Gekoppelte Pendel (Versuch 19)

26.09.2016

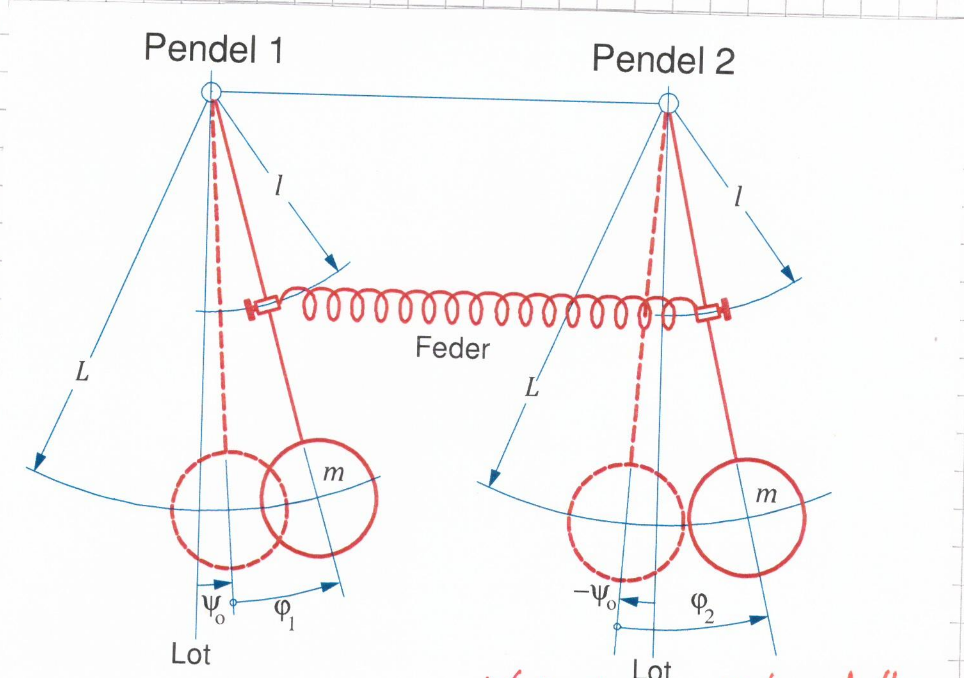
Gliederung

1. Einleitung

1.1 Ziel des Versuchs

Durch messen der Schwingungsdauern gegen- und gleichsinniger Schwingungen und der Schwebungsdauer zweier gleich gekoppelter Pendel sind die beiden Kopplungsgrade zu bestimmen. Außerdem soll die Schwebungsdauer T_s aus T_x und T_y bestimmt werden.

1.2 Versuchsaufbau und Durchführung



✓ Quelle   Keine Aufbauskizze

Zwei Pendel die aus einer langen dünnen Stange der Länge L bestehen, sind an einem Gestell befestigt, sodass die Schwingungsebenen übereinstimmen. Am Ende der Pendel ist ein Gewicht befestigt. Außerdem sind drei Arretierungshebel an einer Stange befestigt. Diese Hebel halten die Pendel bei einer gewissen Auslenkung fest und sorgen dafür, dass sie gleichzeitig freigegeben werden. Die Pendel sind durch eine Feder verbunden, wodurch ein zusätzlicher Drehmoment auf diese wirkt, wenn die Auslenkungen nicht gleich sind. Dadurch, dass der Befestigungspunkt ~~an~~ der Feder an den Pendeln verschoben werden kann, kann man den Kopplungsgrad modifizieren. Die Schwingungsdauern werden mit einer Stoppuhr gemessen.
Zuerst werden die Schwingungs~~...~~ebenen der Pendel senkrecht ausgerichtet. Dann wird für beide Pendel, ungekoppelt, die Schwingungsdauer für 10 Schwingungen in 4 Messungen bestimmt. Sind diese ungefähr gleich groß so sind die Pendel richtig eingestellt und die eigentliche Messung kann beginnen. ⊗1
Für die gleich- und gegensinnige Schwingungen sollen je 10 Schwingungen in 4 Messungen bestimmt werden. Aus den Einzelmessungen wird anschließend der Mittelwert gebildet und damit ~~die~~ die Standardabweichung berechnet.
Um die Schwebungsdauer zu berechnen wird bei dem ersten Durchgang die Zeit für 10 Schwingungen gemessen und dreimal wiederholt. Bei einem zweiten Durchgang werden 5 Schwingungen gemessen und auch 3 mal wiederholt. ⊗2 Dabei ist T_s die doppelte Zeit zwischen zwei Stillständen des gleichen Pendels.
Bei einem zweiten Durchgang werden die gleichen Messungen mit einer anderen Kopplungsstärke wiederholt.

⊗2 Es ~~sind~~ werden weniger Schwingungen beim zweiten Durchgang gemessen da die Schwingungsperioden so kleine Auslenkungen haben

⊗1 Für die folgenden Messungen wird ~~...~~ die Amplitude für beide Pendel auf die jeweils gleiche Entfernung eingestellt. Außerdem haben wir mit dem Geodreieck am ~~oben~~ Aufhängepunkt geschaut ob der Winkel kleiner als 10° ist, da wir sonst in den folgenden Rechnungen keine Näherungen der Form $\sin\varphi \approx \varphi$ vornehmen könnten.

⊗

1.3 Physikalische Grundlagen

Das Drehmoment

$$M_F = -D x_0 l \quad (1)$$

wirkt durch die Federkraft an einem Pendel. Dabei beschreibt D die Richtkonstante der Feder, x_0 die Auslenkung der Feder gegenüber dem Ruhe Zustand und l die Länge vom Aufhängepunkt bis zum Befestigungspunkt der Feder.
Mit der Kleinwinkelnäherung $\sin\varphi \approx \varphi$ ist das im Schwerpunkt angreifende Drehmoment durch

$$M_G = -mgL\sin\varphi \quad \Rightarrow M_G \approx -mgL\varphi \quad (2)$$

gegeben, wobei L die Länge des Pendels beschreibt. Befindet sich das Pendel in der Ruhelage so gilt $M_F = M_G$:

$$mgL\varphi_0 = D x_0 l \quad (3)$$

Bei Festhalten von Pendel P_1 und P_2 um φ_2 aus der Ruhelage auslenken, gilt mit $\sin\varphi_2 l \approx \varphi_2 l$:

$$M_F^* = -Dl(x_0 + l\varphi_2) \quad (4)$$

$$M_G^* = -mgL(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (5)$$

Das Drehmoment M_2 ergibt sich durch Superposition von M_F^* und M_G^* zu

$$M_2 = M_F^* + M_G^* \quad (6)$$

$$= -DLx_0 - Dl^2\varphi_2 - mgL\varphi_2 + mgL\varphi_0 \quad (7)$$

$$\overset{(3)}{=} -Dl^2\varphi_2 - mgL\varphi_2 \quad (8)$$

Lenkt man nun das Pendel P_1 noch aus so gilt

$$\tilde{M}_2 = -mgL\varphi_2 - Dl^2\varphi_2 + Dl^2\varphi_1 = -mgL\varphi_2 - Dl^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (9)$$

wobei φ_1 die Auslenkung von Pendel P_1 angibt. Analog dazu ergibt sich die Herleitung für P_1 zu

$$\tilde{M}_1 = -mgL\varphi_1 - Dl^2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (10)$$

Außerdem ist das Drehmoment auch durch

$$M = I\ddot{\varphi} \quad (11)$$

I=

gegeben. Daraus folgt für (9) und (10):

$$I\ddot{\varphi}_1 = -mgL\varphi_1 - Dl^2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (12)$$

$$I\ddot{\varphi}_2 = -mgL\varphi_2 - Dl^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (13)$$

Somit liefert (12) − (13):

$$\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = -\frac{mgL + 2Dl^2}{I}(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (14)$$

und (12) + (13):

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 = -\frac{mgL}{I}(\varphi_1 + \varphi_2) \qquad (15)$$

Durch Substitution der Variablen zu

$$x := (\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (16)$$

$$y := (\varphi_1 + \varphi_2) \qquad (17)$$

ergibt sich für (14) und (15):

$$\ddot{x} + \frac{mgL + 2Dl^2}{I} x = 0 \qquad (18)$$

$$\ddot{y} + \frac{mgL}{I} x = 0 \qquad (19)$$

Nun haben beide Bewegungsgleichungen (18) und (19) die Form von einer harmonischen Schwingung mit $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Somit sind die Eigenschwingungen durch

$$\omega_x = \sqrt{\frac{mgL + 2Dl^2}{I}} \qquad (20)$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \qquad (21)$$

gegeben. Daher kann man die Schwingungsdauern zu

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL + 2Dl^2}} \qquad (22)$$

$$T_y = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (23)$$

bestimmen. Für ~~das~~ Trägheitsmoment des mathematischen Pende[ls] gilt:

$$I = mL^2 \qquad (24)$$

Die Lösungen von x und y stellen harmonische Schwing-ungen dar, womit für (18) und (19) gilt:

$$x = \varphi_1 - \varphi_2 = a_1 \cos(\omega_x t) + a_2 \sin(\omega_x t) \qquad (25)$$

$$y = \varphi_1 + \varphi_2 = b_1 \cos(\omega_y t) + b_2 \sin(\omega_y t) \qquad (26)$$

Somit bekommen wir

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\left(b_1 \cos(\omega_y t) + a_1 \cos(\omega_x t) + b_2 \sin(\omega_y t) + a_2 \sin(\omega_x t)\right)$$

und $\varphi_2(t) = \frac{1}{2}\left(b_1 \cos(\omega_y t) - a_1 \cos(\omega_x t) + b_2 \sin(\omega_y t) - a_2 \sin(\omega_x t)\right)$

als Lösungsansatz für φ_1 und φ_2.

Nun betrachten wir die drei verschiedenen Schwingungsbewegungen:

I Gleichsinnige Schwingung: Die Pendel werden parallel ausgelenkt.

II Gegensinnige Schwingung: Die Pendel werden entgegengesetzt ausgelenkt.

III Schwebende Schwingung: Nur ein Pendel wird ausgelenkt

Für die drei Fälle gilt:

$$\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \qquad (29)$$

Somit lässt sich (27) und (28) zu

$$\dot{\varphi}_1(t) = \frac{1}{2}(-b_1\omega_y\sin(\omega_y t) - a_1\sin(\omega_x t)\omega_x + b_2\cos(\omega_y t)\omega_y + a_2\omega_x\cos(\omega_x t))$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_1(0) = \frac{1}{2}(b_2\omega_y + a_2\omega_x) = 0 \qquad (30)$$

und $$\dot{\varphi}_2(t) = \frac{1}{2}(-b_1\sin(\omega_y t)\omega_y + a_1\omega_x\sin(\omega_x t) + b_2\omega_y\cos(\omega_y t) - a_2\omega_x\cos(\omega_x t))$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_2(0) = \frac{1}{2}(b_2\omega_y - a_2\omega_x) = 0 \qquad (31)$$

berechnen. Damit kann man a_2 und b_2 zu

$$a_2 = b_2 = 0 \qquad (32)$$

Schön, dass ihr den allgemeinen „Teil“ abgesplittet habt.

bestimmen. Nun muss man die Ortskoordinate φ jedoch für alle drei Fälle noch extra berechnen:

I Gleichsinnige Schwingung

Als Anfangsbedingung für diesen Fall gilt:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0 \qquad (33)$$

Somit ergibt sich für (27) und (28):

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}b_1\cos(\omega_y t) + \frac{1}{2}a_1\cos(\omega_x t)$$

$$\Rightarrow \varphi_1(0) = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}a_1 = \varphi_0 \qquad (34)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}b_1\cos(\omega_y t) - \frac{1}{2}a_1\cos(\omega_x t)$$

$$\Rightarrow \varphi_2(0) = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}a_1 = \varphi_0 \qquad (35)$$

Damit ergeben sich a_1 und b_1 zu

$$a_1 = 0 \qquad (36)$$

$$b_1 = 2\varphi_0 \qquad (37)$$

Somit gilt:

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_0\cos(\omega_y t) \qquad (38)$$

II Gegensinnige Schwingung

Hier sind die Anfangsbedingungen durch

$$\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0 \qquad (39)$$

gegeben. Bei analogem vorgehen wie bei de Gleichsinnigen Schwingung kommt man auf folgende Ergebnisse:

$$\varphi_1(0) = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}a_1 = \varphi_0 \qquad (40)$$

$$\varphi_2(0) = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}a_1 = -\varphi_0 \qquad (41)$$

$$\Rightarrow a_1 = 2\varphi_0 \qquad (42)$$

$$b_1 = 0 \qquad (43)$$

Somit gilt bei dieser Schwingungsmode

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos(\omega_x t) \qquad (44)$$

III Schwebende Schwingung

Die Anfangsbedingungen für diesen Fall sind durch

$$\varphi_1(0) = 0 \qquad (45)$$

$$\varphi_2(0) = \varphi_0 \qquad (46)$$

gegeben. Auch hier folgt durch analoges vorgehen:

$$\varphi_1(0) = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}a_1 = 0 \qquad (47)$$

$$\varphi_2(0) = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}a_1 = \varphi_0 \qquad (48)$$

$$\Rightarrow a_1 = \varphi_0 \qquad (49)$$

$$b_1 = \varphi_0 \qquad (50)$$

Somit folgt für die Schwingungen:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\varphi_0\left(\cos(\omega_y t) - \cos(\omega_x t)\right) \qquad (51)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}\varphi_0\left(\cos(\omega_x t) + \cos(\omega_y t)\right) \qquad (52)$$

Verwendet man die Additionstheoreme:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad (53)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad (54)$$

folgt für diesen Fall:

$$\varphi_1(t) = -\varphi_0 \sin\left(\frac{\omega_x+\omega_y}{2}t\right)\sin\left(\frac{-\omega_y+\omega_x}{2}t\right) \qquad (55)$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_x+\omega_y}{2}t\right)\cos\left(\frac{-\omega_y+\omega_x}{2}t\right) \qquad (56)$$

Die Kreisfrequenz der Schwingung ist durch

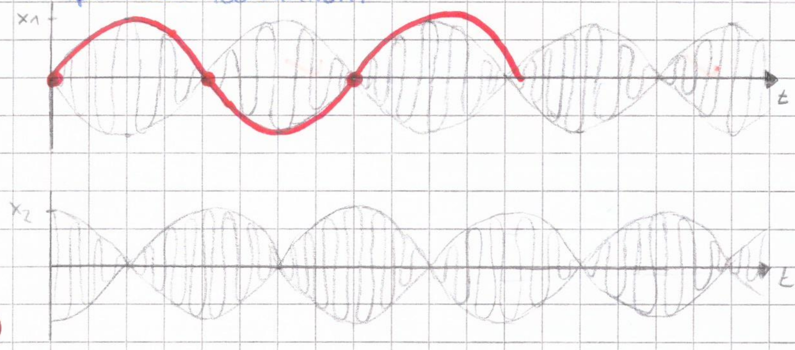
$$\omega := \frac{\omega_x + \omega_y}{2} \tag{57}$$

gegeben und

$$\omega_S = \frac{-\omega_y + \omega_x}{2} \tag{58}$$

gibt die periodische Zu- und Abnahme der Amplitude an. $|\varphi_0| \omega_S$ wird auch als Amplitudenmodulation (AM) bezeichnet.

Amplitudenmodulation:



wieso nicht t?

$x \hat{=}$ Auslenkung

t = Zeit

→ 2 Stillstände / Periode

Wie man ~~aus~~ dem Schaubild erkennen kann, ist $\omega > \omega_S$. Der Kopplungsgrad k ist durch

$$k = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_x^2 + \omega_y^2} \tag{59}$$

definiert. Durch umformen von $\omega_i = 2\pi / T_i$ ergibt sich:

$$k = \frac{T_y^2 - T_x^2}{T_y^2 + T_x^2} \tag{60}$$

<u>Fehler von k</u>

$$s_k = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial k}{\partial T_x}\right| s_{T_x}\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial k}{\partial T_y}\right| s_{T_y}\right)^2} \tag{61}$$

$$\frac{\partial k}{\partial T_x} = -\frac{4 T_x T_y^2}{(T_x^2 + T_y^2)^2} \qquad \frac{\partial k}{\partial T_y} = \frac{4 T_x^2 \cdot T_y}{(T_x^2 + T_y^2)^2} \tag{62}$$

$$s_k = \sqrt{\left(-\frac{4 T_x T_y^2}{(T_x^2 + T_y^2)^2} s_{T_x}\right)^2 + \left(\frac{4 T_x^2 T_y}{(T_x^2 + T_y^2)^2} s_{T_y}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{16 T_x^2 T_y^4}{(T_x^2 + T_y^2)^4} s_{T_x}^2 + \frac{16 T_x^4 T_y^2}{(T_x^2 + T_y^2)^4} s_{T_y}^2}$$

$$= \frac{4 T_x T_y}{(T_x^2 + T_y^2)^2} \sqrt{T_y^2 s_{T_x}^2 + T_x^2 s_{T_y}^2} \quad ✓ \tag{63}$$

Fehler von T_s

(64) $$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = 2\pi \frac{2}{\omega_x - \omega_y} = 2\pi \frac{2}{\frac{2\pi}{T_x} - \frac{2\pi}{T_y}}$$

$$= \frac{4\pi}{\frac{T_y 2\pi - 2\pi T_x}{T_x T_y}} = \frac{4\pi T_x T_y}{2\pi T_y - 2\pi T_x} = \frac{2 T_x T_y}{T_y - T_x}$$

$$s_{T_s} = \sqrt{\left(\frac{\partial T_s}{\partial T_x} s_{T_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T_s}{\partial T_y} s_{T_y}\right)^2}$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial T_x} = \frac{2 T_y^2}{(T_y - T_x)^2} \quad \frac{\partial T_s}{\partial T_y} = -\frac{2 T_x^2}{(T_y - T_x)^2}$$

$$s_{T_s} = \sqrt{\left(\frac{2 T_y^2}{(T_y - T_x)^2} s_{T_x}\right)^2 + \left(-\frac{2 T_x^2}{(T_y - T_x)^2} s_{T_y}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4 T_y^4}{(T_y - T_x)^4} s_{T_x}^2 + \frac{4 T_x^4}{(T_y - T_x)^4} s_{T_y}^2}$$

(65) $$= \frac{2}{(T_y - T_x)^2} \sqrt{T_y^4 s_{T_x}^2 + T_x^4 s_{T_y}^2}$$

Hier fehlt noch

$$\kappa = \frac{D\ell^2}{gmL + D\ell^2} \approx \frac{D}{gmL} \ell^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2$$

V14

Voreinstellung Die Schwingungsebene wurde überprüft und ~~auf~~ für ~~Kdes~~ senkrecht befunden

$L = 92{,}5\,cm = 0{,}925\,m$ $s_t = 0{,}3\,s$

$s_L = 0{,}003\,m$

Pendel 1

n	10 T/s	Schwingungsdauer T/s
1	18,55	1,855
2	18,59	1,859
3	18,56	1,856
4	18,61	1,861
5		
6		

Pendel 2

n	10 T/s	T/s
1	18,59	1,859
2	18,50	1,850
3	18,59	1,859
4	18,57	1,857
5		
6		

Auslenkung $x = 0{,}053\,m$ (selbe über den gesamten Versuchsverlauf ℓ_1)

$s_x = 0{,}001\,m$

Gegensinnige Schwingung

$s_{\ell_1} = 0{,}003\,m$

Abstand ℓ der Feder: $\ell_1 = 61{,}5\,cm = 0{,}615\,m$

n	10 T/s	T/s
1	16,27	1,627
2	16,30	1,630
3	16,38	1,638
4	16,30	1,630

Schwebung mit ℓ_1

n	10 T_s/s	T_s/s
1	268,14	26,814
2	268,24	26,824
3	268,67	26,867
4	268,24	26,824

Gleichsinnige Schwingung mit l_1

n	10 T/s	T/s
1	18,61	1,861
2	18,74	1,874
3	18,66	1,866
4	18,72	1,872

Gegensinnige Schwingung mit l_2

$l_2 = 0{,}31\,m$ $s_{l_2} = 0{,}003\,m$

n	10 T/s	T/s
1	18,02	1,802
2	17,86	1,786
3	17,96	1,796
4	18,13	1,813

Auslenkung $x_2 = 0{,}03\,m$
$s_{x_2} = 0{,}001\,m$

Gleichsinnige Schwingung mit l_2

	10 T/s	T/s
	18,60	1,860
	18,63	1,863
	18,56	1,856
	18,59	1,859

$x_3 = 0{,}023\,m$
$s_{x_3} = 0{,}001\,m$

Schwebung mit l_2

n	5 ~~10~~ T_s/s	T_s/s
1	478,70	95,740
2	476,34	95,268
3	477,52	95,504
4	479,21	95,842

$x_4 = 0{,}03\,m$
$s_{x_3} = 0{,}001\,m$

VT 26.9
M. R.

$s_T = s_{T_3}$

3. AUSWERTUNG

3.1 Voreinstellung

Es wurde sichergestellt, dass die beiden Pendel ungekoppelt die gleiche Schwingungsdauer haben. Dies ist aus den untenstehenden Tabellen zu entnehmen.

Pendel 1

n	T/s	T/s
1	18,55	1,855
2	18,59	1,859
3	18,56	1,856
4	18,61	1,861
Mittelwert		1,858
Standardabweichung		0,003
Stabw. MW		0,0014

$\Rightarrow \overline{T}_1 = (1{,}858 \pm 0{,}0014)\,s$

Pendel 2

n	T/s	T/s
1	18,59	1,859
2	18,50	1,850
3	18,59	1,859
4	18,57	1,857
Mittelwert		1,856
Standardabweichung		0,004
Stabw. MW		0,002

$\Rightarrow \overline{T}_2 = (1{,}856 \pm 0{,}002)\,s$ $\rightarrow \overline{T}_1 = \overline{T}_2$ in 1σ

3.2 Messungen für Länge l, $l_1 = (0{,}615 \pm 0{,}003)\,m$

Die Messungen wurden mehrmals wiederholt um einen Mittelwert bilden zu können.

3.2.1 Gegensinnige Schwingung

n	10T/s	T/s
1	16,27	1,627
2	16,30	1,630
3	16,38	1,638
4	16,30	1,630
Mittelwert		1,631
Standardabweichung		0,005
Stabw. MW		0,002

$\Rightarrow \overline{T}_x = (1{,}631 \pm 0{,}002)\,s$

3.2.2 Gleichsinnige Schwingung

n	10T/s	T/s
1	18,61	1,861
2	18,74	1,874
3	18,66	1,866
4	18,72	1,872
Mittelwert		1,868
Standardabweichung		0,006
Stabw. MW		0,003

$\Rightarrow \overline{T}_y = (1{,}868 \pm 0{,}003)\,s$

3.2.3 Schwebung

n	10T/s	T/s
1	268,14	26,81
2	268,24	26,82
3	268,67	26,87
4	268,24	26,82
Mittelwert		26,832
Standardabweichung		0,02
Stabw. MW		0,012

$\Rightarrow \overline{T}_s = (26{,}832 \pm 0{,}012)$

auf T_s verwendet
ihr bzw geschätztes s
bzw $s/\sqrt{n}$

Alle Tabellen wurden mit Excel 2013 erstellt.

Die Tabellen wurden mit folgenden Formeln berechnet

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_i T_i \quad , s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (T_i - \bar{T})^2} , s_{\bar{T}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$ ✓

3.2.1 Berechnung der Schwebungsdauer

Im Folgenden soll die Schwebungsdauer aus den gemessenen Schwingungsdauern T_x und T_y berechnet werden.

Aus der Herleitung [(64)] folgt

$$T_S^* = \frac{2\pi}{\omega_S} = \frac{2 T_x T_y}{T_y - T_x} = 25{,}7 \text{ s}$$

Fehler der berechneten Schwebungsdauer

Aus der Herleitung [(65)] folgt nach partieller Ableitung:

$$s_{T_S}' = \frac{2}{(T_y - T_x)^2} \sqrt{T_y^4 s_{T_x}^2 + T_x^4 s_{T_y}^2}$$

$$= 0{,}44 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \quad T_S^* = (25{,}7 \pm 0{,}44) \text{ s}$$

Dies entspricht einem Fehler von 36.

mit größerem s_{T_S} passt es sogar noch besser

3.2.2 Berechnung des Kopplungsgrades

Der Kopplungsgrad ergibt sich aus (60)

$$K_\lambda = \frac{T_y^2 - T_x^2}{T_y^2 + T_x^2} = 0{,}135$$

Fehlerrechnung Wiederum folgt aus den physikalischen Grundlagen (63 die Formel

$$s_{K_\lambda} = \frac{4 T_x T_y}{(T_x^2 + T_y^2)^2} \sqrt{T_y^2 s_{T_x}^2 + T_x^2 s_{T_y}^2}$$

$$= 0{,}004$$

$$\Rightarrow \quad K_\lambda = (0{,}135 \pm 0{,}004)$$ ✓

3.3 Messung für die Länge $l_2 = (0{,}310 \pm 0{,}003)\,m$

Die selben Messungen würden nun mit einem kürzeren Abstand l_2 durchgeführt.
Die Tabellen wurden mit den vorher genannten Formeln erstellt.

3.3.1 Gegensinnige Schwingung		
n	10T/s	T/s
1	18,02	1,802
2	17,86	1,786
3	17,96	1,796
4	18,13	1,813
Mittelwert		1,799
Standardabweichung		0,011
Stabw. MW		0,006

$\Rightarrow T_x = (1{,}799 \pm 0{,}006)\,s$

3.3.2 Gleichsinnige Schwingung		
n	10T/s	T/s
1	18,60	1,860
2	18,63	1,863
3	18,56	1,856
4	18,59	1,859
Mittelwert		1,860
Standardabweichung		0,003
Stabw. MW		0,0014

$\Rightarrow T_y = (1{,}860 \pm 0{,}0014)\,s$

3.3.3 Schwebung		
n	5T/s	T/s
1	478,70	95,74
2	476,34	95,27
3	477,52	95,50
4	479,21	95,84
Mittelwert		95,59
Standardabweichung		0,26
Stabw. MW		0,13

$\Rightarrow T_S = (95{,}59 \pm 0{,}13)\,s$

3.3.1 Berechnung der Schwebungsdauer

Die folgenden Rechnungen erfolgen allesamt wie zuvor. Wiederum wird die Schwebungsdauer aus den gemessenen Schwingungsdauern T_x und T_y berechnet.

$$T_S^* = \frac{2T_x T_y}{T_y - T_x} = (111{,}1 \pm 1{,}2)\,s$$

Fehlerrechnung

$s_{T_S} = 1{,}2\,s$

Dies entspricht einem Fehler von 13σ.

3.3.2 Berechnung des Kopplungsgrades

Wiederrum wird der Kopplungsgrad aus T_x und T_y berechnet.

$K_2 = 0{,}033$

Fehlerrechnung

$s_{K_2} = 0{,}006$

$\Rightarrow \quad K_2 = (0{,}033 \pm 0{,}006)$

3.4. Zusammenhang der Kopplungsgrade und ℓ^2

Im folgenden soll überprüft werden, inwieweit der Kopplungsgrad mit ℓ^2 skaliert

$K_1 = (0{,}135 \pm 0{,}004) \qquad \ell_1 = (0{,}615 \pm 0{,}003)\,\mathrm{m}$

$K_2 = (0{,}033 \pm 0{,}006) \qquad \ell_2 = (0{,}310 \pm 0{,}003)\,\mathrm{m}$

$\frac{K_1}{\ell_1^2} = \cancel{0{,}346}\ 0{,}356\ \frac{1}{m^2} \qquad \frac{K_2}{\ell_2^2} = 0{,}34\ \frac{1}{m^2}$

Fehlerrechnung

$s_{\frac{K_1}{\ell_1^2}} = \frac{K_1}{\ell_1^2}\sqrt{2\left(\frac{s_{\ell_1}}{\ell_1}\right)^2 + \left(\frac{s_{K_1}}{K_1}\right)^2} = 0{,}011\ \frac{1}{m^2}$

$s_{\frac{K_2}{\ell_2^2}} = \frac{K_2}{\ell_2^2}\sqrt{2\left(\frac{s_{\ell_2}}{\ell_2}\right)^2 + \left(\frac{s_{K_2}}{K_2}\right)^2} = 0{,}07\ \frac{1}{m^2}$

$\Rightarrow \quad \frac{K_1}{\ell_1^2} = (0{,}356 \pm 0{,}011)\ \frac{1}{m^2} \quad ; \quad \frac{K_2}{\ell_2^2} = (0{,}34 \pm 0{,}07)\ \frac{1}{m^2}$

Dieser Vergleich zeigt den Zusammenhang: (bei geringer ~~Auslenkung~~ Kopplung)

$\ell_1^2 > \ell_2^2 \iff K_1 > K_2$

+ Quotienten sind gleich was mit der Theorie übereinst

4. Zusammenfassung und Diskussion

Bei der ersten Messung wurde die Schwingungsdauer der beiden Pendel verglichen. Dafür ergab sich für die Pendel: $T_1 = (1{,}858 \pm 0{,}0014)\,s$ und $T_2 = (1{,}856 \pm 0{,}002)\,s$. Dies lässt auf einen kleinen systematischen Fehler schließen, der jedoch nicht durch unsere Vorrichtung behoben werden kann. Nein, $T_1 = T_2$ in 1σ!

~~Bei den Kopplungs~~

Für die Messungen mit der Länge 1 ergaben sich die Schwingungsdauern für die gegensinnige Schwingung $\overline{T}_x = (1{,}639 \pm 0{,}002)\,s$ und für die gleichsinnige Schwingung $\overline{T}_y = (1{,}868 \pm 0{,}003)\,s$.

Die gemessene Schwebungsdauer für diese Länge beträgt:

$$\overline{T}_s = (26{,}832 \pm 0{,}012)\,s$$

und die berechnete Schwebungsdauer beträgt

$$T_s^* = (25{,}7 \pm 0{,}4)\,s$$

Dies entspricht einer Abweichung von 3σ, was auf kleine systematische Fehler hindeutet. Der Kopplungsgrad für diese Messung wurde wiederum aus T_x und T_y berechnet und ergab:

$$K_1 = (0{,}135 \pm 0{,}004)$$

Besser Tabellenform

Für die 2. Messung, die mit einer etwas kürzeren Länge 2 durchgeführt wurde, ergab sich für die gegensinnige Schwingung

$$\overline{T}_x = (1{,}799 \pm 0{,}006)\,s$$

$\neq$ $T_1 = T_2 = T_{x_1}$ $= T_{x_2}$

und für die gleichsinnige Schwingung

$$\overline{T}_y = (1{,}860 \pm 0{,}0014)\,s$$

Für die ~~berechnete~~ gemessene Schwebungsdauer ergab sich

$$\overline{T}_s = (95{,}59 \pm 0{,}13)\,s$$

und für die berechnete

$$T_s^* = (111{,}1 \pm 1{,}2)\,s$$

Dies entspricht einer Abweichung von $13\,\sigma$, welche auf grobe systematische Fehler zurückzuführen ist. Auch hier wurde der Kopplungsgrad wieder berechnet und ergab

$$k_2 = (0{,}033 \pm 0{,}006)$$

Als Letztes war der Zusammenhang zwischen k und l^2 zu überprüfen. Dazu hat man den Quotienten daraus gebildet

$$\frac{k_1}{l_1^2} = (0{,}356 \pm 0{,}011)\,\frac{1}{m^2}$$

$$\frac{k_2}{l_2^2} = (0{,}34 \pm 0{,}07)\,\frac{1}{m^2}$$

Dies zeigt den Zusammenhang, der durch den Vergleich verifiziert wurde

$l_1^2 > l_2^2 \Leftrightarrow k_1 > k_2$, der für kleine Kopplungsgrade gilt.

Fehleranalyse

Die große Abweichung der Schwebungsdauern mit der Messung für die Länge 2 resultiert vermutlich aus mehreren systematischen Fehlern, die im folgenden noch diskutiert werden sollen.
Erwähnenswert ist jedoch, dass die Schwingungsdauer der Schwebung bei dieser recht hohen Position der Feder, sehr in die Länge gezogen wurde. Somit war es bei der Messung nicht sehr leicht, den eigentlichen Stoppzeitpunkt nach fünf Schwebungen zu bestimmen. Der Fehler der Standardabweichung beschreibt also vermutlich die Situation nicht ausreichend, weshalb die Abweichung so groß erscheint.
Im Allgemeinen trägt allerdings auch die Luftreibung einen Teil zur Verfälschung der Ergebnisse bei, indem sie das Pendel verlangsamt.
Zudem war es nicht immer gegeben, dass das Pendel in der gleichen Ebene schwingt, womit T unter anderem auch verringert wurde.
Zu guter letzt ist $\varphi \approx \sin\varphi$ nur eine Näherung und die ständige Verschiebung des Ruhepunktes ~~wurde~~ durch verschiedenste Kopplung wurde vernachlässigt.

Denkzettel

HIER könnte
IHRE Note stehen!