

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
PHYSIKLABOR FÜR ANFÄNGER*INNEN, TEIL 1
SOMMERSEMESTER 2021

VERSUCH 19 AM 23.09.2021

Gekoppelte Pendel

26.09.2021

Assistent:

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuchs	2
2	Aufbau und Durchführung	2
3	Auswertung und Fehleranalyse	4
3.1	Untersuchung der Auslenkungswinkel	4
3.2	Untersuchung der beiden Fundamentalschwingungen	5
3.2.1	Gleichsinnige Schwingung	5
3.2.2	Gegensinnige Schwingung	7
3.3	Untersuchung der Kopplungsschwingung	10
4	Diskussion der Ergebnisse	13
4.1	Zusammenstellung der Ergebnisse	13
4.2	Fehlerdiskussion	13
4.3	Verbesserte Messmethoden	15
5	Literatur	16
6	Anhang	17
6.1	Tabellen und Grafiken	17
6.2	Laborbuch	23
6.3	Tabellenverzeichnis	26
6.4	Abbildungsverzeichnis	26

1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch sollen zwei als mathematisch angenommene Pendel mit einer Feder gekoppelt werden. Dabei wird untersucht, wie sich die Auslenkungswinkel φ_0 der Ruhelage und die Kreisfrequenzen ω von gegen-, gleichsinnig und gekoppelter Schwingung verhalten. Hierfür wird die Kopplungshöhe der Feder ρ variiert.

2 Aufbau und Durchführung

Um die oben genannten Ziele zu erreichen, wird der in [Abbildung 1](#) dargestellte Versuchsaufbau verwendet. Die Ableseunsicherheiten werden bei analogen Skalen mit Dreiecks- und bei digitalen Skalen mit Rechtecksverteilung mit Formeln aus [\[3\]](#) ermittelt. Die angehängten Massen m werden mit einer Digitalwaage gemessen. Das linke Pendel wird mit 2, das rechte mit 1 bezeichnet. Alle Pendelpositionen werden mit Hilfe einer am Gestell angebrachten Skala an der linken Seite des Pendelstabes abgelesen. Zunächst werden die Positionen der Ruhelagen der ungekoppelten Pendel x_{02} und x_{01} gemessen.

Außerdem muss die Federkonstante D_F in einer Messreihe, bei der unterschiedliche Massen m_{Probe} angehängt und die Auslenkung s gemessen wird, ermittelt werden. Dabei ist zu bemerken, dass die Feder an einer Stelle, die sich näher am linken Pendel befindet, verbogen ist. Die Werte dieser Messreihe sind in [Tabelle 1](#) aufgeführt und im Folgenden wird der Mittelwert der daraus berechneten Federkonstante verwendet.

Die Pendellänge l wird von der Aufhängung bis zur Mitte der angehängten Masse m gemessen. Die Unsicherheit wird dabei größer geschätzt, da die genaue Position der Pendelaufhängung durch einen Metallkasten verdeckt und die Mitte der Massen nur geschätzt ist. Da die Massen um den Abstand l' über der Skala angebracht sind, wird dieser ebenfalls gemessen und daraus die Länge $L = l + l'$ berechnet. Es wird durch Messung bestätigt, dass die Pendel die gleiche Periodendauer T haben. Die Messwerte hierzu finden sich in [Abbildung 18](#).

Die Kopplungshöhe ρ wird von der Oberkante der Feder bis zur geschätzten Aufhängeposition der Pendel gemessen.

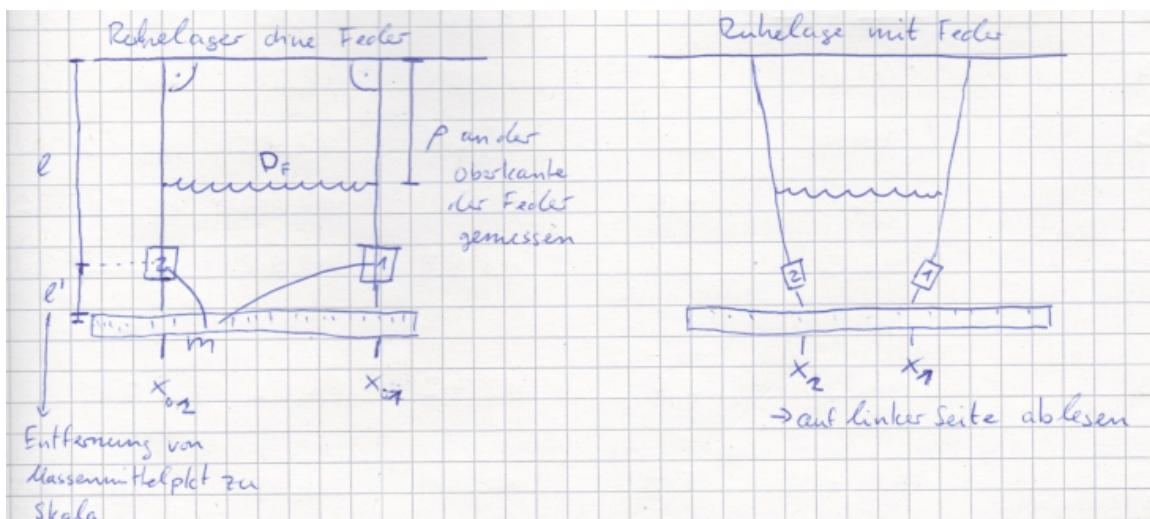


Abb. 1: Skizze aus dem Laborbuch ([Abbildung 18](#)) für den Versuchsaufbau.

Im Folgenden sind alle Messwerte aufgelistet, die vor der Versuchsdurchführung ermittelt wurden:

$$\begin{aligned}
 l &= (93,00 \pm 0,14) \text{ cm} \\
 l' &= (6,30 \pm 0,08) \text{ cm} \\
 \Rightarrow L &= (99,30 \pm 0,17) \text{ cm} \\
 m &= (319,5 \pm 0,6) \text{ g} \\
 D_F &= (1,535 \pm 0,004) \text{ N m}^{-1} \\
 x_{01} &= (48,70 \pm 0,12) \text{ cm} \\
 x_{02} &= (1,70 \pm 0,12) \text{ cm}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Für die verschiedenen Schwingungsarten wird bei variiertter Kopplungshöhe ρ die Schwingungsdauer T gemessen. Hierfür wird eine Auslösevorrichtung verwendet, die in [Abbildung 2](#) zu sehen ist.

Bei gleichsinniger Schwingung wird die Auslösevorrichtung im Abstand der Ruhepositionen mit Feder x_1 und x_2 angebracht und beide Pendel aus dieser Ruheposition um einige Zentimeter ausgelenkt. Es wird die Dauer von 10 Perioden ($10T_{\text{gl}}$) gemessen.

Bei der gegensinnigen Schwingung lenken wir beide Pendel mit der Auslösevorrichtung von x_1 beziehungsweise x_2 um die gleiche Strecke in entgegengesetzte Richtung aus. Es wird auch hier die Dauer von 10 Perioden ($10T_{\text{geg}}$) ermittelt.

Für die Kopplungsschwingung wird das Pendel 2 in seiner Ruhelage x_2 belassen und das Pendel 1 um einige Zentimeter ausgelenkt. Es wird die Schwingungsdauer T_+ und die Dauer der Schwebung T_- über verschiedene Anzahlen von Perioden gemessen. Alle Messwerte und die Anzahl der gemessenen Perioden finden sich in [Tabelle 2](#).

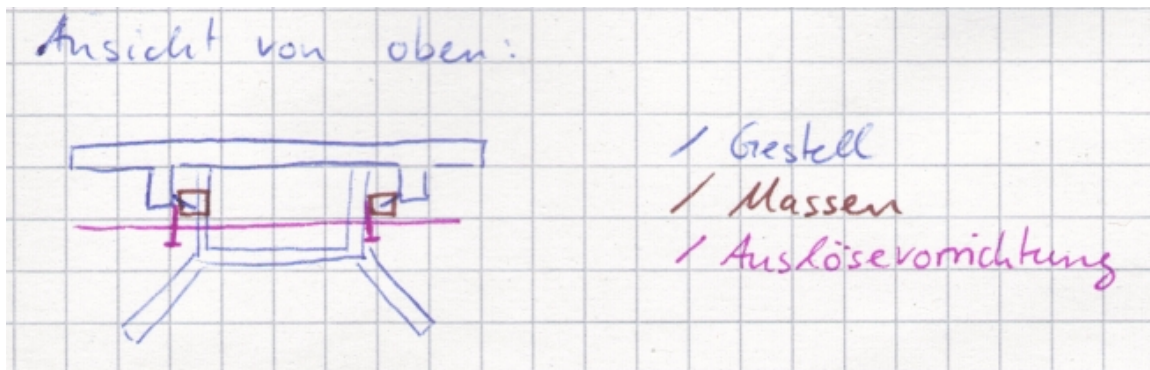


Abb. 2: Skizze aus dem Laborbuch ([Abbildung 20](#)) für die Auslösevorrichtung.

3 Auswertung und Fehleranalyse

3.1 Untersuchung der Auslenkungswinkel

Vor jeder Messreihe werden zunächst die durch das zusätzliche Drehmoment M_0 verursachten Auslenkungen $X_1 = x_1 - x_{01}$ und $X_2 = x_2 - x_{02}$ gemessen. Über eine Kleinwinkelnäherung werden daraus die Auslenkungswinkel φ_{01} und φ_{02} berechnet. Alle x_i und x_{0i} besitzen dabei die gleichen Unsicherheiten $\Delta x = 0,12$ cm. Die Unsicherheiten der Winkel werden über Fehlerfortpflanzung [3] berechnet:

$$\varphi_{0i} \approx \tan(\varphi_{0i}) = \frac{X_i}{L} = \frac{x_i - x_{0i}}{L} \quad (2)$$

$$\Delta\varphi_{0i} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x_i - x_{0i}}{L^2} \Delta L\right)^2}. \quad (3)$$

Die berechneten Auslenkungswinkel sind in [Tabelle 3](#) im Anhang zusammengestellt und in [Abbildung 3](#) aufgetragen:

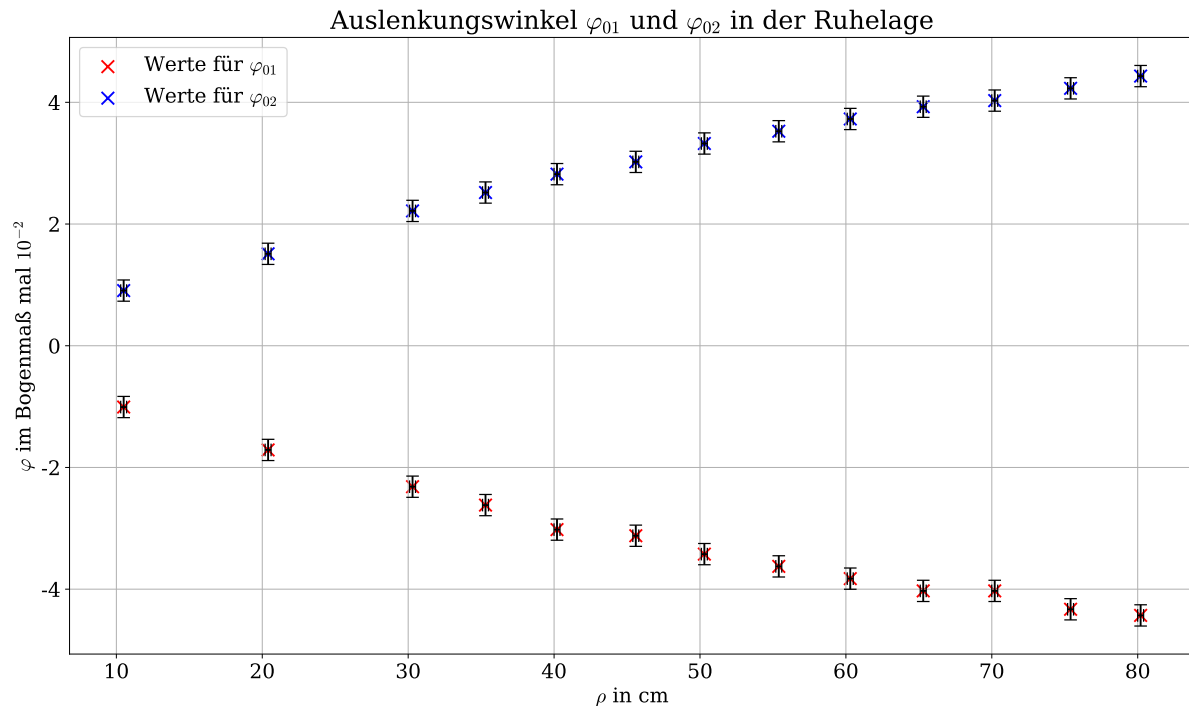


Abb. 3: Aufgetragen sind die Auslenkungswinkel φ_{01} und φ_{02} in der Ruhelage der beiden Pendel gegen die jeweilige Kopplungshöhe ρ in cm. Die berechneten Unsicherheiten beider Größen sind als Fehlerbalken eingetragen, da ρ eine kleine Unsicherheit besitzt, ist dieser Fehlerbalken nicht gut zu erkennen.

Bereits in [Abbildung 3](#) lässt sich der in [2] beschriebene Zusammenhang $\varphi_{01} = -\varphi_{02}$ erkennen. In [Abbildung 4](#) sind die Winkel betragsmäßig aufgetragen, um den Zusammenhang deutlicher erkennbar zu machen. Die Verträglichkeit der Werte überprüfen wir mit dem t -Wert, der wie in [3] berechnet wird. Ein Wert von unter 2 bedeutet eine gute, ein Wert über 2 eine schlechte Verträglichkeit. Zwar sind alle φ_{01} und φ_{02} Werte miteinander verträglich, die t -Werte liegen in

einem Bereich von 0 bis 0,8 (siehe [Tabelle 3](#)), es fällt jedoch auf, dass fast alle Werte für φ_{01} (rot) über den Werten für φ_{02} (blau) liegen. Mögliche Gründe dafür sollen in der Diskussion näher betrachtet werden.

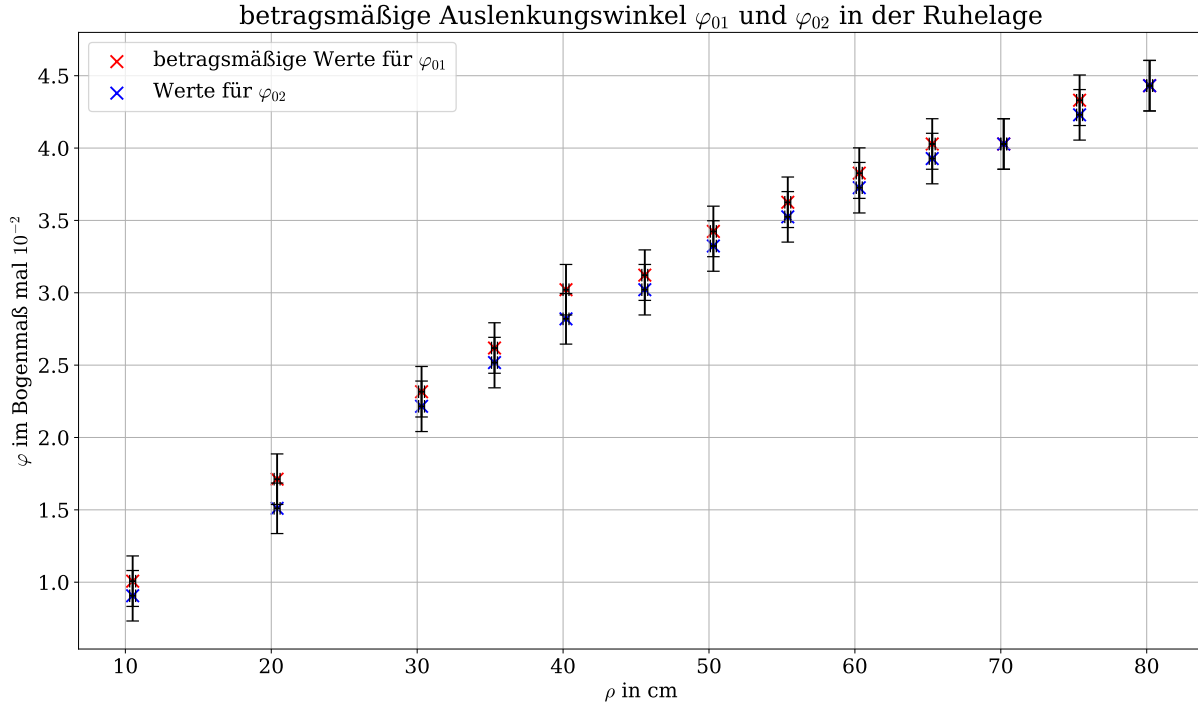


Abb. 4: Aufgetragen sind die betragsmäßigen Auslenkungswinkel φ_{01} und φ_{02} in der Ruhelage der beiden Pendel gegen die jeweilige Kopplungshöhe ρ in cm. Die Unsicherheiten sind erneut aufgetragen.

3.2 Untersuchung der beiden Fundamentalschwingungen

Als Spezialfall der Kopplungsschwingung werden die Fundamentalschwingungen gleichsinnige und gegensinnige Schwingung betrachtet.

3.2.1 Gleichsinnige Schwingung

Wie in [2] erläutert, hat die Feder bei gleichsinniger Schwingung keine Auswirkung auf die Periodendauer und es gilt $\omega_{\text{ungekoppelt}} \approx \omega_{\text{gl}}$. Aus den gemessenen Periodendauern T_{gl} berechnet man die Winkelgeschwindigkeit ω_{gl} und die Fehler mit Fehlerfortpflanzung [3] wie folgt:

$$\omega_{\text{gl}} = \frac{2\pi}{T_{\text{gl}}} \quad (4)$$

$$\Delta\omega_{\text{gl}} = \frac{2\pi\Delta T_{\text{gl}}}{T_{\text{gl}}^2}. \quad (5)$$

Die hiermit ermittelten Werte, die auch in [Tabelle 4](#) im Anhang aufgelistet sind, sind in [Abbildung 5](#) nach der Kopplungshöhe zusammen mit ihrem Mittelwert und der Standardabweichung des Mittelwertes, die mit Formeln aus [3] berechnet wurden, aufgetragen. Alle Werte sind zufällig um den Mittelwert gestreut und es ist keine klare Abhängigkeit von ρ zu erkennen.

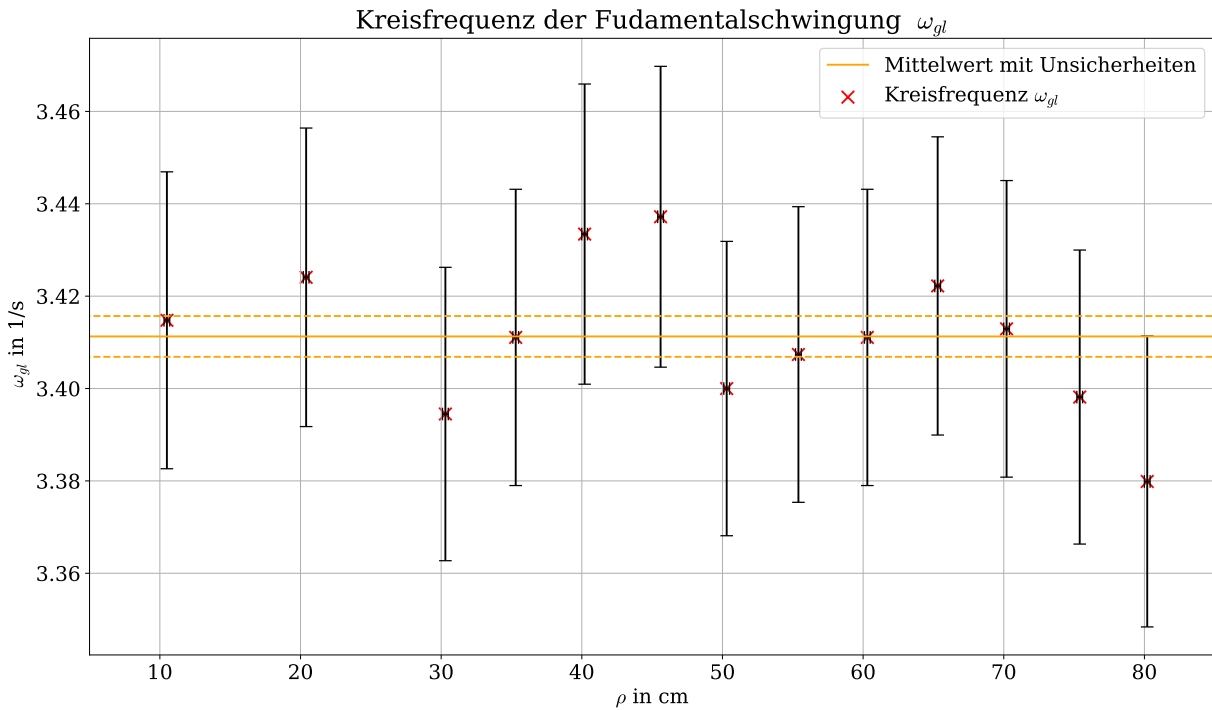


Abb. 5: Aufgetragen sind die Kreisfrequenzen ω_{gl} in s^{-1} bei variabler Kopp-
lungshöhe ρ in cm mit den jeweiligen Unsicherheiten. Außerdem ist der Mit-
telwert der Kreisfrequenzen $\bar{\omega}_{gl}$ mit seiner Unsicherheit dargestellt.

Vergleicht man den Mittelwert $\bar{\omega}_{gl} = (3,411 \pm 0,004) s^{-1}$ mit der Kreisfrequenz der nicht-gekoppelten Pendel $\omega_{\text{ungekoppelt}} = 2\pi/T_{\text{ungekoppelt}} = (3,41 \pm 0,02) s^{-1}$ erhält man eine sehr gute Verträglichkeit mit einem t -Wert von $t = 0,2$ wodurch der Zusammenhang $\omega_{\text{ungekoppelt}} \approx \omega_{gl}$ bestätigt werden kann.

Im Folgenden soll untersucht werden, ob die Kreisfrequenz $\bar{\omega}_{gl}$ der Frequenz entspricht, die man mit der Formel für ein mathematisches Pendel erhält [2]. Dabei wird g aus [4] verwendet:

$$\omega_{\text{berechnet}} = \sqrt{\frac{g}{l}} = 3,247 s^{-1} \quad (6)$$

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{g}{4l^3}} \Delta l = 0,003 s^{-1}. \quad (7)$$

Dieser Wert wird nun mit den gemessenen Kreisfrequenzen und ihrem Mittelwert in [Abbildung 6](#) verglichen.

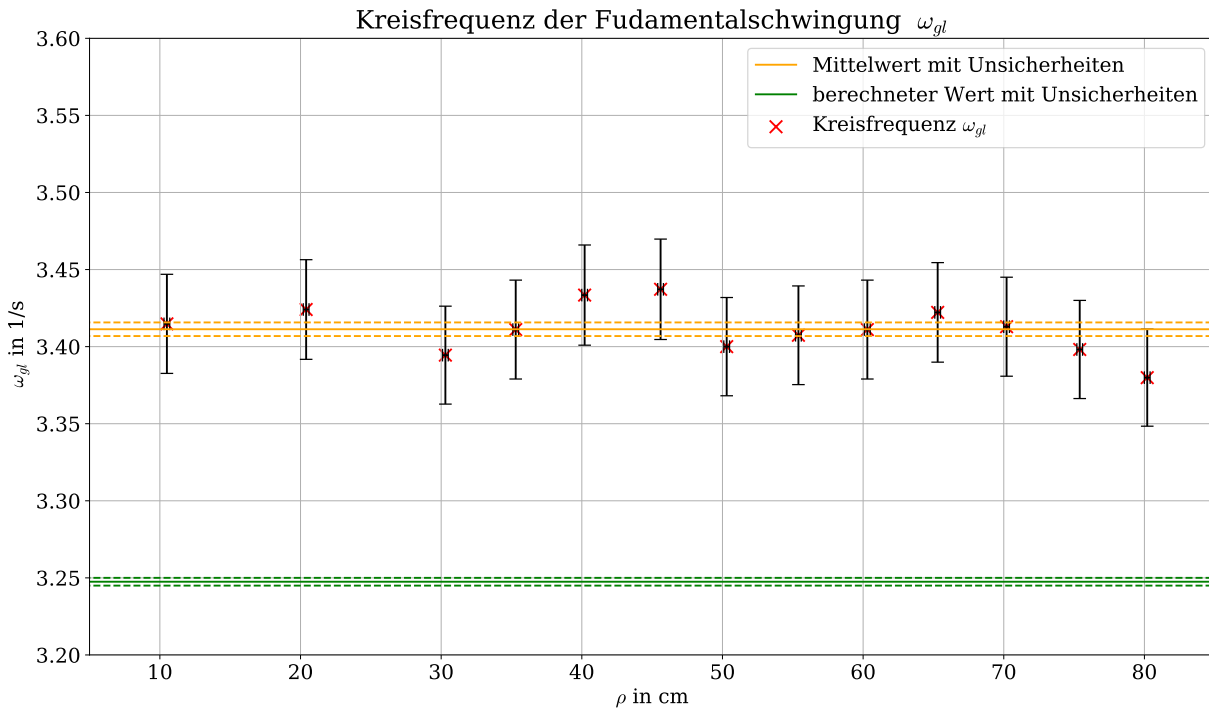


Abb. 6: Aufgetragen sind die Kreisfrequenzen ω_{gl} in s^{-1} bei variabler Kopplungshöhe ρ in cm mit den jeweiligen Unsicherheiten. Außerdem ist der Mittelwert der Kreisfrequenzen $\bar{\omega}_{gl}$ mit seiner Unsicherheit dargestellt. Zusätzlich ist noch der aus der Formel $\omega = \sqrt{g/l}$ aus [2] berechnete Wert der Kreisfrequenzen mit den Unsicherheiten eingezeichnet.

Man sieht eine deutliche Abweichung der Kreisfrequenz $\bar{\omega}_{gl}$ vom erwarteten Wert. Auch der extrem hohe t -Wert beim Vergleich von $\bar{\omega}_{gl}$ mit $\omega_{\text{berechnet}}$ von $t = 32,2$ deutet auf eine hohe Unverträglichkeit und einen systematischen Fehler hin. Mögliche Gründe hierfür werden in der Diskussion aufgegriffen.

3.2.2 Gegenseitige Schwingung

Nach [2] soll die Kreisfrequenz bei der gegenseitigen Schwingung ω_{geg} höher als bei der gleichsinnigen Schwingung sein, da noch ein zusätzliches Drehmoment durch die Feder wirkt. Es gilt:

$$\omega_{\text{geg}}^2 = \frac{2D_F \rho^2}{ml^2} + \omega_{gl}^2. \quad (8)$$

Die gemessenen Werte für ω_{geg} , die sich aus den Periodendauern analog zu Gleichung 4 berechnen lassen, sind in Tabelle 4 im Anhang und in Abbildung 7 zu sehen, in der die Messwerte gegen die Kopplungshöhe ρ aufgetragen sind.

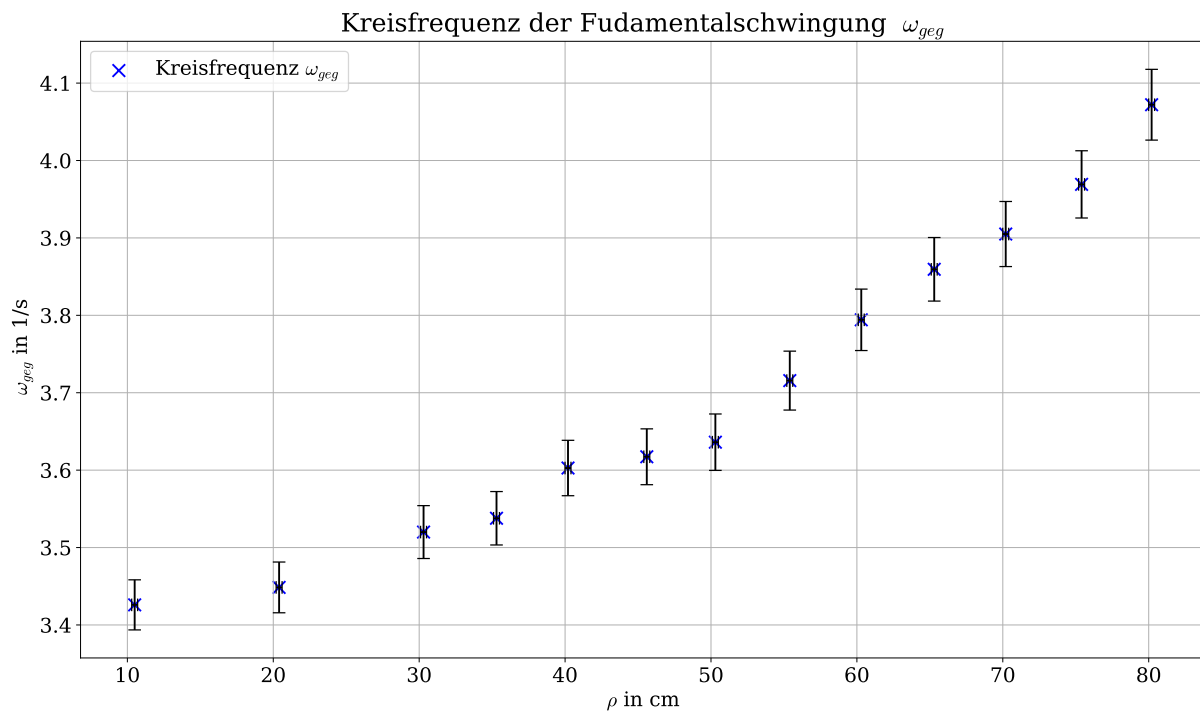


Abb. 7: Aufgetragen sind die Kreisfrequenzen ω_{geg} in s^{-1} bei variabler Kopp-
lungshöhe ρ in cm mit den jeweiligen Unsicherheiten.

Wenn man [Gleichung 8](#) betrachtet, bemerkt man, dass es einen linearen Zusammenhang zwischen ω_{geg}^2 und ρ^2 gibt. Deswegen werden die quadrierten Werte gegeneinander aufgetragen und eine lineare Regression durchgeführt, die in [Abbildung 8](#) zu sehen ist. Die Ausgleichsgerade hat dabei die Steigung b und den y-Achsenabschnitt a .

Die Formeln aus [\[3\]](#) für die Steigung b , den y-Achsenabschnitt a und ihre Unsicherheiten werden dabei verwendet. Man erhält:

$$b = (7,50 \pm 0,18) \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-2} \quad (9)$$

$$a = (11,60 \pm 0,06) \text{ s}^{-2}. \quad (10)$$

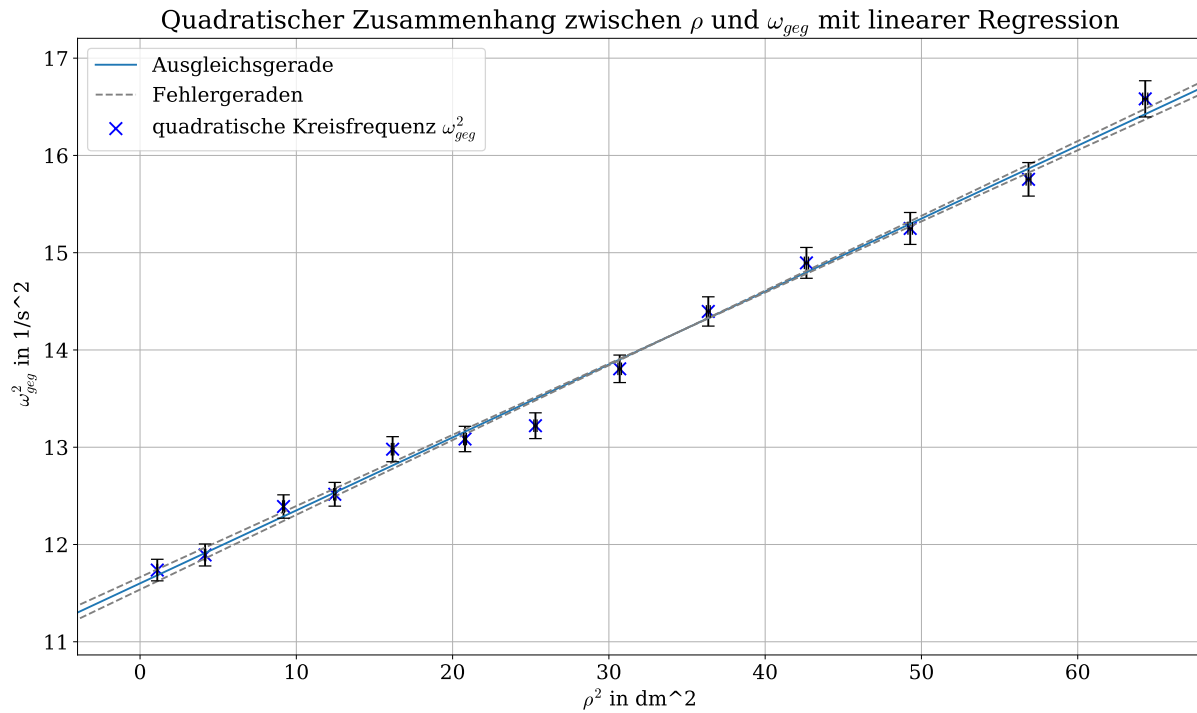


Abb. 8: Aufgetragen sind die quadrierten Kreisfrequenzen ω_{geg}^2 in s^{-2} bei quadrierten Kopplungshöhen ρ^2 in dm^2 mit den jeweiligen Unsicherheiten. Zusätzlich ist eine lineare Regression mit Fehlergeraden eingezeichnet.

Aus [Gleichung 8](#) ergeben sich folgende Erwartungen für die Steigung b_{Formel} und den y-Achsenabschnitt a_{Formel} :

$$b_{\text{Formel}} = \frac{2D_{\text{F}}}{ml^2} = 9,07 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-2} \quad (11)$$

$$\Delta b_{\text{Formel}} = \sqrt{\left(\frac{2}{ml^2} \Delta D_{\text{F}}\right)^2 + \left(\frac{-2D_{\text{F}}}{m^2 l^2} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{-4D_{\text{F}}}{ml^3} \Delta l\right)^2} = 0,04 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-2} \quad (12)$$

$$a_{\text{Formel}} = \omega_{\text{gl}}^2 = 11,63 \quad (13)$$

$$\Delta a_{\text{Formel}} = 2\omega_{\text{gl}} \Delta \omega_{\text{gl}} = 0,03. \quad (14)$$

Mit einem t -Wert von $t_b = 8,3$ ist die Steigung b schlecht mit der Erwartung aus der [Gleichung 8](#) verträglich. Mögliche Gründe dafür werden in der Diskussion erörtert. Der y-Achsenabschnitt a hingegen ist mit einem t -Wert von $t_a = 0,5$ gut verträglich.

Eine weitere Erwartung aus der zugrundeliegenden Formel ist, dass, wenn die Kopplungshöhe ρ gegen Null geht, die Kreisfrequenz ω_{geg} gegen die Kreisfrequenz der gleichsinnigen Schwingung ω_{gl} konvergiert. Das ist in [Abbildung 9](#) zu sehen.

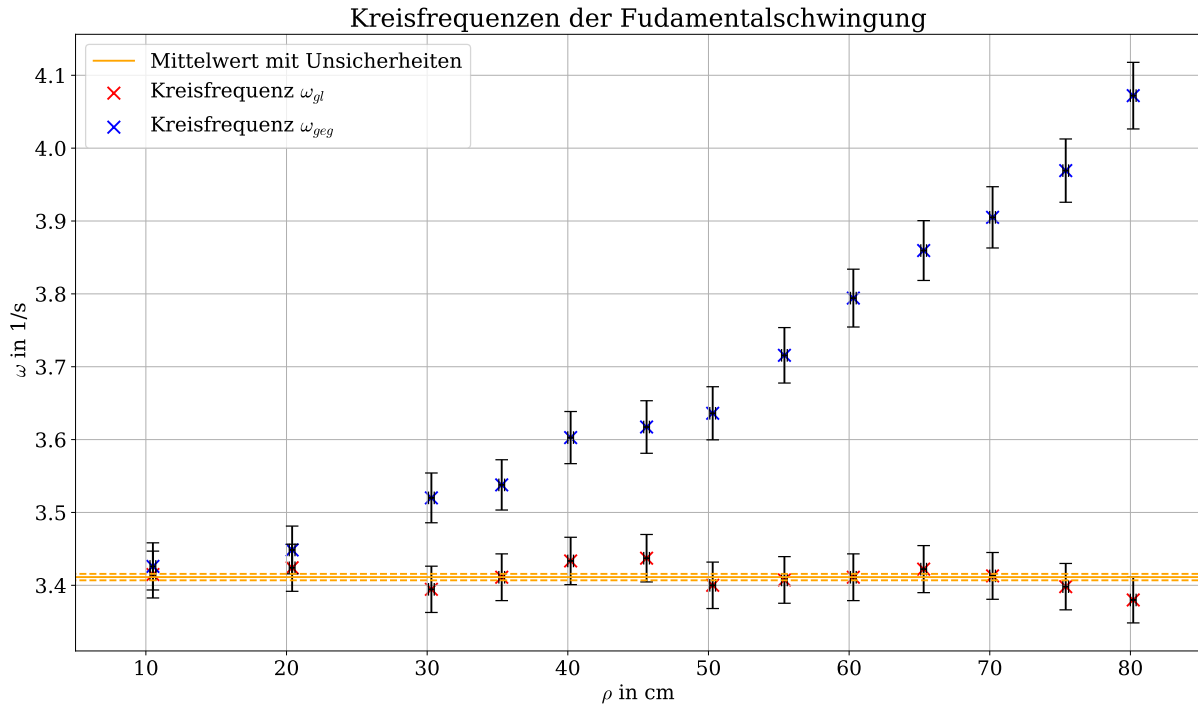


Abb. 9: Aufgetragen sind die Kreisfrequenzen ω_{gl} in s^{-1} und ω_{geg} in s^{-1} bei variabler Kopplungshöhe ρ in cm mit den jeweiligen Unsicherheiten. Außerdem ist der Mittelwert der Kreisfrequenzen $\bar{\omega}_{gl}$ mit seiner Unsicherheit dargestellt.

3.3 Untersuchung der Kopplungsschwingung

Als letztes wird eine Kopplungsschwingung betrachtet. Dabei ergibt sich wie in [2] erläutert eine Schwebung. Jedes Pendel schwingt mit einer Frequenz von ω_+ . Die Amplitude ändert sich dabei mit einer Schwebungsfrequenz von ω_- . Wenn das eine Pendel eine maximale Amplitude hat, hat das andere Pendel eine verschwindende Amplitude. Die Energie wird dabei durch die Feder von einem Pendel auf das andere übertragen. Für die Schwingungs- und Schwebungsfrequenz soll folgender mathematischer Zusammenhang gelten:

$$\omega_+ = \frac{\omega_{gl} + \omega_{geg}}{2} \quad (15)$$

$$\omega_- = \frac{\omega_{gl} - \omega_{geg}}{2}. \quad (16)$$

Es werden die Periodendauern T_+ und T_- gemessen, die in [Tabelle 2](#) im Anhang zu finden sind und aus ihnen analog zu [Gleichung 4](#) die Kreisfrequenzen berechnet. Sie sind mit den aus [Gleichung 15](#) und [Gleichung 16](#) berechneten Werten in [Tabelle 5](#) und [Tabelle 6](#) im Anhang zu finden. Die Unsicherheiten der berechneten Werte werden über Fehlerfortpflanzung [3] wie folgt berechnet:

$$\Delta\omega_{+, \text{berechnet}} = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta\omega_{gl}^2 + \Delta\omega_{geg}^2} \quad (17)$$

$$\Delta\omega_{-, \text{berechnet}} = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta\omega_{gl}^2 + \Delta\omega_{geg}^2}. \quad (18)$$

Die Messwerte für ω_+ sind in [Abbildung 16](#) im Anhang dargestellt. In folgender [Abbildung 10](#) werden die Messwerte direkt mit dem berechneten Wert verglichen.

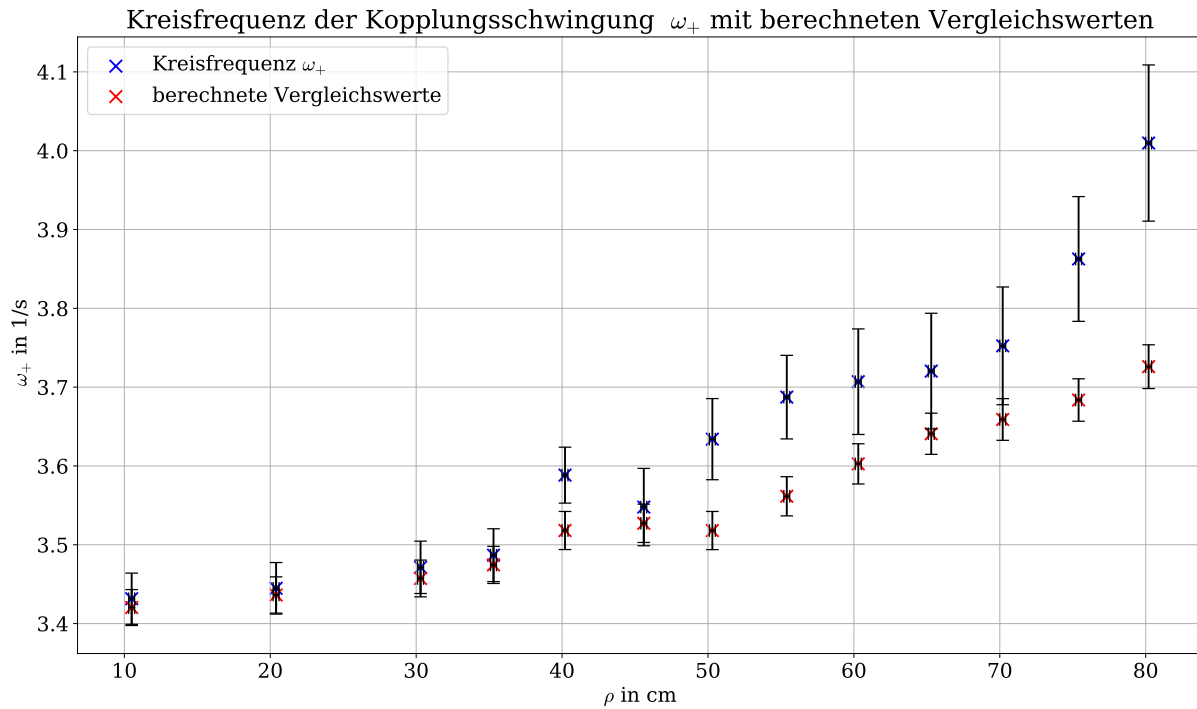


Abb. 10: Aufgetragen ist die Schwebungsfrequenz ω_+ in s^{-1} bei variabler Kopplungshöhe ρ in cm mit den jeweiligen Unsicherheiten. Zusätzlich ist noch der aus der Formel $\omega_+ = (\omega_{\text{geg}} + \omega_{\text{gl}})/2$ aus [2] berechnete Wert der Kreisfrequenzen mit den Unsicherheiten eingezeichnet.

Bereits beim direkten Vergleich mit den berechneten Werten für ω_{gl} und ω_{geg} in [Tabelle 4](#) im Anhang fällt auf, dass alle ω_+ zwischen diesen Werten liegen. Außerdem sind beinahe alle Werte mit den aus der Formel berechneten Werten verträglich, die t -Werte liegen dabei zwischen 0,2 und 2,8. Bei der Betrachtung von [Abbildung 10](#) fällt jedoch auf, dass die gemessenen Werte fast alle eine höhere Frequenz aufweisen, als die Formel impliziert. Gründe hierfür werden in der Diskussion besprochen.

Für die Schwebungsfrequenz wird analog verfahren. Die Messwerte für ω_- finden sich in [Tabelle 4](#) und [Abbildung 17](#) im Anhang. Die aus [Gleichung 16](#) berechneten Werte sind in [Tabelle 6](#) ebenfalls im Anhang zu finden. In [Abbildung 11](#) werden die gemessenen und berechneten Werte verglichen.

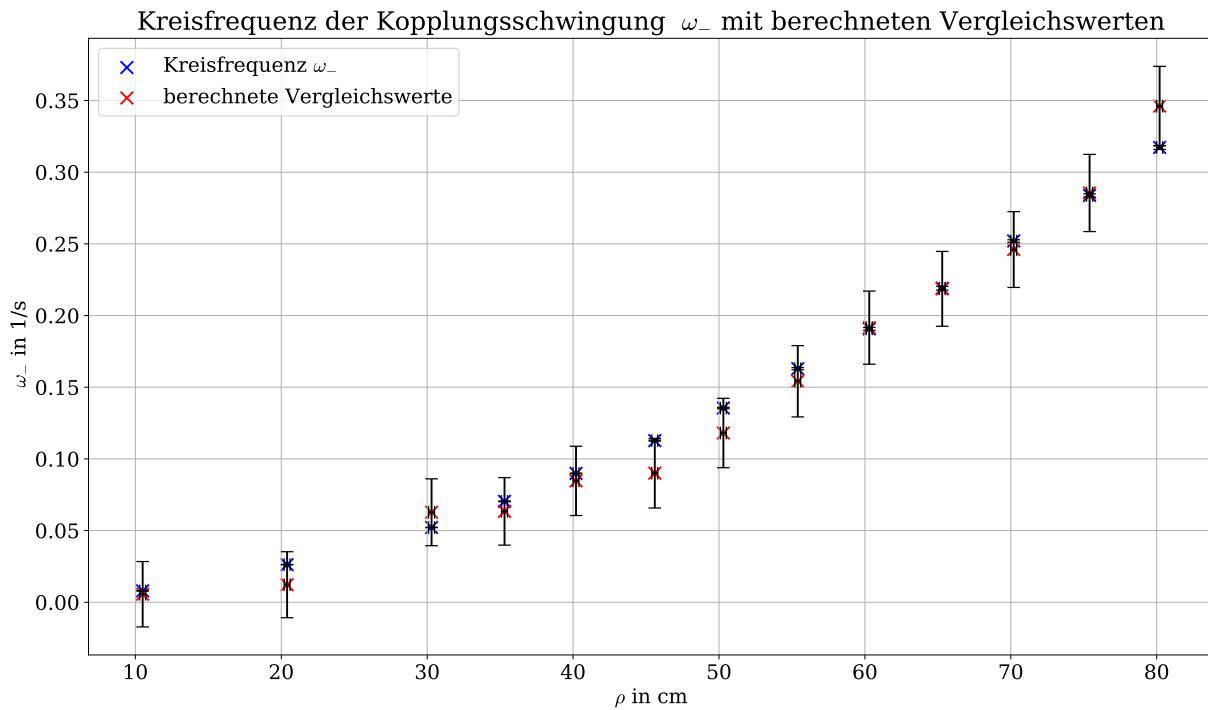


Abb. 11: Aufgetragen ist die Schwebungsfrequenz ω_- in s^{-1} bei variabler Kopplungshöhe ρ in cm mit den jeweiligen Unsicherheiten. Zusätzlich ist noch der aus der Formel $\omega_- = (\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}})/2$ aus [2] berechnete Wert der Schwebungsfrequenzen mit den Unsicherheiten eingezeichnet.

Bereits beim betrachten des Diagramms liegt eine gute Verträglichkeit der Messwerte mit den aus Gleichung 16 berechneten Werten nahe. Dies wird durch die t -Werte in Tabelle 6 im Anhang bestätigt, die im Bereich von $t = 0,02$ bis $1,0$ liegen. Wie erwartet liegen die Frequenzen in einer deutlich kleineren Größenordnung als die Werte für ω_{geg} und ω_{gl} und nehmen bei zunehmender Kopplungshöhe zu.

4 Diskussion der Ergebnisse

4.1 Zusammenstellung der Ergebnisse

Die Untersuchung der Auslenkungswinkel bestätigt, dass die beiden Auslenkungswinkel der Pendel betragsmäßig gleich sind. Mit t -Werten zwischen 0 und 0,8 sind alle Werte sehr gut verträglich.

Die Erwartung, dass die Winkelgeschwindigkeit der gleichsinnigen Schwingung unabhängig von der Kopplungshöhe ist, konnte im Versuch bestätigt werden. Die Messwerte der gleichsinnigen Schwingung ergeben eine mittlere Frequenz, die mit der Frequenz der ungekoppelten Pendel mit $t = 0,2$ verträglich ist. Somit ist diese Schwingung auch von der Kopplung insgesamt unabhängig. Allerdings ist die gemessene Frequenz nicht mit dem über die Formel für ein mathematisches Pendel $\omega_{\text{berechnet}} = \sqrt{g/l}$ berechneten Wert verträglich:

$$\bar{\omega}_{\text{gl}} = (3,411 \pm 0,004) \text{ s}^{-1} \quad (19)$$

$$\omega_{\text{berechnet}} = (3,247 \pm 0,003) \text{ s}^{-1} \quad (20)$$

$$t_{\text{gl}} = 32,2. \quad (21)$$

Bei der gegensinnigen Schwingung konnte ein genereller linearer Zusammenhang zwischen ω_{geg}^2 und ρ^2 bestätigt werden:

$$\omega_{\text{geg}}^2 = \frac{2D_F\rho^2}{ml^2} + \omega_{\text{gl}}^2. \quad (22)$$

Während der y -Achsenabschnitt a mit einem t -Wert von $t_a = 0,5$ sehr gut mit dem erwarteten Wert ω_{gl} verträglich ist, ergibt sich für die Steigung b eine schlechte Verträglichkeit mit dem erwarteten Wert, der t -Wert beträgt dabei $t_b = 8,3$.

Bei der Kopplungsschwingung konnten die zugrunde liegenden Formeln sowohl für die Schwingungs- als auch für die Schwebungsfrequenz bestätigt werden:

$$\omega_+ = \frac{\omega_{\text{gl}} + \omega_{\text{geg}}}{2} \quad (23)$$

$$\omega_- = \frac{\omega_{\text{gl}} - \omega_{\text{geg}}}{2}. \quad (24)$$

Bis auf drei t -Werte sind alle Messungen mit den berechneten Werten verträglich. Diese liegen allerdings auch nahe der 2, was auf statistische Ausreißer schließen lässt.

4.2 Fehlerdiskussion

Obwohl die beiden Auslenkungswinkel φ_{01} und φ_{02} sehr gut miteinander verträglich sind, fällt auf, dass alle Werte für φ_{01} oberhalb von φ_{02} liegen. Eine Erklärung dafür könnte ein systematischer Fehler beim Ablesen der Messwerte x_1 und x_2 sein, da beide Werte auf der linken Seite der Vorrichtung abgelesen wurden. Dadurch wurde der Wert von x_1 immer an der Innenseite und deshalb etwas größer als x_2 gemessen, wodurch φ_{01} immer etwas größer als φ_{02} ist.

Es fällt auf, dass beim Vergleich der Messwerte untereinander und mit aus gemessenen Werten hergeleiteten Größen die Verträglichkeiten gut sind. Bei aus Formeln berechneten Vergleichswerten liegt aber eine hohe Unverträglichkeit vor. Ein Beispiel hierfür ist der mit $t = 32,2$ schlecht verträgliche Wert, der aus $\omega = \sqrt{g/l}$ berechnet wurde. Dafür sind zwei Erklärungen möglich: Entweder es liegt ein schwerer systematischer Fehler vor, der sich durch den ganzen Versuch

zieht oder das zugrundeliegende Modell ist hier unpassend. Im Folgenden werden zunächst drei plausible, systematische Fehlerquellen erörtert.

Ein Grund für die Unverträglichkeiten kann ein Fehler bei der Pendellängenmessung sein. Durch Überschlagsrechnung ergibt sich, dass erst mit einer um etwa 10 cm kürzeren Pendellänge ein verträglicher Wert möglich ist. Ein so großer Messfehler ist jedoch mit einem Maßband sehr unwahrscheinlich.

Weiterhin ist ein Fehler in der Zeitmessung möglich. Dafür müsste die Stoppuhr immer etwa 0,1 s zu früh betätigt worden sein. Das ist unwahrscheinlich, da aufgrund der Reaktionszeit eher eine zu späte Auslösung der Uhr plausibel ist. Es ist auch möglich, dass die Zeit ungenauer gemessen wurde als angenommen. Dann wäre aber bei einer ungenauen Auslösung der Stoppuhr eine Streuung der Messwerte um den errechneten Wert und kein unverträglicher Mittelwert zu erwarten.

Eine weitere mögliche Ursache ist, dass bei der gleichsinnigen Schwingung die Pendel nicht genügend genau ausgelenkt wurden und somit eine leicht gegensinnige Schwingung mit größerer Frequenz erzeugt wurde. Dagegen spricht jedoch, dass die Frequenzen ω_{gl} nahe an der gemessenen Frequenz der ungekoppelten Pendel liegen und statistisch um sie streuen.

Da die plausiblen systematischen Fehler ausgeschlossen oder sehr unwahrscheinlich sind, ist zu überlegen, ob die Näherung des mathematischen Pendels zutreffend ist oder ob es sich eher um ein physikalisches Pendel handelt.

Um zu überprüfen, ob die Näherung des physikalischen Pendels ein besseres Modell darstellt, soll im Folgenden ein Wert für ω_{gl} mithilfe der Formel für das physikalische Pendel ermittelt werden. Das Trägheitsmoment setzt sich dabei aus einem, mithilfe des Steinerschen Satzes verschobenen, Trägheitsmoment eines Zylinders und dem Trägheitsmoment der Stange zusammen. Die Formeln für die Trägheitsmomente stammen dabei aus [5]:

$$\omega_{\text{überschlagen}} = \sqrt{\frac{M_{\text{ges}}gl}{I_{\text{ges}}}} = \sqrt{\frac{(m_{\text{Zylinder}} + m_{\text{Stange}})gl}{I_{\text{Zylinder,Steiner}} + I_{\text{Stange}}}} \quad (25)$$

$$= \sqrt{\frac{(m_{\text{Zylinder}} + m_{\text{Stange}})gl}{m_{\text{Zylinder}} \left(\frac{1}{12} (3R^2 + h^2) + l^2 \right) + \frac{1}{3} m_{\text{Stange}} l^2}}. \quad (26)$$

Da einige der notwendigen Größen nicht gemessen wurden, müssen diese Größen ungefähr abgeschätzt werden:

$$h \approx 0,06 \text{ m} \quad (27)$$

$$R \approx 0,025 \text{ m} \quad (28)$$

$$m_{\text{Stange}} \approx 0,15 \text{ kg} \quad (29)$$

$$l = 0,93 \text{ m} \quad (30)$$

Damit ist es jedoch nicht sinnvoll, den berechneten Wert direkt mit unserem erhaltenen Wert zu vergleichen, da die Schätzungen sehr unpräzise sind. Mit einem Wert von $\omega_{\text{überschlagen}} = 3,59 \text{ s}^{-1}$ ergibt sich jedoch ein größerer Wert als beim Modell des mathematischen Pendels $\omega_{\text{math}} = (3,247 \pm 0,003) \text{ s}^{-1}$. Da auch unser berechneter Mittelwert $\bar{\omega}_{gl} = (3,411 \pm 0,004) \text{ s}^{-1}$ über ω_{math} liegt, ist das physikalische Pendel vermutlich tatsächlich das bessere Modell.

Bei der Kopplungsschwingung hat das Modell des physikalischen Pendels keine direkten Auswirkungen. Die Schwingungs- und Schwebungsfrequenz werden mit den aus gemessenen Werten der gleich- und gegensinnigen Schwingungen berechneten Schwingungs- und Schwebungsfrequenz verglichen.

Bei der Schwingungsfrequenz ω_+ fällt jedoch auf, dass sich die gemessenen Frequenzen immer weiter von den berechneten Werten entfernen und die t -Werte tendenziell größer werden. Eine mögliche Erklärung ist ein Fehler in der Versuchsdurchführung. Für eine richtige Durchführung hätte ein Pendel ausgelenkt, das andere aber nicht in seiner vorherigen Ruheposition fixiert werden sollen. Durch die Fixierung wirkt nach dem Start sofort ein Drehmoment auf das linke Pendel und es startet nicht wirklich in Ruhe. Dieser Fehler wird höher, je größer die Kopplungshöhe ρ wird, da das anfängliche Drehmoment hierdurch stärker wird. Durch die fälschliche Messung ist das Starten der Pendel nicht der wirkliche Beginn der vermeintlich gemessenen Periode.

4.3 Verbesserte Messmethoden

Da vermutlich das physikalische Pendel das bessere Modell darstellt, wäre es zunächst sinnvoll, vor dem Versuch weitere geometrische Eigenschaften des Pendels, wie Höhe und Radius des Zylinders, sowie die Masse des Stabes zu bestimmen. Alternativ wäre es möglich, ein Pendel zu verwenden, das dem Modell des mathematischen Pendels besser entspricht. Dazu müsste man die Masse des Stabes auf ein Minimum reduzieren und die Masse des Zylinders möglichst gut in einem kleinen Volumen vereinen.

Um die Länge l des Pendels, sowie die Kopplungshöhe ρ zu messen, wäre es sinnvoll zu wissen, in welcher Höhe das Pendel genau angebracht ist. Durch die Anbringung in einem Metallkasten, ist eine Messung hier nur mit großer Ungenauigkeit möglich.

Eine Möglichkeit die Auslenkungswinkel φ_{01} und φ_{02} genauer zu bestimmen, wäre eine Anbringung einer Gradskala an den Pendeln. Damit könnte man systematische Fehler wie das Ablesen auf der falschen Seite frühzeitig erkennen. Außerdem wird das Ergebnis genauer, da man auf die Fehlerfortpflanzung der Winkelbestimmung verzichten kann.

Um genauere Messungen zu ermöglichen, wäre es außerdem möglich, ein Oszilloskop zu verwenden, wie es in [2] beschrieben ist. Dadurch ließen sich Messungenauigkeiten bei der Zeitmessung deutlich reduzieren, da das manuelle Betätigen einer Stoppuhr fehleranfällig und ungenau ist.

Literatur

- [1] Dr. Christof Bartels, Dr. Lukas Bruder, Dr. Thomas Pfohl: *Versuch 19 - Gekoppelte Pendel, Versuchsbeschreibung des Physiklabors für Anfänger*innen*, (2021)
- [2] Hans Joachim Eichler, Heinz-Detlef Kronfeldt, Jürgen Sahm: *Das neue Physikalische Grundpraktikum*, Kapitel 6 "Gekoppelte Schwingungen", (2016) <https://link-springer-com.ezproxy-unifr-2.redi-bw.de/book/10.1007%2F978-3-662-49023-5> (aufgerufen am: 24.09.2021)
- [3] Dr. Christof Bartels, Dr. Lukas Bruder, Dr. Thomas Pfohl: *Datenanalyse - Skript zur Vorlesung am 06.09.2021*, (2021)
- [4] Dr. Dr. Jens Simon: *Normalschwereformel für Freiburg, Breitengrad 48° , Höhe 278 m*, *Physikalisch-Technische Bundesanstalt*, www.ptb.de, (aufgerufen am: 23.09.2021)
- [5] Karl-Heinrich Grote, Jörg Feldhusen, Herausgeber: Dubbel. *Taschenbuch für den Maschinenbau.*, Springer Vieweg Verlag, Berlin, Heidelberg (2014)

6 Anhang

6.1 Tabellen und Grafiken

Tab. 1: Messwerte zur Bestimmung der Federkonstanten D_F . Aufgelistet sind die jeweiligen Probemassen und die Auslenkung der Feder.

Probemasse m_{Probe} in g	Dehnung s in mm
10	$64,0 \pm 0,4$
20	$128,0 \pm 0,4$
30	$191,0 \pm 0,4$
40	außerhalb Messskala

Tab. 2: Tabelle mit allen Messwerten: ρ als Kopplungshöhe, x_1 und x_2 als abgelesene Ruhelage der Pendel, T_{gl} und T_{geg} als Periodendauer von 10 Schwingungen von gleichsinniger beziehungsweise gegensinniger Schwingung, sowie T_+ und T_- für die gekoppelte Schwingung. Außerdem sind alle Unsicherheiten angegeben.

ρ in cm mit $\Delta\rho = 0,2 \text{ cm}$	x_1 in cm mit $\Delta x_1 = 0,12 \text{ cm}$	x_2 in cm mit $\Delta x_2 = 0,12 \text{ cm}$	10 T_{gl} in s mit $\Delta(10T_{\text{gl}}) = 0,17 \text{ s}$	10 T_{geg} in s mit $\Delta(10T_{\text{geg}}) = 0,17 \text{ s}$	Anzahl Perioden T_+	T_+ in s mit $\Delta T_+ = 0,17 \text{ s}$	Anzahl Perioden T_-	T_- in s mit $\Delta T_- = 0,17 \text{ s}$
10,5	47,7	2,6	18,40	18,34	10	18,31	0,25	198,71
20,4	47,0	3,2	18,35	18,22	10	18,24	0,25	59,85
30,3	46,4	3,9	18,51	17,85	10	18,10	0,5	60,24
35,3	46,1	4,2	18,42	17,76	10	18,02	0,5	44,63
40,2	45,7	4,5	18,30	17,44	10	17,51	1	68,91
45,6	45,6	4,7	18,28	17,37	5	8,91 8,80	1	55,73
50,3	45,3	5,0	18,48	17,28	5	8,59 8,70	1	46,38
55,4	45,1	5,2	18,44	16,91	5	8,48 8,56	1	38,56
60,3	44,9	5,4	18,42	16,56	4	6,72 6,84	1	32,95
65,3	44,7	5,6	18,36	16,28	3	5,13 5,12 4,95	1	28,68
70,2	44,7	5,7	18,41	16,09	3	5,04 4,97 5,06	2	49,87
75,4	44,4	5,9	18,49	15,83	3	4,81 4,94 4,89	2	44,28
80,2	44,3	6,1	18,59	15,43	2	3,12 3,46 2,90 3,10 3,09	2	39,61

Tab. 3: Auslenkungswinkel φ_0 in Abhängigkeit von der Kopplungshöhe ρ . Angegeben ist zusätzlich der t -Wert bei betragsmäßiger Betrachtung der beiden Werte. Alle Werte sind deutlich verträglich.

ρ in cm mit $\Delta\rho = 0,2$ cm	Auslenkungswinkel φ_{01} in rad mit $\Delta(\varphi_{01}) = 0,0017$	Auslenkungswinkel φ_{02} in rad mit $\Delta(\varphi_{02}) = 0,0017$	t -Wert bei betragsmäßiger Betrachtung
10,5	-0,0101	0,0091	0,4
20,4	-0,0171	0,0151	0,8
30,3	-0,0232	0,0222	0,4
35,3	-0,0262	0,0252	0,4
40,2	-0,0302	0,0282	0,8
45,6	-0,0312	0,0302	0,4
50,3	-0,0342	0,0332	0,4
55,4	-0,0363	0,0352	0,4
60,3	-0,0383	0,0373	0,4
65,3	-0,0403	0,0393	0,4
70,2	-0,0403	0,0403	0,0
75,4	-0,0433	0,0423	0,4
80,2	-0,0443	0,0443	0,0

Tab. 4: Dargestellt sind die vier aus den Messwerten berechneten Frequenzen ω_{gl} , ω_{geg} , ω_+ und ω_- mit ihren jeweiligen Unsicherheiten. Die Kopplungshöhe ρ hat eine Unsicherheit von $\Delta\rho = 0,2$ cm.

ρ in cm	ω_{gl} in s^{-1}	ω_{geg} in s^{-1}	ω_+ in s^{-1}	ω_- in s^{-1}
10,5	$3,41 \pm 0,03$	$3,43 \pm 0,03$	$3,43 \pm 0,03$	$0,007905 \pm 0,000007$
20,4	$3,42 \pm 0,03$	$3,45 \pm 0,03$	$3,44 \pm 0,03$	$0,02625 \pm 0,00008$
30,3	$3,39 \pm 0,03$	$3,52 \pm 0,03$	$3,47 \pm 0,03$	$0,05215 \pm 0,00015$
35,3	$3,41 \pm 0,03$	$3,54 \pm 0,03$	$3,49 \pm 0,03$	$0,0704 \pm 0,0003$
40,2	$3,43 \pm 0,03$	$3,60 \pm 0,04$	$3,59 \pm 0,04$	$0,0899 \pm 0,0002$
45,6	$3,44 \pm 0,03$	$3,62 \pm 0,04$	$3,55 \pm 0,05$	$0,1127 \pm 0,0004$
50,3	$3,40 \pm 0,03$	$3,64 \pm 0,04$	$3,63 \pm 0,05$	$0,1355 \pm 0,0005$
55,4	$3,41 \pm 0,03$	$3,72 \pm 0,04$	$3,69 \pm 0,05$	$0,1629 \pm 0,0007$
60,3	$3,41 \pm 0,03$	$3,79 \pm 0,04$	$3,71 \pm 0,07$	$0,1907 \pm 0,0010$
65,3	$3,42 \pm 0,03$	$3,86 \pm 0,04$	$3,72 \pm 0,07$	$0,2191 \pm 0,0013$
70,2	$3,41 \pm 0,03$	$3,91 \pm 0,04$	$3,75 \pm 0,07$	$0,2520 \pm 0,0009$
75,4	$3,40 \pm 0,03$	$3,97 \pm 0,04$	$3,86 \pm 0,08$	$0,2838 \pm 0,0011$
80,2	$3,38 \pm 0,03$	$4,07 \pm 0,05$	$4,01 \pm 0,10$	$0,3173 \pm 0,0014$

Tab. 5: Dargestellt sind die aus den Messwerten berechneten Frequenzen ω_+ und die aus der Formel berechneten Frequenzen $\omega_{+,Formel}$ mit ihren jeweiligen Unsicherheiten und den t -Werten. Die Kopplungshöhe ρ hat eine Unsicherheit von $\Delta\rho = 0,2$ cm.

ρ in cm	ω_+ in s^{-1}	$\omega_{+,Formel}$ in s^{-1}	t -Wert
10,5	$3,43 \pm 0,03$	$3,42 \pm 0,02$	0,3
20,4	$3,44 \pm 0,03$	$3,44 \pm 0,02$	0,2
30,3	$3,47 \pm 0,03$	$3,46 \pm 0,02$	0,3
35,3	$3,49 \pm 0,03$	$3,47 \pm 0,02$	0,3
40,2	$3,59 \pm 0,04$	$3,52 \pm 0,02$	1,6
45,6	$3,55 \pm 0,05$	$3,53 \pm 0,02$	0,4
50,3	$3,63 \pm 0,05$	$3,52 \pm 0,02$	2,0
55,4	$3,69 \pm 0,05$	$3,56 \pm 0,02$	2,1
60,3	$3,71 \pm 0,07$	$3,60 \pm 0,03$	1,5
65,3	$3,72 \pm 0,07$	$3,64 \pm 0,03$	1,0
70,2	$3,75 \pm 0,07$	$3,66 \pm 0,03$	1,2
75,4	$3,86 \pm 0,08$	$3,68 \pm 0,03$	2,1
80,2	$4,01 \pm 0,10$	$3,73 \pm 0,03$	2,8

Tab. 6: Dargestellt sind die aus den Messwerten berechneten Frequenzen ω_- und die aus der Formel berechneten Frequenzen $\omega_{-,Formel}$ mit ihren jeweiligen Unsicherheiten und den t -Werten. Die Kopplungshöhe ρ hat eine Unsicherheit von $\Delta\rho = 0,2$ cm.

ρ in cm	ω_- in s^{-1}	$\omega_{-,Formel}$ in s^{-1}	t -Wert
10,5	$0,007905 \pm 0,000007$	$0,01 \pm 0,02$	0,1
20,4	$0,02625 \pm 0,00008$	$0,01 \pm 0,02$	0,6
30,3	$0,05215 \pm 0,00015$	$0,06 \pm 0,02$	0,5
35,3	$0,0704 \pm 0,0003$	$0,06 \pm 0,02$	0,3
40,2	$0,0899 \pm 0,0002$	$0,08 \pm 0,02$	0,2
45,6	$0,1127 \pm 0,0004$	$0,09 \pm 0,02$	0,9
50,3	$0,1355 \pm 0,0005$	$0,12 \pm 0,02$	0,7
55,4	$0,1629 \pm 0,0007$	$0,15 \pm 0,02$	0,4
60,3	$0,1907 \pm 0,0010$	$0,19 \pm 0,03$	0,03
65,3	$0,2191 \pm 0,0013$	$0,22 \pm 0,03$	0,02
70,2	$0,2520 \pm 0,0009$	$0,25 \pm 0,03$	0,2
75,4	$0,2838 \pm 0,0011$	$0,29 \pm 0,03$	0,06
80,2	$0,3173 \pm 0,0014$	$0,35 \pm 0,03$	1,0

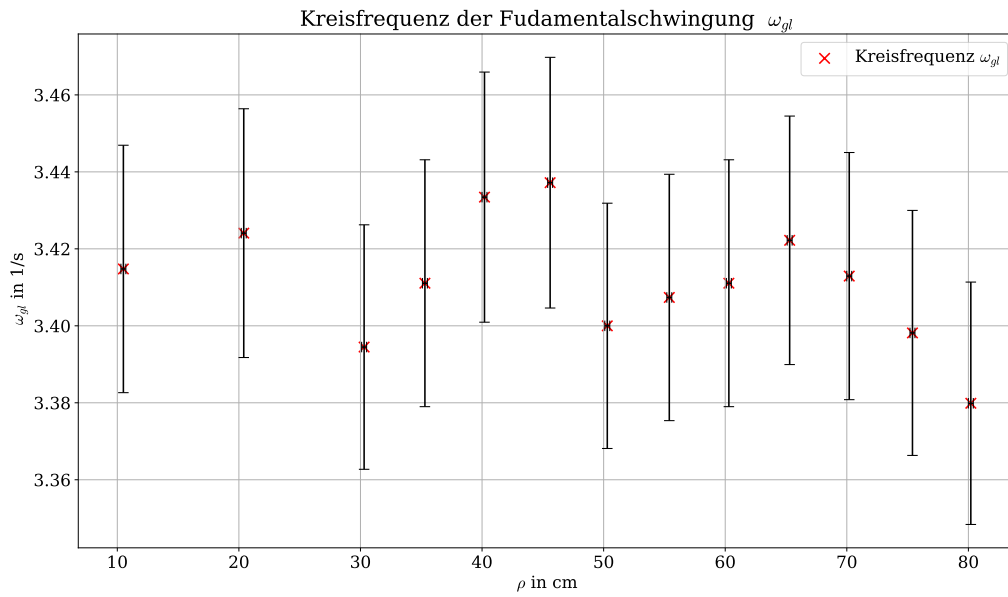


Abb. 12: Aufgetragen sind die Kreisfrequenzen ω_{gl} in s^{-1} bei variabler Kopplungshöhe ρ in cm. Die Unsicherheiten sind ebenfalls aufgetragen.

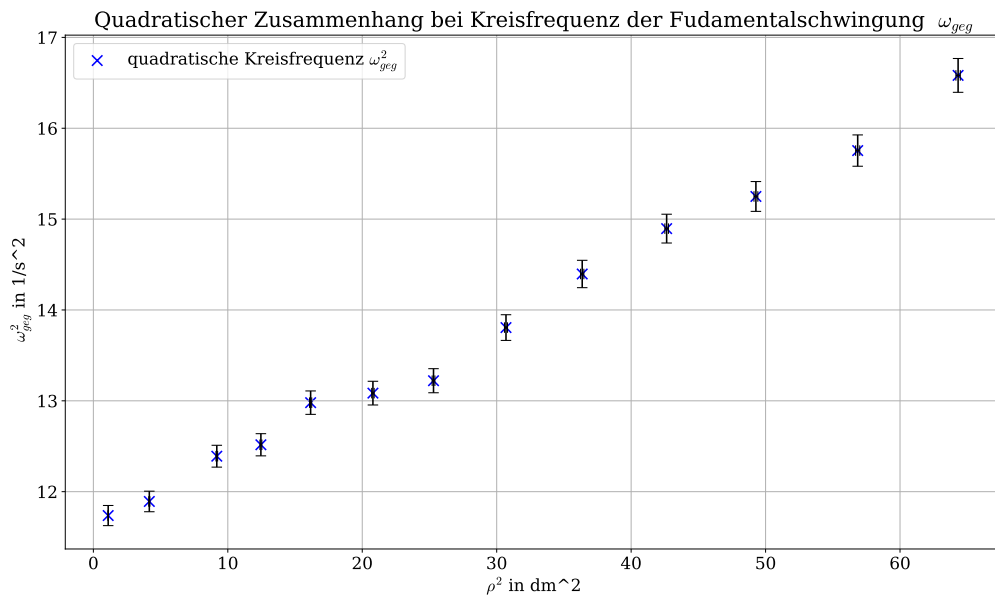


Abb. 13: Aufgetragen sind die quadrierten Kreisfrequenzen ω_{geg}^2 in s^{-2} bei quadrierten Kopplungshöhen ρ^2 in dm^2 mit den jeweiligen Unsicherheiten.

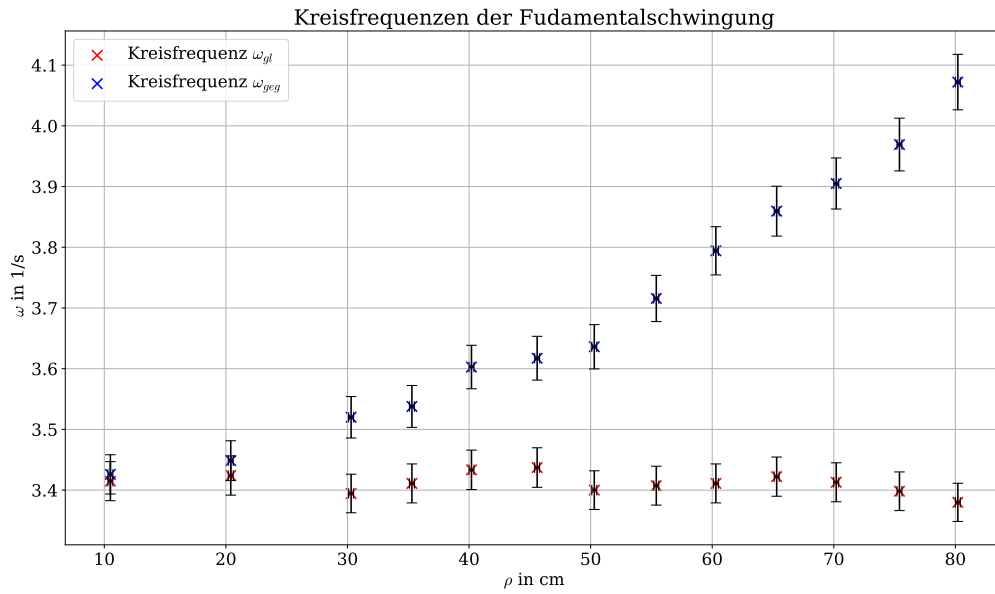


Abb. 14: Aufgetragen sind die Kreisfrequenzen ω_{gl} in s^{-1} und ω_{geg} in s^{-1} bei variabler Kopplungshöhe ρ in cm mit den jeweiligen Unsicherheiten.

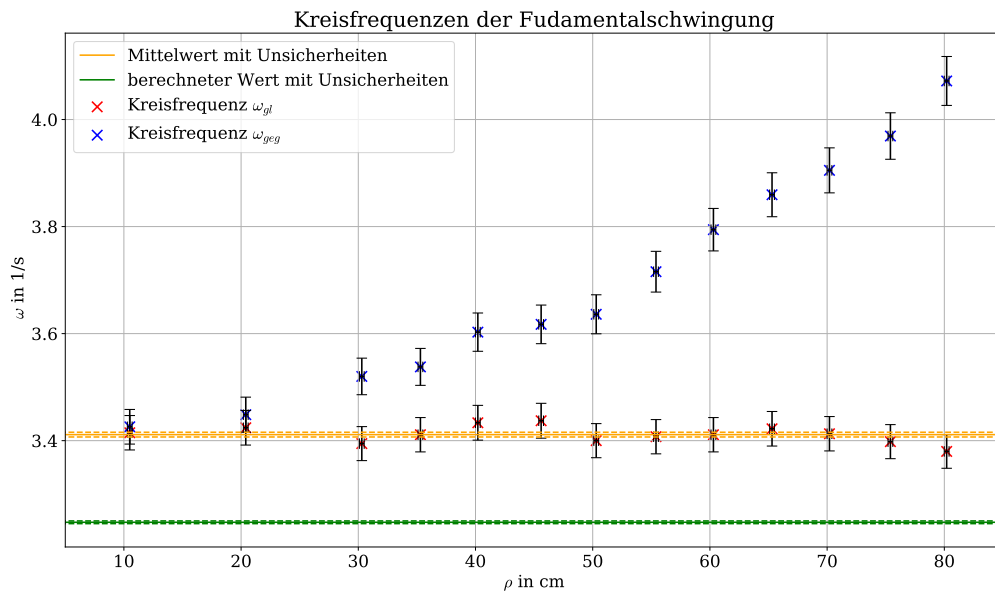


Abb. 15: Aufgetragen sind die Kreisfrequenzen ω_{gl} in s^{-1} bei variabler Kopplungshöhe ρ in cm mit den jeweiligen Unsicherheiten. Außerdem ist der Mittelwert der Kreisfrequenzen $\bar{\omega}_{gl}$ mit seiner Unsicherheit dargestellt.

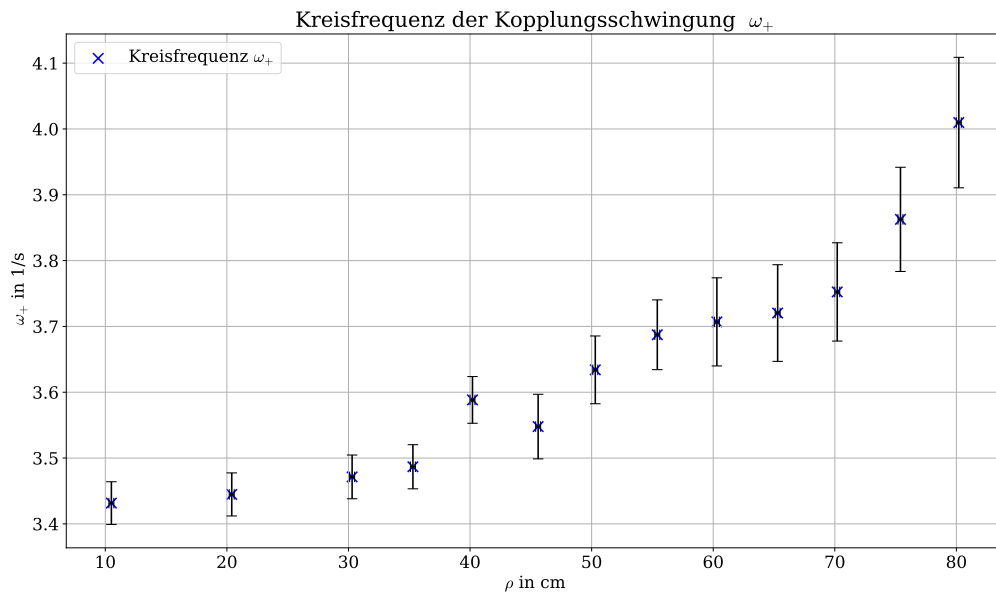


Abb. 16: Aufgetragen ist die Kreisfrequenz ω_+ in s^{-1} bei variabler Kopplungshöhe ρ in cm mit den jeweiligen Unsicherheiten.

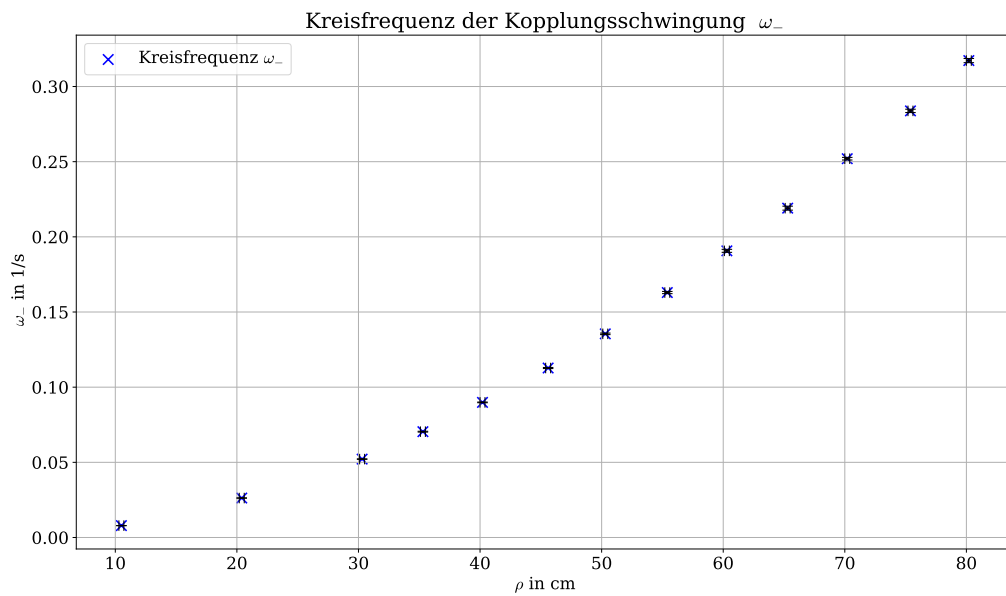


Abb. 17: Aufgetragen ist die Schwebungsfrequenz ω_- in s^{-1} bei variabler Kopplungshöhe ρ in cm mit den jeweiligen Unsicherheiten.

6.2 Laborbuch

Versuch 19 - Doppelpendel 23.05.21

1. Versuchsaufbau

Robrlager ohne Feder

Entfernung von Massenniveauplat zu Skala

Zuhelase mit Feder

→ auf linker Seite ablesen

P an der Oberkante der Feder gemessen

Bem:

- Feder schon leicht verbogen: ...
- Wasserwaage an Gestell
- genaue Beschreibung der Messung hinter Messwerten
- genauer Aufhängepunkt der Pendel nicht sichtbar → abgeschätzt → hohe Unsicherheit für l und p

2. Messung

$$l = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

$$l' = (6,3 \pm \frac{0,2}{\sqrt{6}}) \text{ cm}$$

$$m = (391,5 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ g}$$

$$D_F = \left(\frac{s}{m_{\text{Probe}} g} \right)^{-1}$$

$$x_{01} = (48,7 \pm \frac{0,3}{\sqrt{6}}) \text{ cm}$$

$$x_{02} = (1,7 \pm \frac{0,3}{\sqrt{6}}) \text{ cm}$$

Schwingungsdauer der angekoppelten Pendel abstimmen:

$10T_1$ in s	l_1 in cm	$10T_2$ in s	l_2 in cm
$18,45 \pm \frac{0,3}{\sqrt{3}}$	$92,8 \pm \frac{0,5}{\sqrt{6}}$	$18,45 \pm \frac{0,3}{\sqrt{3}}$	$93,2 \pm \frac{0,5}{\sqrt{6}}$

Federkonstante über angehängte Masse m_{Probe} und Dehnung s

m_{Probe} in g	Dehnung s in mm	m_{Probe} in g	s in mm
10	$64 \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$	20	191
20	$128 \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$	60	außerhalb der Messskala

(keine Unsicherheit bekannt)

Abb. 18: Laborbuch, Seite 1

ρ in cm mit $\Delta\rho = \frac{0,5}{\sqrt{6}}$ cm	x_1 in cm mit $\Delta x_1 = \frac{0,3}{\sqrt{6}}$ cm	x_2 in cm $\Delta x_2 = \frac{0,3}{\sqrt{6}}$ cm	$10T_{ge}$ in s $\Delta(10T_{ge}) = \frac{0,3}{\sqrt{3}}$ s	$10T_{g_0}$ in s $\Delta(10T_{g_0}) = \frac{0,3}{\sqrt{3}}$ s	$10T_+$ in s $\Delta(10T_+) = \frac{0,3}{\sqrt{3}}$ s	T in s $\Delta T = \frac{0,3}{\sqrt{3}}$ s
10,5	2,6 47,7	2,6	18,40	18,34	18,31	198,7
20,4	47,0	3,2	18,35	18,22	18,24	59,8
30,3	46,4	3,9	18,51	17,85	18,10	60,2
40,2	45,7	4,5	18,30	17,44	17,51	68,9
50,3	45,3	5,0	18,48	17,28	16,84 → 8,59 8,70	46,3
60,3	44,9	5,4	18,42	16,56	6,72 6,84	32,9
70,2	44,7	5,7	18,41	16,09	5,04 4,97 5,06	49,8
80,2	44,3	6,1	18,59	15,43	3,12 3,46 2,90 3,10 3,09	39,6
75,4	44,4	5,9	18,49	15,83	4,81 4,94 4,89	44,2
65,3	44,7	5,6	18,36	16,28	5,13 5,12 4,95	28,6
55,4	45,1	5,2	18,44	16,91	8,48 8,56	38,5
45,6	45,6	4,7	18,28	17,37	8,91 8,80	55,7
35,3	46,1	4,2	18,42	17,76	18,02	44,6

*1) Da bei 10 Schwingungen das Pendel einmal anhält, ist es schwer die Perioden zu zählen. Deswegen messen wir 5 Perioden, aber 2 mal.

*2) Pendel mit der Hand festgehalten, da x_2 über dem Gestell ist. (Bei Kopplungsschwingung)

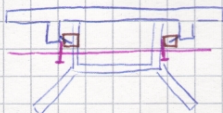
Abb. 19: Laborbuch, Seite 2

Anzahl Perioden von T_-		Anzahl Perioden von T_+	
1	$\frac{1}{4}$		
5	$\frac{1}{4}$		
4	$\frac{1}{2}$		
1	1		
8	1	5	
5	1	4	
7	2	3	
1	2	2	
8	2	3	
8	1	3	
6	1	5	
3	1	5	
3	$\frac{1}{2}$	10	

genaue Beschreibung der Messungen:

- gleichphasige Schwingung:

Ansicht von oben:



- / Gestell
- / Massen
- / Auslösevorrichtung

- gleichphasige Schwingung:

- Auslösevorrichtung in Abstand von x_1 und x_2
- einige Zentimeter nach rechts verschieben
- Schraube lösen \rightarrow Pendel starten

- gegenphasige Schwingung:

- Auslösevorrichtung links und rechts in gleichem Abstand von x_1 und x_2
- siehe oben

- Kopplungsschwingung:

- Auslösevorrichtung links an x_2 und rechts um einige Zentimeter ausgelenkt
- siehe oben

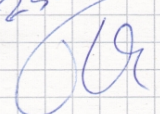
23.05.21


Abb. 20: Laborbuch, Seite 3

Tabellenverzeichnis

1	Bestimmung der Federkonstanten	17
2	Tabelle mit allen Messwerten	17
3	Auslenkungswinkel in Abhängigkeit von der Kopplungshöhe	18
4	Zusammenstellung aller aus den Messwerten berechneten Frequenzen	18
5	Zusammenstellung der aus den Messwerten und aus der Formel berechneten Frequenzen ω_+	19
6	Zusammenstellung der aus den Messwerten und aus der Formel berechneten Frequenzen ω_-	19

Abbildungsverzeichnis

1	Versuchsaufbau	2
2	Auslösevorrichtung	3
3	Auslenkungswinkel φ_{01} und φ_{02} in der Ruhelage	4
4	betragsmäßige Auslenkungswinkel φ_{01} und φ_{02} in der Ruhelage	5
5	Mittelwert der Kreisfrequenzen der gleichsinnigen Schwingungen	6
6	Mittelwert der Kreisfrequenzen der gleichsinnigen Schwingungen und der berechnete Wert der Kreisfrequenz	7
7	Kreisfrequenz der gegensinnigen Schwingungen bei variabler Kopplungshöhe ρ	8
8	Quadrierte Kreisfrequenz der gegensinnigen Schwingungen bei quadrierter Kopplungshöhe ρ^2 mit linearer Regression	9
9	Vergleich der Kreisfrequenzen der gleich- und gegensinnigen Schwingungen mit Mittelwert der Kreisfrequenz der gleichsinnigen Schwingungen	10
10	Kreisfrequenz der Kopplungsschwingung mit berechneter Kreisfrequenz	11
11	Schwebungsfrequenz der Kopplungsschwingung mit berechneter Schwebungsfrequenz	12
12	Kreisfrequenz der gleichsinnigen Schwingungen bei variabler Kopplungshöhe ρ	20
13	Quadrierte Kreisfrequenz der gegensinnigen Schwingungen bei quadrierter Kopplungshöhe ρ^2	20
14	Vergleich der Kreisfrequenzen der gleich- und gegensinnigen Schwingungen	21
15	Mittelwert der Kreisfrequenzen der gleichsinnigen Schwingungen	21
16	Kreisfrequenz der Kopplungsschwingung	22
17	Schwebungsfrequenz der Kopplungsschwingung	22
18	Laborbuch, Seite 1	23
19	Laborbuch, Seite 2	24
20	Laborbuch, Seite 3	25