

In Tabelle 1 ist ein Überblick der in diesem Protokoll benutzten Symbole aufgelistet.

| Größensymbol | Bedeutung |
|--------------|---|
| φ_i | Winkelauslenkung von Pendel i |
| L | Position der Masse an den Pendeln |
| ℓ | Position der Feder an den Pendeln |
| D | Federkonstante |
| g | Erdbeschleunigung |
| m | Masse |
| M | Drehmoment |
| F | Kraft |
| ψ_0 | Auslenkung der Pendel bei entspannter Feder |
| ω | Kreisfrequenz |
| T | Periodendauer |
| u_x | Unsicherheit der Größe x |

Tabelle 1: Symbole, die in diesem Versuchsprotokoll verwendet werden.

1 Ziel des Versuchs

Im Zentrum dieses Versuchs standen zwei mathematische Pendel, die über eine Feder miteinander verbunden (gekoppelt) waren. Die Eigenfrequenzen der nicht-trivialen Lösung der analytischen Bewegungsgleichungen sollen experimentell unter Messung der Periodendauer dreier Spezialfälle der Schwingungen des Systems bestimmt werden. ✓ "Schwedisg"

2 Theorie

Wir betrachten zwei mathematische Pendel mit Masse m und Länge L , die mit einer Feder mit Richtkonstante D an der Federhöhe ℓ verbunden sind (siehe Abb. 1). Die Federauslenkung des Pendels i heißt φ_i . Ist die Feder entspannt, so ist zwar die Federauslenkung $\varphi_i = 0$, bei hohen Federgewichten befindet sich Pendel i immer noch um $(-1)^{i+1}\psi_0$ vom Lot verschoben. Wir betrachten im Folgenden eine Feder mit geringem Gewicht, d.h. $\psi_0 = 0$. ✓

Auf beide Pendel wirkt die Schwerkraft $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$, die ein Rückstellmoment \mathbf{M}_G erzeugt. Da die Kraft am Hebelarm \mathbf{L} ansetzt, können wir dieses betragsweise mit $\mathbf{M}_G = \mathbf{L} \times \mathbf{F}_G$ in Abhängigkeit vom Winkel φ_i schreiben:

$$M_{G,i} = -mgL \sin \varphi_i \quad (1)$$

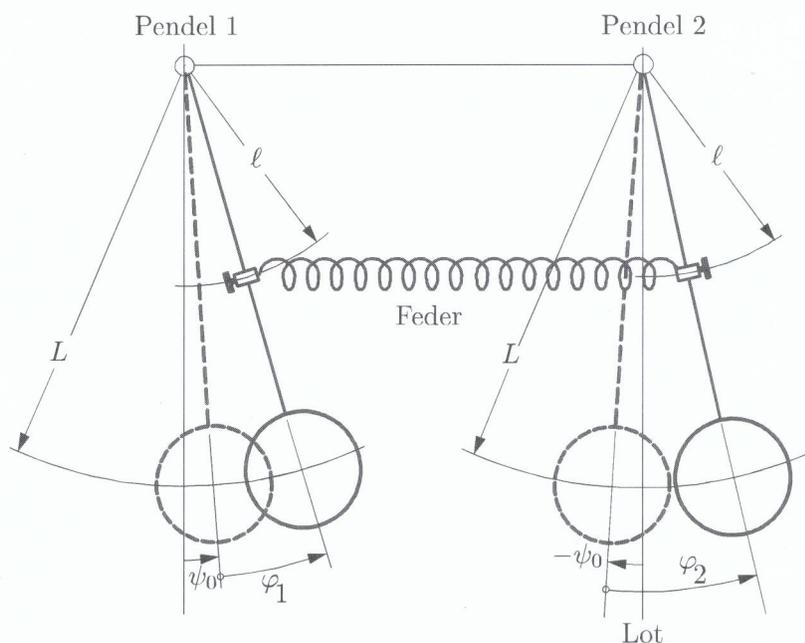


Abbildung 1: Zwei gekoppelte Pendel [1]

Betrachten wir nun eine geringe Auslenkungsdifferenz beider Pendel, $\varphi_2 - \varphi_1 \neq 0$. Die Feder ist somit per definitionem nicht entspannt, sondern um die Gesamtlänge x aus der Ruhelage ausgelenkt. Diese Länge kann in zwei Beiträge aufgeteilt werden, die jeweils von den Pendelauslenkungen φ_i erzeugt werden. Aus geometrischen Gründen können wir mithilfe von Abb. 1 die Auslenkung der Feder x in Abhängigkeit von beiden Winkeln schreiben:

$$x = \ell \sin \varphi_2 - \ell \sin \varphi_1 \quad (2)$$

Für ein positives x ist die Rückstellkraft der Feder $F_{D,i}$ in negative Auslenkungsrichtung für Pendel 2 und positive Auslenkungsrichtung für Pendel 1. Damit ergibt sich

$$F_{D,i} = (-1)^{i+1} D \cdot x \quad (3)$$

für Pendel i mit Federkonstante D der Feder. Da die Kraft am Hebelarm der Länge ℓ wirkt, ergibt sich für den Betrag des Drehmoments, dass durch die Feder entsteht:

$$\begin{aligned} M_{D,i} &= (-1)^{i+1} \ell D \cdot x \\ &= (-1)^{i+1} \ell^2 D (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \end{aligned} \quad (4)$$

Nun sind für Pendel i beide Drehmomente zu addieren, um das Gesamtdrehmoment M zu erhalten. Gleichzeitig gehen wir allgemein von kleinen

Winkeln aus, sodass wir für $\sin \varphi_i \approx \varphi_i$ in erster Näherung ausgehen können:

$$M_i = -mgL\varphi_i + (-1)^{i+1}\ell^2 D(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (5)$$

Das Drehmoment eines starren Körpers mit Trägheitsmoment I um die Rotationsachse können wir durch $M_i = I\ddot{\varphi}_i$ ausdrücken. Da wir von mathematischen Pendeln ausgehen, ist das Trägheitsmoment das einer Punktmasse im Abstand L , d.h. $I = mL^2$. Für Gleichung (5) folgt damit:

$$mL^2\ddot{\varphi}_i = -mgL\varphi_i + (-1)^{i+1}\ell^2 D(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (6)$$

Division durch mL^2 führt uns zu den Bewegungsgleichungen der Pendel:

$$\ddot{\varphi}_1 = -\frac{g}{L}\varphi_1 + \frac{\ell^2 D}{mL^2}(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (7a)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -\frac{g}{L}\varphi_2 - \frac{\ell^2 D}{mL^2}(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (7b)$$

Die Lösung dieser Bewegungsgleichungen ist nicht trivial, da beide Terme den jeweils anderen enthalten. Im Allgemeinen löst man diese Art von Gleichungen mit Betrachtung und Lösung eines Eigenwertproblems, um neue Koordinaten zu finden, die dann entkoppelt sind. Da das Problem hier allerdings noch überschaubar ist, führen wir die Koordinaten $\phi_A = \varphi_1 + \varphi_2$ und $\phi_B = \varphi_1 - \varphi_2$ ein. Dann addieren, bzw. subtrahieren wir Gleichungen (7a) und (7b) miteinander, um auf die Koordinaten zu kommen: ✓

$$(7a) + (7b) = -\frac{g}{L}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{\ell^2 D}{mL^2}(\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_1) \quad (8a)$$

$$\ddot{\phi}_1 = -\frac{g}{L}\phi_A$$

$$(7a) - (7b) = -\frac{g}{L}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{\ell^2 D}{mL^2}(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_1) \quad (8b)$$

$$\ddot{\phi}_2 = -\frac{g}{L}\phi_B + \frac{2\ell^2 D}{mL^2}\phi_B$$

Die Bewegungsgleichungen sind nun entkoppelt und haben – in Termen von ϕ_i – die Form $\ddot{\phi}_i = -\omega_i^2\phi_i$, die durch einen Exponential-, bzw. trigonometrischen Ansatz der Form

$$\begin{aligned} \phi_A &= A_1 \cos(\omega_A t) + A_2 \sin(\omega_A t) \\ \phi_B &= B_1 \cos(\omega_B t) + B_2 \sin(\omega_B t) \end{aligned} \quad (9)$$

lösbar sind. Die Eigenfrequenzen ω_i lauten

$$\begin{aligned} \omega_A &= \sqrt{\frac{g}{L}} \\ \omega_B &= \sqrt{\frac{g}{L} - \frac{2\ell^2 D}{mL^2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Dass ω_B kleiner ist als ω_A , ϕ_B also eine längere Periodendauer hat als ϕ_A , sieht man nicht nur an obigen Gleichungen, sondern es steht auch ein physikalischer Grund dahinter: ϕ_A beschreibt als Summe beider Auslenkungen etwas ähnliches wie eine Schwerpunktbewegung, ohne Einflüsse der Feder (bei einem N -Teilchensystem haben innere Kräfte auch keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunkts), wohingegen ϕ_B die Differenz beider Auslenkungen beschreibt, die hauptsächlich durch die Feder bestimmt wird. Diese gleicht Ungleichheiten im Abstand beider Pendel aus und ist damit „langsamer“ als die Bewegung beider Pendel zusammen.

Aus Gleichung (9) und der Definition beider Koordinaten ϕ_i ergibt sich für die Auslenkungen φ_i in Abhängigkeit von der Eigenfrequenz:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{1}{2}(\phi_A + \phi_B) \\ &= \frac{1}{2}[A_1 \cos(\omega_A t) + A_2 \sin(\omega_A t) + B_1 \cos(\omega_A t) + B_2 \sin(\omega_B t)] \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}(\phi_A - \phi_B) \\ &= \frac{1}{2}[A_1 \cos(\omega_A t) + A_2 \sin(\omega_A t) - B_1 \cos(\omega_A t) - B_2 \sin(\omega_B t)]\end{aligned}\quad (11)$$

Mit den Eigenfrequenzen ω_i lässt sich auch der sogenannte Kopplungsgrad definieren, der ein Maß für die Kopplung zwischen beiden Pendeln ist:

$$K = \frac{\omega_A^2 - \omega_B^2}{\omega_A^2 + \omega_B^2} = \frac{T_B^2 - T_A^2}{T_B^2 + T_A^2}\quad (12)$$

Setzen wir hier unsere Eigenfrequenzen aus Gleichung (10) ein und vereinfachen, so können wir K in Abhängigkeit unserer Versuchsparameter schreiben:

$$K = \frac{\ell^2 D}{mLg - \ell^2 D}\quad (13) \quad \checkmark$$

Insbesondere den Zusammenhang zwischen K und ℓ wollen wir in der Auswertung näher diskutieren.

Im Folgenden betrachten wir drei Spezialfälle der Bewegungsgleichungen, die wir dann auch experimentell untersuchen werden.

2.1 Gleichsinnige Schwingung

Sind die Auslenkungen φ_i anfangs gleichgroß und gleichgerichtet, d.h. $\varphi_1(0\text{ s}) = \varphi_2(0\text{ s}) =: \varphi_0$, sowie die Geschwindigkeiten anfangs null, d.h. $\dot{\varphi}_1(0\text{ s}) = \dot{\varphi}_2(0\text{ s}) = 0$, spricht man von gleichsinnigen Schwingungen. Wegen $\cos(0\text{ s}) = 1$ folgt sofort aus den Anfangsbedingungen:

$$A_1 = \varphi_0 - B_1, \quad A_1 = \varphi_0 + B_1, \quad A_2 = -B_2, \quad A_2 = B_2\quad (14)$$

Damit gilt:

$$\varphi_A(t) = \varphi_B(t) = \varphi_0 \cos(\omega_B t) \quad (15)$$

Bei der Betrachtung einer gleichsinnigen Schwingung misst man also nur die Periodendauer $T_B = \frac{2\pi}{\omega_B}$ von ϕ_B .

2.2 Gegensinnige Schwingung

Sind die Auslenkungen φ_i anfangs gleichgroß und entgegengerichtet, d.h. $\varphi_1(0\text{s}) = -\varphi_2(0\text{s}) =: \varphi_0$, sowie die Geschwindigkeiten anfangs null, d.h. $\dot{\varphi}_1(0\text{s}) = \dot{\varphi}_2(0\text{s})$, spricht man von gegensinnigen Schwingungen. Analog zu Abschnitt 2.1 folgt aus den Anfangsbedingungen:

$$A_1 = \varphi_0 - B_1, \quad A_1 = -\varphi_0 + B_1, \quad A_2 = -B_2, \quad A_2 = B_2 \quad (16)$$

Daraus folgt:

$$\varphi_A(t) = -\varphi_B(t) = \varphi_0 \cos(\omega_A t) \quad (17)$$

Bei der Messung der Periodendauer einer gegensinnigen Schwingung misst man also ausschließlich $T_A = \frac{2\pi}{\omega_A}$.

2.3 Schwebung

Ist der Kopplungsgrad K sehr klein und ein Pendel anfangs ausgelenkt, das andere nicht, kommt es zur sogenannten Schwebung, bei der die Pendel ständig kinetische Energie miteinander austauschen. Man unterscheidet dann zwischen der Schwebungsfrequenz $\omega_S = \frac{1}{2}(\omega_A - \omega_B)$, die die Frequenz des Systems angibt, und die Frequenz der Einhüllenden $\omega = \frac{1}{2}(\omega_A + \omega_B)$, die die Amplitude der Frequenzmaxima angibt.

3 Durchführung

Wir gehen also vom Aufbau in Abbildung 1 aus, wobei das Gewicht der Feder auch hier derart gering ist, dass das Lot mit der Entspannungslage der Feder $\psi_0 = 0$ übereinstimmt. Weiterhin benutzen wir ein Gestell (nicht in der Abbildung), das es uns ermöglicht, die Anfangsbedingungen präzise zu justieren. Auch muss die Schwingungsebene senkrecht durch Justierung der Standbeine des Gestells ausgerichtet werden. Zunächst musste aber überprüft werden, ob beide Pendel denn unabhängig voneinander gleichartig schwingen. Wäre dies nicht der Fall gewesen, müsste evtl. die Position des Gewichtes an einem Pendel justiert werden. Nun kann die eigentliche Messung beginnen: Zuerst messen wir mit einer handbetätigten Stoppuhr die Periodendauer bei der gleichsinnigen Schwingung, die unabhängig von der Position ℓ der Feder an den Pendeln ist, weswegen wir nur einen Messdurchgang für die Größe T_B machen müssen. Ein Messdurchgang besteht aus fünf Zeitmessungen von zwanzig Perioden und beinhaltet, dass

beide Pendel in die gleiche Richtung und um den gleichen Betrag aus der Ruhelage ausgelenkt und losgelassen wurden.

Nach dieser Messung haben wir für vier¹ verschiedene ℓ 's, die wir mit einem Maßband vermaßen, je einen Messdurchgang für gegensinnige Schwingungen und Schwebungen gemacht. Bei der Messung gegensinniger Schwingungen lenkten wir beide Pendel in verschiedene Richtungen, aber um gleiche Beträge aus der Ruhelage aus und maßen fünfmal die Zeit für zwanzig Perioden. Bei der Schwebungsmessung war nur ein Pendel auszulenken (das andere Pendel befand sich dann in Ruhe). Dies resultierte in einer Anregung des zweiten Pendels, bis das erste Pendel ruhte, um dann wieder vom zweiten Pendel angeregt zu werden. Wir maßen dabei die Zeit einer Schwebungsperiode, d.h. die Zeit, die das anfänglich ruhende und dann angeregte Pendel braucht, um zum zweiten Mal in die Ruhelage zurückzukehren.

4 Messungen

4.1 Justierung

Zuerst wurden die Periodendauern der unverbundenen Pendel miteinander verglichen. Dafür maßen wir pro Pendel 20 Schwingungen und kamen auf $T_R = 37,49\text{s}$ für das rechte und $T_L = 37,31\text{s}$ für das linke Pendel. Da uns die Zeitdifferenzen als insignifikant erschienen, führten wir keine weiteren Justierungen durch. Die Unsicherheiten in jeder Zeitmessung schätzten wir auf $u_T = 0,1\text{s}$, die auf Reaktionszeiten von uns und Stoppuhr-interne Verzögerungen rückführbar sind.

4.2 Gleichsinnige Schwingung

Für die gleichsinnige Schwingung befestigten wir die Feder wieder an beiden Pendeln, sodass wir sofort sahen, falls beide Pendel nicht die gleiche Auslenkung teilten. Die Messdaten für fünf mal $n = 20$ Periodendurchläufe sind in Tabelle 2 gegeben. Da beide Praktikanten die Durchläufe zählten, ist die Unsicherheit der Durchläufe $u_n = 0$.

4.3 Gegensinnige Schwingung

Die Messreihen, die wir für die gegensinnige Schwingung durchführten, ähnelten der der gleichsinnigen Schwingungen stark: Zuerst waren die Pendel um den gleichen Betrag, aber in unterschiedliche Richtungen auszulenken. Danach wurden pro Federhöhe ℓ_i fünfmal zwanzig Periodendurchgänge ge-

¹Zwar waren in der Anleitung die Messungen für nur zwei verschiedene Pendelhöhen durchzuführen; dies ist allerdings keine gute Basis für die spätere Untersuchung auf Linearität. ✓

| Messung | $20 T_B/s$ |
|---------|------------|
| 1 | 37,36 |
| 2 | 37,27 |
| 3 | 37,36 |
| 4 | 37,35 |
| 5 | 37,33 |

Tabelle 2: Messdaten der gleichsinnigen Schwingung

messen. Die benutzten Federhöhen sowie die Zeitmessungen sind in Tabelle 3 zu finden.

| Messung | $\ell_1 = 57,6 \text{ cm}$ | $\ell_2 = 41,4 \text{ cm}$ | $\ell_3 = 86,4 \text{ cm}$ | $\ell_4 = 76,6 \text{ cm}$ |
|---------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| | $20 T_A/s$ | $20 T_A/s$ | $20 T_A/s$ | $20 T_A/s$ |
| 1 | 32,82 | 34,48 | 27,21* | 30,07 |
| 2 | 32,68 | 34,52 | 28,66 | 39,97 |
| 3 | 32,80 | 34,53 | 28,65 | 30,02 |
| 4 | 32,60 | 34,50 | 28,65 | 30,05 |
| 5 | 32,71 | 34,57 | 28,70 | 30,01 |

Tabelle 3: Messdaten der gegensinnigen Schwingung

*Bei der Betrachtung der Messdaten sei angemerkt, dass der Wert für ℓ_3 , $19 T_A^{(1)} = 27,21 \text{ s}$ die Zeit für $n = 19$ Periodendauern beschreibt. ✓

4.4 Schwebung

Zwischen jeder Messreihe gleichsinniger Schwingungen wurden zusätzlich (bei gleichem ℓ_i) fünf Schwebungsmessungen durchgeführt: Dafür wurde eins der Pendel ausgelenkt und die Zeit für eine Schwebungsperiode gemessen. Diese erkennt man daran, dass das anfangs ruhende Pendel zum zweiten Mal in die Ruhelage zurückkehrt. Die Messdaten sind in Tabelle 4 gegeben.

| Messung | $\ell_1 = 57,6 \text{ cm}$ | $\ell_2 = 41,4 \text{ cm}$ | $\ell_3 = 86,4 \text{ cm}$ | $\ell_4 = 76,6 \text{ cm}$ |
|---------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| | T/s | T/s | T/s | T/s |
| 1 | 27,08 | 47,41 | 12,23 | 15,46 |
| 2 | 26,87 | 46,91 | 12,05 | 15,76 |
| 3 | 26,91 | 47,16 | 12,74 | 15,26 |
| 4 | 26,75 | 46,86 | 11,59 | 15,18 |
| 5 | 26,92 | 47,38 | 12,18 | 15,43 |

Tabelle 4: Messdaten der Schwebungen

5 Auswertung

5.1 Gleichsinnige Schwingung

Wir starten mit der Berechnung von T_B aus der ersten Messreihe, in der wir die gleichsinnige Schwingung betrachtet haben. Dafür bestimmen wir für jeden einzelnen Messwert aus Tabelle 2 die Periodendauer, indem wir den Wert durch 20 teilen. Die Unsicherheit von u_T dividieren wir nach dem vereinfachten Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz ebenfalls ~~mit~~ durch 20 und erhalten:

$$\begin{aligned} T_B^{(1)} &= (1,87 \pm 0,01) \text{ s} \\ T_B^{(2)} &= (1,86 \pm 0,01) \text{ s} \\ T_B^{(3)} &= (1,87 \pm 0,01) \text{ s} \\ T_B^{(4)} &= (1,87 \pm 0,01) \text{ s} \\ T_B^{(5)} &= (1,87 \pm 0,01) \text{ s} \end{aligned} \quad (18)$$

Die Bildung des Mittelwerts ergibt:

$$T_B = \overline{T_B^{(i)}} = 1,87 \text{ s} \quad (19)$$

Da die Streuung dieser Messwerte nicht sonderlich hoch ausfällt, ist die Standardabweichung des Mittelwerts kein sinnvolles Maß für die Bestimmung der Unsicherheit des Mittelwerts. Stattdessen berechnen wir letztere auch über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned} u_{T_B} &= \sqrt{\sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{5} u_{T_B^{(i)}} \right)^2} \\ &= 2,23 \cdot 10^{-3} \text{ s} \end{aligned} \quad (20)$$

Für den Bestwert der Kreisfrequenz ω_A ergibt sich:

$$\omega_B = \frac{2\pi}{T_B} = 3,37 \frac{1}{\text{s}} \quad (21)$$

Die Unsicherheit dieser Größe berechnet sich durch das vereinfachte Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\begin{aligned} u_{\omega_B} &= \omega_A \sqrt{\left(\frac{u_{T_B}}{T_B} \right)^2} \\ &= 8,06 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{s}} \end{aligned} \quad (22)$$

Aus dieser Messreihe erhalten wir also:

$$\boxed{\omega_B = (3,36 \pm 0,01) \frac{1}{\text{s}}} \quad (23)$$

5.2 Gegensinnige Schwingung

Nun sind vier verschiedene Werte für ω_A zu berechnen. Dafür gehen wir analog zu Abschnitt 5.1 vor: Zuerst sind die Werte aus Tabelle 3 durch die Anzahl an Perioden zu dividieren und dann den Mittelwert zu bilden. Die Periodendauern sind in Tabelle 5 abgebildet.

| | $\ell_1 = 57,6 \text{ cm}$ | $\ell_2 = 41,4 \text{ cm}$ | $\ell_3 = 86,4 \text{ cm}$ | $\ell_4 = 76,6 \text{ cm}$ |
|------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| Messung | T_A/s | T_A/s | T_A/s | T_A/s |
| 1 | 1,64 | 1,72 | 1,43 | 1,50 |
| 2 | 1,63 | 1,73 | 1,43 | 1,50 |
| 3 | 1,64 | 1,73 | 1,43 | 1,50 |
| 4 | 1,63 | 1,73 | 1,43 | 1,50 |
| 5 | 1,64 | 1,72 | 1,44 | 1,50 |
| $\overline{T_A^{(i)}}$ | 1,64 | 1,73 | 1,43 | 1,50 |

Tabelle 5: Periodendauern bei gegensinnigen Schwingungen. Die Unsicherheiten der Einzelwerte sind $u_{T_A^{(i)}} = 0,01 \text{ s}$, die des Mittelwerts betragen $u_{T_A} = 4,47 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

Die Unsicherheiten der Mittelwerte wurden dabei analog zu Abschnitt 5.1 berechnet. Nun lassen sich zu den vier gemittelten Periodendauern vier Kreisfrequenzen $\omega_A^{(\ell_i)}$ über Gleichung (21) berechnen. Die Unsicherheiten folgen analog zu Gleichung (22):

$$\begin{aligned}
 \omega_A^{(\ell_1)} &= (3,84 \pm 0,01) \frac{1}{\text{s}} \\
 \omega_A^{(\ell_2)} &= (3,64 \pm 0,01) \frac{1}{\text{s}} \\
 \omega_A^{(\ell_3)} &= (4,38 \pm 0,02) \frac{1}{\text{s}} \\
 \omega_A^{(\ell_4)} &= (4,19 \pm 0,01) \frac{1}{\text{s}}
 \end{aligned} \tag{24}$$

5.3 Untersuchung der Kopplungsgrade

Nun sind alle Größen gefunden, um die vier Kopplungsgrade zu berechnen. Wir benutzen Gleichung (12), um diese für jedes ℓ_i auszurechnen. Mit den Mittelwerten aus Tabelle 5 und Gleichung (19) ergeben sich für die Kopp-

lungsgrade folgende Bestwerte:

$$\begin{aligned} K^{(\ell_1)} &= 1,31 \cdot 10^{-1} \\ K^{(\ell_2)} &= 7,82 \cdot 10^{-2} \\ K^{(\ell_3)} &= 2,58 \cdot 10^{-1} \\ K^{(\ell_4)} &= 2,14 \cdot 10^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

Nun sind noch die Unsicherheiten zu berechnen. Dafür bilden wir die partiellen Ableitungen, um die Unsicherheit über das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz zu ermitteln:

$$\frac{\partial K}{\partial T_A} = -\frac{4T_A T_B^2}{(T_B^2 + T_A^2)^2} \quad \frac{\partial K}{\partial T_B} = \frac{4T_A^2 T_B}{(T_B^2 + T_A^2)^2} \quad (26)$$

Damit gilt:

$$u_{K^{(\ell_i)}} = \sqrt{\left(\frac{\partial K^{(\ell_i)}}{\partial T_B} \cdot u_{T_B}\right)^2 + \left(\frac{\partial K^{(\ell_i)}}{\partial T_A} \cdot u_{T_A}\right)^2} \quad (27)$$

Die Unsicherheiten aller Kopplungsgrade sind mit dieser Formel zu berechnen. Das Endergebnis lautet:

$$\begin{aligned} K^{(\ell_1)} &= (1,31 \pm 0,04) \cdot 10^{-1} \\ K^{(\ell_2)} &= (7,82 \pm 0,30) \cdot 10^{-2} \\ K^{(\ell_3)} &= (2,58 \pm 0,03) \cdot 10^{-1} \\ K^{(\ell_4)} &= (2,14 \pm 0,04) \cdot 10^{-1} \end{aligned} \quad (28)$$

Nun soll ein Zusammenhang zwischen Kopplungsgraden und den quadratischen Pendelhöhen ℓ_i^2 untersucht werden. Dafür bilden wir Wertepaare der Form $(\ell_i^2, K^{(\ell_i)})$, die wir in ein Diagramm eintragen. Dieses ist in Abb. 2 zu sehen. Mit dem Python-Programm im Anhang (Abb. 3) führten wir eine lineare Regression durch. Die Ausgleichsgerade hat die Form

$$K(\ell^2) = 0,3158 \frac{1}{\text{m}^2} \ell^2 + 0,0256. \quad (29)$$

Der Fehler der Steigung beträgt $u_a = 0,00807 \frac{1}{\text{m}^2}$, der des K -Achsen-Abschnitts beträgt $u_b = 0,00406$. Blickt man auch auf die Datenpunkte im Diagramm, sieht man, dass die Ausgleichsgerade in etwa innerhalb der Fehlerbalken aller Datenpunkte verläuft. Es ist also ein linearer Zusammenhang mit $K \propto \ell^2$ festzuhalten.

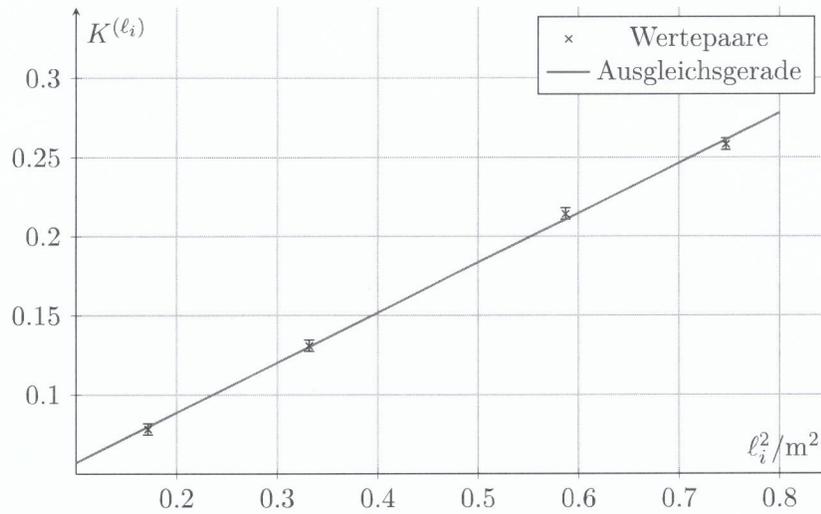


Abbildung 2: Kopplungsgrade in Abhängigkeit quadratischer Pendelhöhen

5.4 Schwebung

Nun ist die in Abschnitt 2.3 vorgegebene Gleichung für die Kreisfrequenz der Einhüllenden mit den von uns gemessenen zu Werten untersuchen. Dafür sind zuerst die Mittelwerte der Messdaten aus Tabelle 4 mitsamt Unsicherheiten zu bilden. Es folgt:

$$\begin{aligned}
 \overline{T^{(\ell_1)}} &= (26,91 \pm 0,04) \text{ s} \\
 \overline{T^{(\ell_2)}} &= (47,15 \pm 0,04) \text{ s} \\
 \overline{T^{(\ell_3)}} &= (12,16 \pm 0,04) \text{ s} \\
 \overline{T^{(\ell_4)}} &= (15,38 \pm 0,04) \text{ s}
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Die Fehlerrechnung erfolgte dabei analog zu oben mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung. Nun sind die Periodendauern der Einhüllenden aus den Werten der gleich-/gegenseitigen Schwingungen zu berechnen. Dafür ist die Formel in Abschnitt 2.3 für Periodendauern umzuformen:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}} = 2 \frac{T_A T_B}{T_A - T_B}
 \tag{31}$$

Um die Unsicherheit der so errechneten Periodendauer zu bestimmen, müssen die partiellen Ableitungen berechnet werden:

$$\frac{\partial T}{\partial T_A} = -\frac{2T_B^2}{(T_A - T_B)^2} \quad \frac{\partial T}{\partial T_B} = \frac{2T_A^2}{(T_A - T_B)^2}
 \tag{32}$$

Daraus sind die Unsicherheiten der Periodendauern folgendermaßen zu bestimmen:

$$u_T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial T_A} \cdot u_{T_A}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial T_B} \cdot u_{T_B}\right)^2} \quad (33)$$

Mit unseren Periodendauern T_B aus Abschnitt 5.1 und T_A aus Abschnitt 5.2 können wir nun die Periodendauern der Einhüllenden T berechnen. Die Ergebnisse sind mit Unsicherheit, die mit dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsverfahren wie oben berechnet wurden, in Tabelle 6 vermerkt.

| ℓ | T/s gemessen | T/s berechnet |
|----------|------------------|------------------|
| ℓ_1 | $26,91 \pm 0,04$ | $26,49 \pm 0,74$ |
| ℓ_2 | $47,15 \pm 0,04$ | $45,80 \pm 2,07$ |
| ℓ_3 | $12,16 \pm 0,04$ | $12,34 \pm 0,19$ |
| ℓ_4 | $15,38 \pm 0,04$ | $15,33 \pm 0,28$ |

Tabelle 6: Vergleich zwischen gemessenen und berechneten Periodendauern der Einhüllenden.

Vergleicht man gemessene und berechnete Werte miteinander, stellt man eine gute Übereinstimmung fest: Alle gemessenen Werte befinden sich im 1σ -Unsicherheitsbereich der berechneten Werte.

\rightarrow ~~diskutieren~~
diskutieren

6 Diskussion

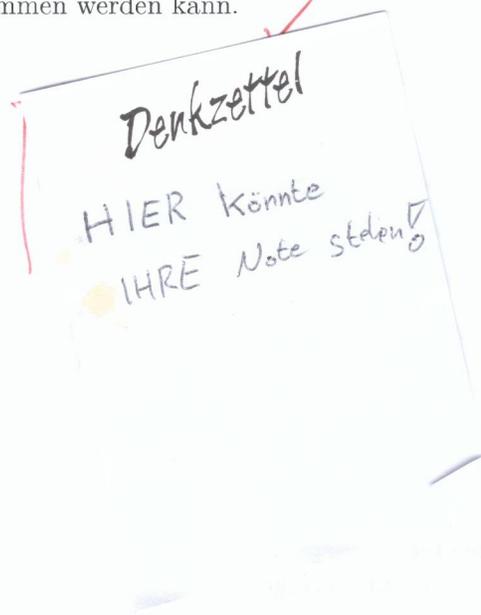
Der Vergleich von theoretischen Berechnungen und praktischen Messungen im letzten Abschnitt zeigt eine geringe Abweichung von Theorie und Praxis: Die beobachteten Werte passen sehr gut (d.h. innerhalb 1σ) zu den vorausgesagten Periodendauern. Da die Differenzen von berechneten und gemessenen Werten teilweise andere Vorzeichen aufweisen, ist dort kein systematischer Fehler beobachtbar. \checkmark Trotzdem ist die von uns durchgeführte Fehlerrechnung nicht unkritisch zu betrachten: Zum einen wurde die statistische Unsicherheit der Zeit unterschätzt – vor dem Versuch nahmen wir an, dass diese nur von der menschlichen Reaktionszeit abhing. Zum anderen war, wie sich aber besonders bei der Messung der Schwebungs-Schwingung herausstellte, es oft nicht klar, wann denn das betrachtete Pendel in Ruhe ist, was eine präzise Zeitmessung erschwerte. \checkmark

wie kommt ihr darauf?

Interessant hingegen sind unsere Ergebnisse in Abschnitt 5.3: Zwischen K und ℓ^2 ist ein annähernd linearer Verlauf feststellbar. Diese Erkenntnis ist insofern unerwartet, dass Gleichung (13) keinen linearen Zusammenhang vorhersagt, im Gegenteil. Formt man die Gleichung um, indem man zum Zähler $0 = -mLg + mLg$ addiert, erhält man:

$$K = -1 + \frac{gLm}{D\ell^2 - gLM} \quad (34)$$

Der lineare Zusammenhang passt damit nicht in unser Modell, dass einen nicht-linearen Verlauf nahelegt. Entweder ist bei der Aufstellung des Modells ein (grober) Fehler unterlaufen oder es wird nur ein sehr kleiner Abschnitt des Verlaufs, der als annähernd linear angesehen werden kann, betrachtet. Da zu wenige Messdaten vorliegen, um die Masse m oder die Federkonstante D näher zu bestimmen um beide Zusammenhänge (linear und Modell) zu vergleichen, bleibt diese Frage offen. Da das Modell oft genug von uns überprüft wurde, halten wir es für wahrscheinlicher, dass nur ein kurzer Kurvenabschnitt betrachtet wird, bei welchem ein annähernd linearer Verlauf angenommen werden kann.



I Anhang

```

from math import sqrt

data = [(0.331776, 0.131098),
        (0.171396, 0.0782055),
        (0.746496, 0.258395),
        (0.586756, 0.214523)]

error = [0.00357224, 0.00350731, 0.00367163, 0.00364693]
ul = [1 / e ** 2 for e in error]

def b(d):
    ylist = [pair[1] for pair in d]
    xlist = [pair[0] for pair in d]
    return (sum([u * x ** 2 for u, x in zip(ul, xlist)] * sum([u * y for u, y in zip(ul, ylist)])) - sum(
        [u * x for u, x in zip(ul, xlist)] * sum([u * x * y for u, x, y in zip(ul, xlist, ylist)])) / (
        sum(ul) * sum([u * x ** 2 for u, x in zip(ul, xlist)])) - (sum([u * x for u, x in zip(ul, xlist)])) ** 2)

def a(d):
    ylist = [pair[1] for pair in d]
    xlist = [pair[0] for pair in d]
    return (sum(ul) * sum([u * x * y for u, x, y in zip(ul, xlist, ylist)])) - sum(
        [u * x for u, x in zip(ul, xlist)] * sum([u * y for u, y in zip(ul, ylist)])) / (
        sum(ul) * sum([u * x ** 2 for u, x in zip(ul, xlist)])) - (sum([u * x for u, x in zip(ul, xlist)])) ** 2)

def ub(d):
    xlist = [pair[0] for pair in d]
    return sqrt((sum([u * x ** 2 for u, x in zip(ul, xlist)])) / (
        sum(ul) * sum([u * x ** 2 for u, x in zip(ul, xlist)])) - (sum([u * x for u, x in zip(ul, xlist)])) ** 2))

def ua(d):
    xlist = [pair[0] for pair in d]
    return sqrt((sum(ul)) / (
        sum(ul) * sum([u * x ** 2 for u, x in zip(ul, xlist)])) - (sum([u * x for u, x in zip(ul, xlist)])) ** 2))

print(a(data), b(data))
print(ua(data), ub(data))

```

Abbildung 3: Python-Code zur linearen Regression.

$$L_h = 93,0 \text{ cm} \quad u_L = 1,5 \text{ mm}$$

L_L

Richtung der Pendel:

$$T_{20}^R = 37,95 \text{ s}$$

$$u_T = 0,1 \text{ s (Reaktionszeit)}$$

$$T_{50}^L = 37,31 \text{ s}$$

Passiv

$$L_1^R = 57,6 \text{ cm}$$

$$u_B = 1 \text{ cm} \quad \text{C Messband}$$

$$L_1^L = 57,6 \text{ cm}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{2\pi}{T_1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{T_0} + \frac{1}{T_1}}$$

~~Stichtzeit~~

Wendepunkt (20):

| | | | |
|-------------|-----------|-----------------|-----------------------|
| $T_B^{(1)}$ | = 37,36 s | (20 Durchläufe) | $u_T = 0,1 \text{ s}$ |
| $T_B^{(2)}$ | = 37,27 s | $n = 20$ | $u_n = 0$ |
| $T_B^{(3)}$ | = 37,36 s | | |
| $T_B^{(4)}$ | = 37,35 s | | |
| $T_B^{(5)}$ | = 37,33 s | | |

Umkehrpunkt (20):

| | | |
|-------------|-----------|-----------------|
| $T_A^{(1)}$ | = 32,82 s | (20 Durchläufe) |
| $T_A^{(2)}$ | = 32,68 s | $n = 20$ |
| $T_A^{(3)}$ | = 32,80 s | |
| $T_A^{(4)}$ | = 32,60 s | |
| $T_A^{(5)}$ | = 32,71 s | |

Schwebung:

| | | |
|-----------|-----------|-------------|
| $T^{(1)}$ | = 27,08 s | (1 Periode) |
| $T^{(2)}$ | = 26,87 s | |
| $T^{(3)}$ | = 26,91 s | |
| $T^{(4)}$ | = 26,75 s | |
| $T^{(5)}$ | = 26,92 s | |

$L_1^R = L_1^L = 41,4 \text{ cm}$
Grenzschiebung (20):

| | | |
|-------------|-----------|-----------------|
| $T_A^{(1)}$ | = 34,48 s | (20 Durchläufe) |
| $T_A^{(2)}$ | = 34,52 | $n = 20$ |
| $T_A^{(3)}$ | = 34,53 | |
| $T_A^{(4)}$ | = 34,50 | |
| $T_A^{(5)}$ | = 34,57 | |

$$T_s = \frac{2\pi r}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{v}{r}} = \frac{2\pi r}{v}$$

$$R_3^R = R_3^L = 86,4 \text{ cm}$$

- Schwabung: (R_2^R, R_2^L)
- $T^{(1)} = 47,41 \text{ s}$
 - $T^{(2)} = 46,91 \text{ s}$
 - $T^{(3)} = 47,16 \text{ s}$
 - $T^{(4)} = 46,86 \text{ s}$
 - $T^{(5)} = 47,38 \text{ s}$

- gegenseitig (ω_A):
- $T_A^{(1)} = 27,21 \text{ s} \quad n=19$
 - $T_A^{(2)} = 28,66 \text{ s} \quad n=20$
 - $T_A^{(3)} = 28,65 \text{ s}$
 - $T_A^{(4)} = 28,65 \text{ s}$
 - $T_A^{(5)} = 28,70 \text{ s}$

- Schwabung: (R_3^R, R_3^L)
- $T^{(1)} = 12,23 \text{ s}$
 - $T^{(2)} = 12,05 \text{ s}$
 - $T^{(3)} = 12,74 \text{ s}$
 - $T^{(4)} = 11,59 \text{ s}$
 - $T^{(5)} = 12,18 \text{ s}$

- $R_4^R = R_4^L = 76,6 \text{ cm}$
gegenseitig (ω_A):
- $T_A^{(1)} = 30,07 \text{ s} \quad n=20$
 - $T_A^{(2)} = 29,97 \text{ s}$
 - $T_A^{(3)} = 30,02 \text{ s}$
 - $T_A^{(4)} = 30,05 \text{ s}$
 - $T_A^{(5)} = 30,01 \text{ s}$

- Schwabung: (R_4^R, R_4^L)
- $T^{(1)} = 15,46 \text{ s}$
 - $T^{(2)} = 15,26 \text{ s}$
 - $T^{(3)} = 15,18 \text{ s}$
 - $T^{(4)} = 15,06 \text{ s}$
 - $T^{(5)} = 15,43 \text{ s}$

VT 11.11.19
Klein

Literatur

- [1] O.V.: *Versuchsanleitungen zum Physikkabor für Anfänger*innen, Teil 1.*
2018. – 46–50 S.