEC-Normalschwereformel¹ errechneter Wert für Freiburg im Breisgau (Höhe 287m, Breite 48°) herangezogen:

$$g = 9,808 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Dieser Wert wird als exakt angenommen.

- **Länge a** : Der Abstand der beiden Federn ergibt sich aus den gemessenen Ruhepositionen der Pendel in ungekoppeltem Zustand. Die Unsicherheit für a folgt aus der Unsicherheit in der Bestimmung der jeweiligen Position mit der angebrachten Messskala. Diese wird mit der Dreiecksverteilung ($a = 0,2\text{cm}$) quantifiziert und

¹[Bun]

mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung für die gesuchte Standardunsicherheit Δa ausgerechnet:

$$a = (46,90 \pm 0,11)\text{cm}$$

- **Federlänge z** : Die Länge der Feder in entspanntem Zustand wird mit einem Maßband gemessen. Die Unsicherheit folgt aus der Ablesungenauigkeit und wird mit der Dreiecksverteilung ($a = 0,2\text{cm}$) genauer bestimmt:

$$z = (21,50 \pm 0,08)\text{cm}$$

- **Reduzierte Pendellänge l_r** : Die reduzierte Pendellänge l_r eines physikalischen Pendels, entspricht der Länge eines mathematischen Pendels, welches die selbe Periodendauer T vorweist. Die Länge l_r kann somit wie folgt bestimmt werden:

$$l_r = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$$

Hierzu wird die Dauer T_5 für fünf Perioden gemessen und anschließend die Periodendauer T für eine Schwingung bestimmt. Dies wird mehrmals wiederholt und liefert das Ergebnis

$$l_r = (83,8 \pm 0,5)\text{cm}.$$

Der Bestwert entspricht dabei dem Mittelwert der Messwerte und die Standardunsicherheit der Standardabweichung des Mittelwerts.

- **Federkonstante D_F** : Mit einem Federkraftmesser wird die Kraft F gemessen, die benötigt wird um die Feder um die Strecke s auszulenken. Für fünf verschiedene Auslenkungen wird die Messung durchgeführt. Anschließend wird die Kraft F in Abhängigkeit von s in einem Diagramm (siehe Abb. 7 im Anhang) dargestellt. Es gilt dabei $D_F = \frac{F}{s}$. Mittels linearer Regression wird eine Ausgleichsgerade ermittelt und die Steigung bestimmt. Für die Federkonstante folgt damit:

$$D_F = (2,20 \pm 0,02) \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

- **Gesamtmasse m_{ges}** : Die Gesamtmasse m_{ges} wird für das Pendel rechnerisch bestimmt. Hierzu wird wieder der Ansatz $M_g = M_F$ für das Pendel in Ruhelage verwendet. Aufgelöst nach der Gesamtmasse m_{ges} führt dies zu:

$$m_{ges} = \frac{\varrho D_F (a - z - 2\varrho\varphi)}{g l_r \varphi}$$

wobei $\varphi = \frac{x}{l}$, die experimentell bestimmten Auslenkungswinkel darstellen. Die einzelnen Werte der Massen werden über die Auslenkung ϱ aufgetragen und dann mittels eines linearen Fits genähert. Als Masse wird dann der y-Achsenabschnitt mit dazugehöriger Ungenauigkeit gewählt. Dies ist in Abb. 8 im Anhang zu sehen und ergibt die Masse:

$$m_{ges} = (600 \pm 10)\text{g}$$

3.2 Fundamentalschwingungen

3.2.1 Gleichsinnige Schwingung

Ziel soll es nun sein, die Kreisfrequenz ω_{gl} der gleichsinnigen Schwingung zu bestimmen. Hierzu wird die Formel

$$\omega_{gl} = \frac{2\pi}{T_{gl}}$$

verwendet. Es muss somit die Periodendauer T_{gl} gemessen werden. Dazu wird mit der Stoppuhr die Zeit für fünf Schwingungsperioden gemessen und anschließend die Periodendauer T_{gl} ausgerechnet. Dies wird für verschiedene Kopplungslängen ϱ wiederholt. Die Ergebnisse sind in Abb. 3 dargestellt. Die Messwerte sind im Rahmen der Unsicherheit

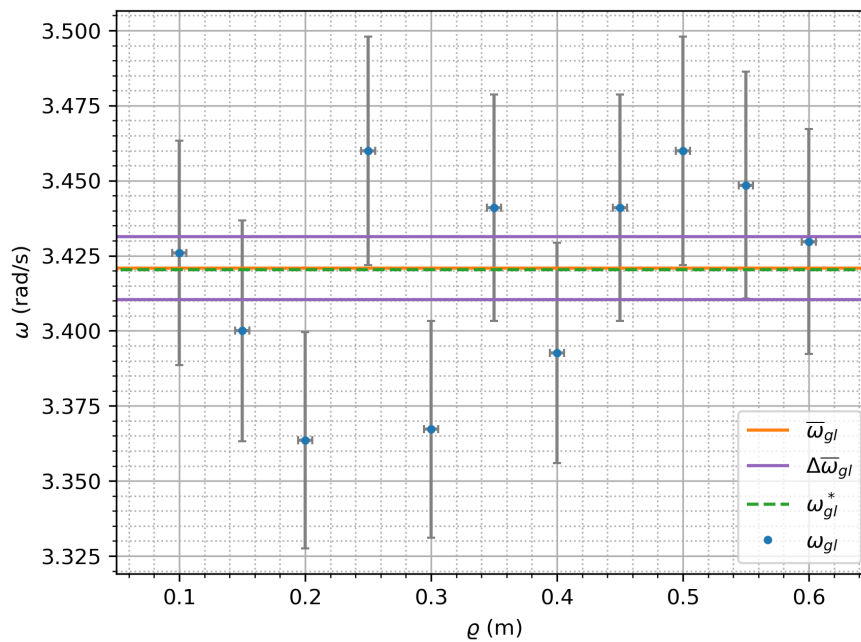


Abbildung 3: Darstellung von gemessener Kreisfrequenz ω_{gl} mit Fehlerbalken, der Mittelwert dieser Werte $\bar{\omega}_{gl}$ und die dazugehörige Standardunsicherheit $\Delta\bar{\omega}_{gl}$ sowie der erwartete Wert ω_{gl}^* .

näherungsweise konstant. Das lässt darauf schließen, dass die Kreisfrequenz ω_{gl} nicht von der Kopplungslänge ϱ abhängt. Die Unsicherheit für die Kreisfrequenz ω_{gl} folgt aus der Unsicherheit der Messung der Periodendauer T_{gl} . Diese wiederum begründet sich hauptsächlich in der menschlichen Präzision, mit der man die Stoppuhr bedienen kann. Die Standardunsicherheit für eine Messung von fünf Perioden wird mittels der Normalverteilung und $u = 0,1s$ genauer quantifiziert. Es ergibt sich

$$\Delta T_5 = 0,1s.$$

Für eine Periodendauer ergibt sich somit:

$$\Delta T = 0,02\text{s}$$

Diese Unsicherheit für eine Periodendauer gilt für alle folgenden Zeitmessung in dieser Analyse und wird nicht mehr explizit erwähnt. Aus dieser Unsicherheit lässt sich mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung die Unsicherheit $\Delta\omega_{gl}$ wie folgt berechnen:

$$\Delta\omega_{gl} = \frac{2\pi}{T_{gl}^2} \Delta T_{gl}$$

Die Standardunsicherheit für die Kopplungslänge ϱ bleibt weiterhin wie in Abschnitt 3.1 beschrieben bei $\Delta\varrho = 0,6\text{cm}$.

Verglichen werden die experimentellen Werte mit errechneten Werten ω_{gl}^* aus folgendem bekanntem Zusammenhang:

$$\omega_{gl}^* = \sqrt{\frac{g}{l_r}}$$

Für die Erdbeschleunigung g und die reduzierte Pendellänge l_r werden die Werte aus Abschnitt 3.1 verwendet. Man erkennt an der Formel, dass ω_{gl} nicht von der Kopplungslänge ϱ abhängt, was ebenfalls aus den gemessenen Werten ersichtlich wird. Der berechnete Wert ω_{gl}^* und der Durchschnitt der gemessenen Werte $\bar{\omega}_{gl}$ sind nahezu identisch wie in Abb. 3 ersichtlich ist. Für die experimentell bestimmten Werte kann nun ein Ergebnis angegeben werden:

$$\omega_{gl} = (3,42 \pm 0,01) \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

3.2.2 Gegensinnige Schwingung

Um die Kreisfrequenz ω_{geg} zu bestimmen wird die Analyse analog zu der Analyse der Kreisfrequenz ω_{gl} durchgeführt. In Abb. 4 sind die experimentell bestimmten Werte dargestellt. Mit zunehmender Kopplungslänge ϱ nimmt auch die Kreisfrequenz ω_{geg} zu. Zunächst sehr langsam, dann in größeren Schritten. Dieser Anstieg ist zu erwarten denn mit größerer Kopplungslänge ϱ nimmt das rücktreibende Drehmoment, bewirkt durch die Feder, zu und resultiert in einer erhöhten Kreisfrequenz. Ebenfalls in Abb. 4 abgebildet, ist der Verlauf von errechneten Werten ω_{geg}^* . Zur Berechnung wird folgende Formel herangezogen:

$$\omega_{geg}^{*2} = \frac{2D_F\varrho^2}{m_{ges}l_{red}^2} + \omega_{gl}^2$$

Für die Federkonstante D_F , die Gesamtmasse m_{ges} und die reduzierte Pendellänge l_r werden die Werte aus Abschnitt 3.1 herangezogen. Für die Kreisfrequenz ω_{gl} wird das Ergebnis aus Abschnitt 3.2.1 verwendet. Die experimentellen Werte ω_{geg} und der Verlauf der berechneten Werte ω_{geg}^* unterscheiden sich kaum. Die Werte ω_{geg} sind somit mit den erwarteten Abhängigkeiten verträglich.

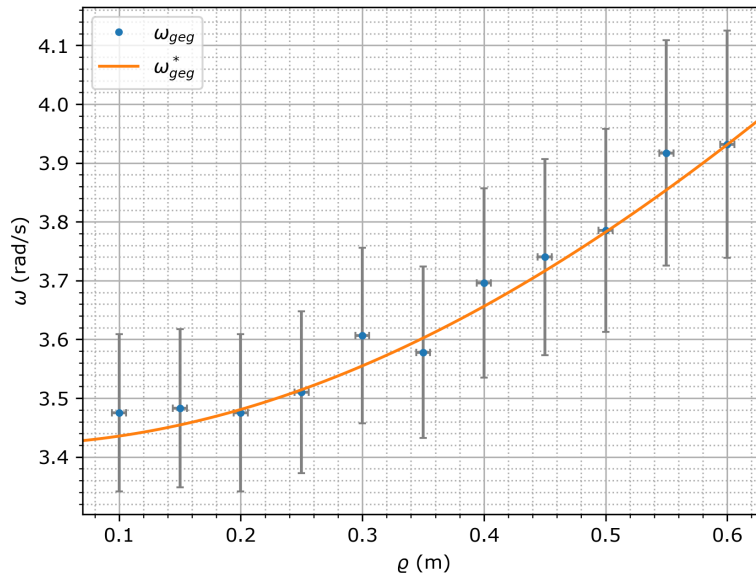


Abbildung 4: Darstellung von gemessener Kreisfrequenz ω_{geg} mit Fehlerbalken sowie der Verlauf der berechneten Werte ω_{geg}^* .

3.3 Kopplungsschwingung

Bei der Kopplungsschwingung kann man zwei verschiedene Periodendauern definieren. T_+ ist die Periodendauer mit der die beiden Pendel schwingen. T_- beschreibt hingegen die Periode, in der sich ein Pendel zweimal von Schwingung mit maximaler Amplitude bis hin zum Stillstand und dann wieder zu Schwingung mit maximaler Amplitude bewegt. Mit folgenden beiden Formeln kann, analog zu vorherigen Analysen, aus den Messungen der Periodendauern auf die Kreisfrequenzen ω_+ und ω_- geschlossen werden.

$$\omega_+ = \frac{2\pi}{T_+} \quad \omega_- = \frac{2\pi}{T_-}$$

Die Periodendauer T_+ wird über eine Zeitmessung von fünf Perioden bestimmt. Da die Periodendauer T_- deutlich länger ist, wird nur eine halbe Periodendauer gemessen und der Wert für eine Periodendauer ausgerechnet. Die Standardunsicherheit für eine Periode ändert sich dabei auf

$$\Delta T_- = 0,2\text{s}.$$

Die gemessenen Werte ω_+ und der Verlauf der erwarteten Werte ω_+^* sind in Abb. 5 dargestellt. Die errechneten Werte werden mit der Formel

$$\omega_+^* = \frac{\omega_{geg}^* + \omega_{gl}^*}{2}$$

berechnet. Für ω_{geg}^* und ω_{gl}^* werden die errechneten Werte aus den vorherigen beiden Abschnitten verwendet. Beide Verläufe steigen mit zunehmender Kopplungslänge ϱ an,

was auf die größer werdenden Drehmomente der Feder zurückgeführt werden kann. Auffällig ist jedoch, dass die gemessenen Werte tendenziell tiefer liegen als die errechneten Werte. Dass, wie beschrieben, die Kreisfrequenz ω_+ mit steigender Kopplungslänge ϱ ansteigt, ist in Anbetracht der Formel für ω_+^* nicht überraschend. Die Kreisfrequenz ω_{gl}^* ist konstant. Jedoch steigt die Kreisfrequenz ω_{geg}^* mit größerem ϱ , folglich auch ω_+ . Die experimentell bestimmten Werte für ω_- sind in Abb. 6 dargestellt. Die Unsicherheit für die Kreisfrequenz ω_- fällt in diesem Fall relativ klein aus, da auch die Unsicherheit ΔT_- relativ klein ausfällt im Vergleich zu den langen Periodendauern T_- . Ebenfalls eingezeichnet ist der erwartete Verlauf ω_-^* . Errechnet wird dieser Verlauf mit der Formel

$$\omega_-^* = \frac{\omega_{geg}^* - \omega_{gl}^*}{2}.$$

Die Größen ω_{geg}^* und ω_{gl}^* beziehen sich wiederum auf die errechneten Werten aus den vorherigen beiden Abschnitten. Die Verläufe sind nahezu identisch. Auch in diesem Fall steigt die Kreisfrequenz ω_- mit zunehmender Kopplungslänge ϱ . Mit Blick auf die Formel für ω_-^* , kann dieser Anstieg wiederum mit der Kreisfrequenz ω_{geg} und dessen Abhängigkeit von ϱ erklärt werden. Die experimentell bestimmten Werte sind damit verträglich mit den erwarteten Abhängigkeiten.

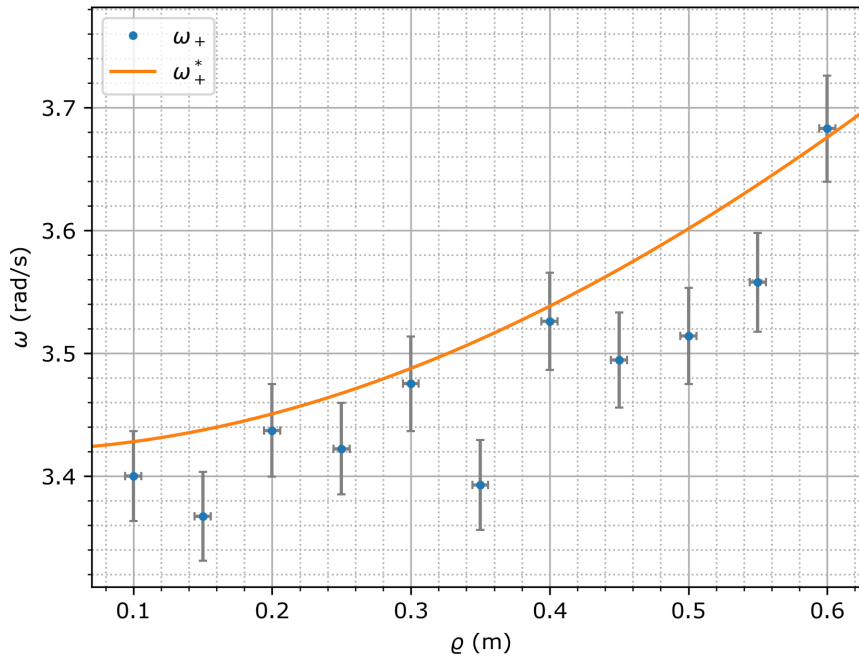


Abbildung 5: Darstellung von gemessener Kreisfrequenz ω_+ mit Fehlerbalken sowie der Verlauf der berechneten Werte ω_+^* .

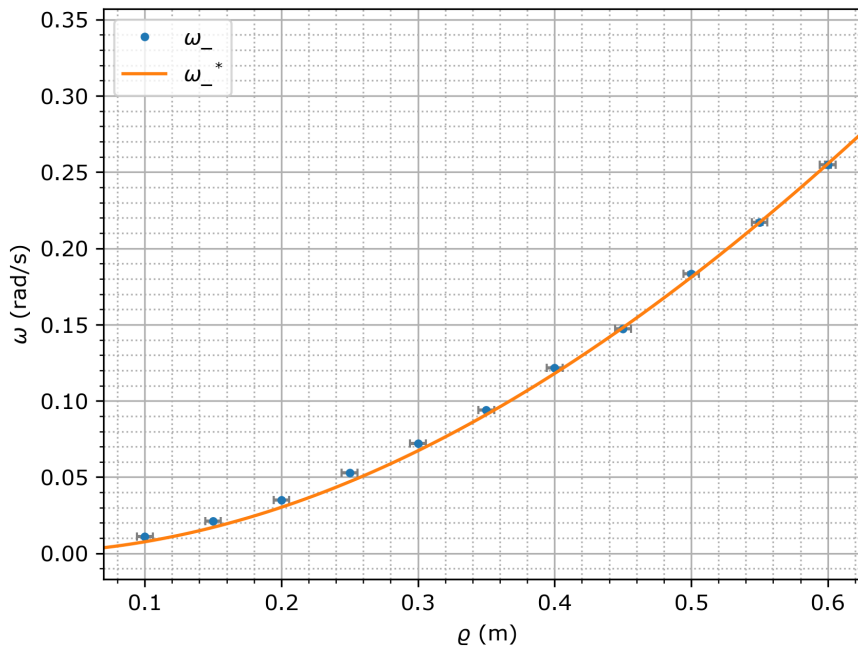


Abbildung 6: Darstellung von gemessener Kreisfrequenz ω_- mit Fehlerbalken sowie der Verlauf der berechneten Werte ω_-^* .

4 Diskussion der Ergebnisse

4.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Zunächst wird der Auslenkungswinkel in Ruhelage untersucht. Wie erwartet steigt der Auslenkungswinkel mit zunehmender Kopplungslänge ϱ an.

Die Messung der Kreisfrequenz der gleichsinnigen Schwingung hat folgendes Ergebnis geliefert:

$$\omega_{gl} = (3,42 \pm 0,01) \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Die Kreisfrequenz hängt in diesem Fall nicht von der Kopplungslänge ϱ ab. Anders sieht es dabei für die Kreisfrequenz ω_{geg} aus. Mit zunehmender Kopplungslänge steigt die Frequenz. Die gemessenen und berechneten Werte stimmen hierbei überein. Bei der Kopplungsschwingung wird mit der grafischen Darstellung ebenfalls ersichtlich, dass die Kreisfrequenzen ω_+ und ω_- mit größer werdender Kopplungslänge steigen. Die Messwerte konnten jeweils mit errechneten Verläufen bestätigt werden.

4.2 Verbesserte Methoden

Bei diesem Versuch gibt es zwei Bereiche an denen Verbesserungen vorgenommen werden können. Zum einen können die Unsicherheiten in der experimentellen Bestimmung der

Kreisfrequenzen ω reduziert werden. Dies wird erzielt in dem die Unsicherheit für die Messung der Periodendauer T verkleinert wird. Eine Möglichkeit wäre, anstatt die Zeit für fünf Perioden zu messen, die Dauer für beispielsweise 20 Perioden zu messen. Bei dieser Messung würde man auf eine Unsicherheit

$$\Delta T = 0,005\text{s}$$

kommen. Dies reduziert die Standardunsicherheit auf ein Viertel. Jedoch geht diese Methode mit einem erhöhten Zeitaufwand einher. Eine weitere Möglichkeit die Unsicherheit der Zeitmessung zu reduzieren, wäre die Zeitmessung mit einer Lichtschranke zu vollziehen anstatt von Hand. Dies würde den Fehler der menschlichen Präzision beim Bedienen der Stoppuhr eliminieren. Limitierend bei der Messung mit der Lichtschranke ist dann vor allem die Genauigkeit der Anzeige. Eine Anzeige auf Zwei Nachkommastellen genau, würde jedoch schon ausreichen eine Standardunsicherheit

$$\Delta T = 0,003\text{s}$$

bei einer Messung von nur einer Periodendauer zu erzielen. Der Wert wird hierbei mit der Rechtecksverteilung ($a = 0,005\text{s}$) berechnet.

Der zweite Bereich in dem Verbesserungen vorgenommen werden können, beinhaltet die Messung der Größen die verwendet werden um weitere Größen zu berechnen. Folgende Größen sind betroffen:

- Die Gesamtmasse m_{ges} wird rechnerisch ermittelt. Ein genaueres Ergebnis könnte erzielt werden, indem das Gewicht der Pendel mit einer Waage bestimmt wird. Hierzu müsste jedoch die Pendelstange aus der Aufhängung ausgebaut werden, was einen erheblichen Aufwand darstellt.
- Die Pendellänge l wird mit einem Maßband gemessen. Aufgrund der Aufhängung an dem die Pendel schwingen, ist es jedoch nicht möglich bis ans obere Ende der Stange zu messen. Um dies zu ermöglichen müsste jedoch wiederum die Stange aus dem Aufbau entfernt und gemessen werden. Ein genauerer Wert von l würde sich auf die Berechnung der Gesamtmasse sowie auf die experimentell bestimmten Winkel $\varphi = \frac{x}{l}$ auswirken.
- Die Länge z der Feder und der Abstand a der Pendel könnten für ein genaueres Ergebnis mit einem Messschieber gemessen werden. Dies würde sich ebenfalls auf die rechnerische Bestimmung der Gesamtmasse auswirken sowie auf die Berechnung des erwarteten Auslenkungswinkel φ^* .

5 Anhang

5.1 Diagramm zur Bestimmung der Federkonstante D_F

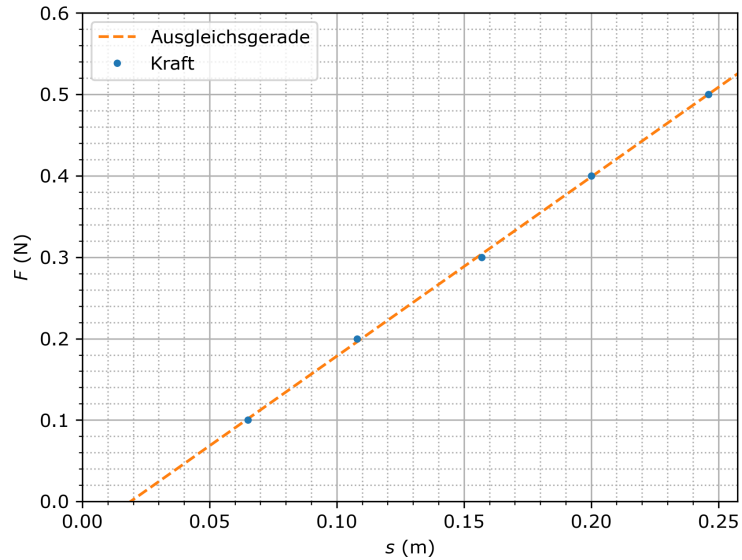


Abbildung 7: Die Kraft F in Abhängigkeit von der Auslenkung s . Die Steigung der Ausgleichsgerade entspricht der Federkonstante D_F .

5.2 Diagramm zur Bestimmung der Gesamtmasse m_{ges}

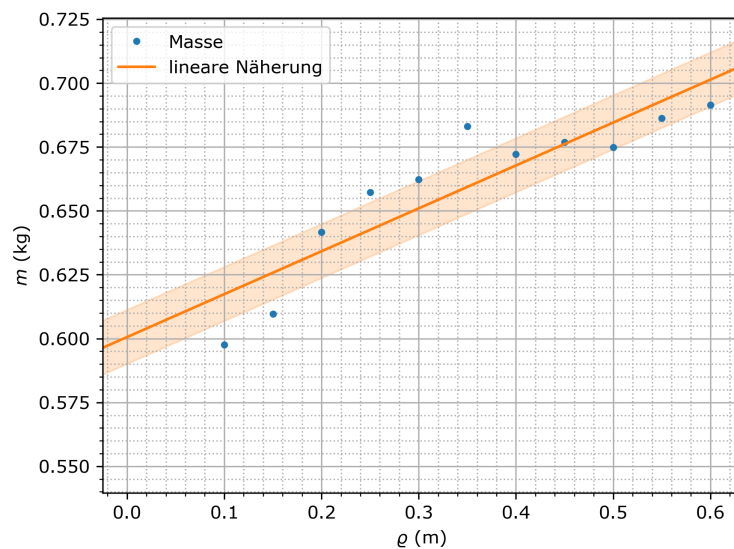


Abbildung 8: Die Masse in Abhängigkeit von Rho, mit linearem Fit

5.3 Rohdaten mit Vortestat

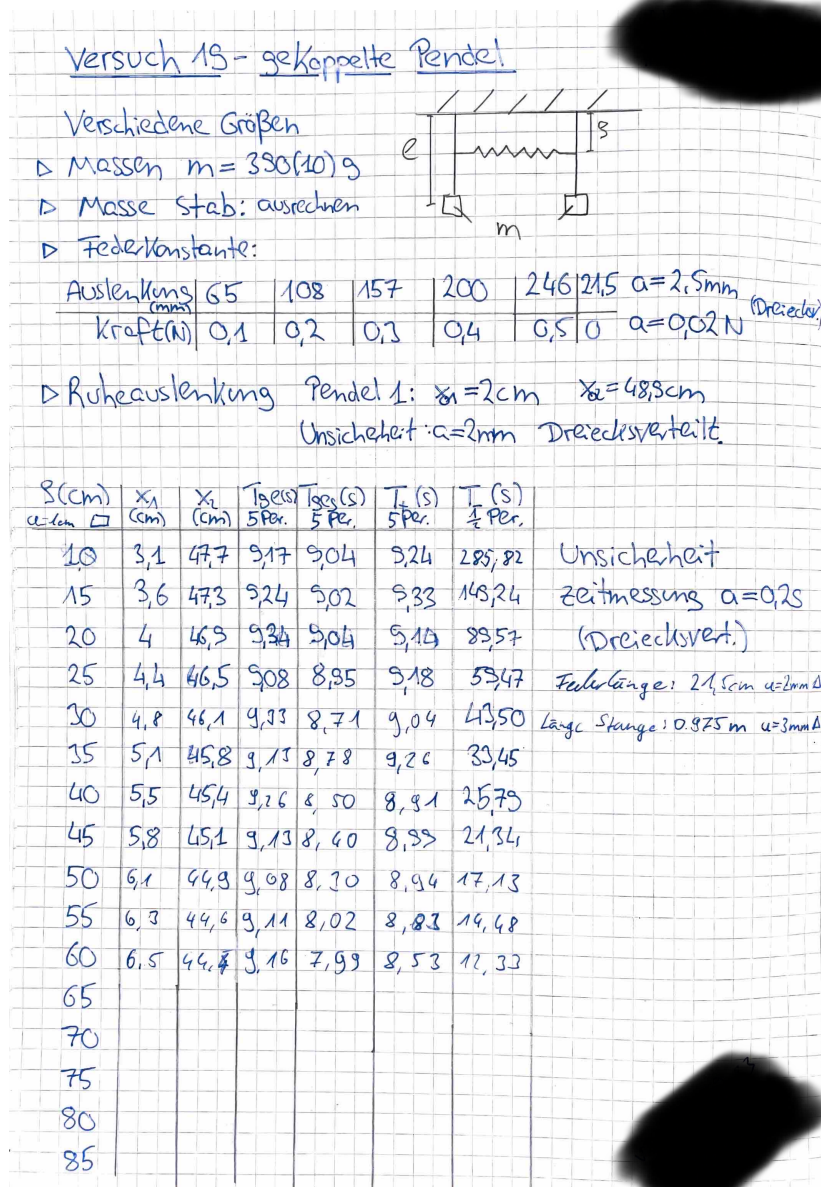


Abbildung 9: Rohdaten

Literatur

- [Bun] Physikalisch-*technische Bundesanstalt*. URL: https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung_1/1.1_masse/1.15/gravzonen.pdf
(besucht am 27.09.2023).