

Universität Freiburg
Physiklabor für Anfänger
Ferienpraktikum im Sommersemester 2023

Versuch 18

Reversionspendel



7. November 2024

Datum der Durchführung: 26. September 2023

Tutor



Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuches	3
2	Versuchsdurchführung	3
3	Auswertung und Fehleranalyse	3
3.1	Länge L	4
3.2	Periodendauer T^*	4
3.3	Lokale Erbeschleunigung g	6
3.4	Fehlerquellen	6
3.4.1	Periodendauerabhängigkeit von Amplitude	6
3.4.2	Dämpfung	7
3.4.3	Luftauftrieb	8
3.4.4	Neuberechnung von g	8
4	Diskussion der Ergebnisse	8
4.1	Übersichtliche Angabe der Endergebnisse	8
4.2	Vergleich mit erwartetem Ergebniss	9
4.3	Verbesserte Methoden	9
5	Anhang	10
5.1	Rohdaten mit Vortestat	10
	Literatur	14

1 Ziel des Versuches

Ziel des Versuches ist es, mit einem Reversionspendel die lokale Erdbeschleunigung g mit einer relativen Unsicherheit kleiner als 10^{-3} zu bestimmen.

2 Versuchsdurchführung

In Abb. 1 ist eine Skizze des verwendeten Reversionspendel zu sehen. Für den Versuch wird zuerst der Abstand L der Aufhängepunkte A_1 und A_2 gemessen. Das Justiergewicht m_1 bleibt dauerhaft an einem Punkt. Das Laufgewicht m_2 kann zwischen den Aufhängepunkten verschoben werden und die Position wird mit der Größe x beschrieben. Auf der Pendelstange ist eine Skala in cm eingraviert. Das Pendel wird dann mit einem Winkel $\varphi = 5^\circ$ ausgelenkt und losgelassen. Mit einer Lichtschranke die mit einem elektronischen Zähler verbunden ist, wird die Zeit für fünf Periodendauern gemessen. Für jede Position x wird die Periodendauer T_1 , bei einer Aufhängung an Punkt A_1 , und die Periodendauer T_2 bei einer Aufhängung an Punkt A_2 ermittelt. Eine Aufhängung an Punkt A_1 wird im folgenden als normal und eine Aufhängung an A_2 als revers bezeichnet.

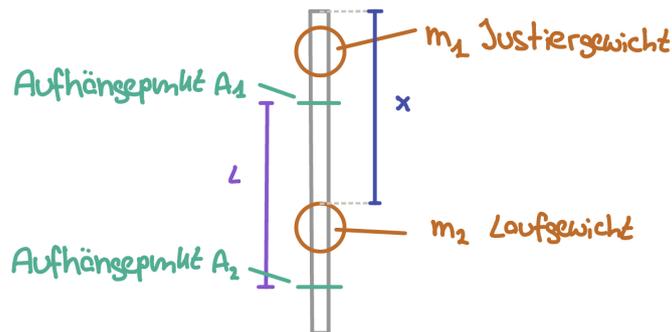


Abbildung 1: Reversionspendel mit zwei Aufhängepunkten A_1 und A_2 sowie zwei Massen m_1 und m_2

3 Auswertung und Fehleranalyse

Ziel ist nun, mithilfe der Messungen, die lokale Erdbeschleunigung g zu ermitteln. Hierzu wird ausgenutzt, dass wenn $T_1 = T_2 := T^*$ folgende Formel für die Periodendauer gilt:

$$T^* = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

Umgestellt nach g erhält man:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^{*2}} \quad (2)$$

Um einen Wert für g zu bestimmen müssen somit die Länge L und die Periodendauer T^* ermittelt werden.

3.1 Länge L

Die Länge L wird mit einem großen Messschieber gemessen. Die Unsicherheit in der Messung ist bedingt durch die Ableseungenauigkeit und wird mittels der Dreiecksverteilung ($a = 0,2\text{mm}$) quantifiziert. Es ergibt sich:

$$L = (969,00 \pm 0,08)\text{mm}$$

3.2 Periodendauer T^*

Um T^* zu bestimmen, wird in zwei Schritten vorgegangen. Im ersten Schritt werden für neun Positionen von m_2 jeweils die Periodendauern für normale (T_1) und reverse (T_2) Aufhängung ermittelt. Der Abstand zwischen den Positionen ist mit 10cm relativ groß. Diese Messung soll einen groben Überblick über die Verläufe der jeweiligen Periodendauern verschaffen. In Abb. 2 sind die beiden Verläufe dargestellt. Die Fehlerbalken für die Unsicherheiten in der Zeitmessung und der Messung von x sind bei dieser Messung so klein, dass diese innerhalb der runden Messpunkte liegen und somit nicht sichtbar sind. In der Abbildung sind zwei Schnittpunkte der Kurven zu erkennen, an denen $T_1 = T_2$ gilt.

In einem zweiten Schritt, soll einer der beiden Schnittpunkte genau bestimmt werden. Hierzu wird die Position x des Laufgewichts im Intervall von $x = 52\text{cm}$ bis $x = 65\text{cm}$ in ein cm Schritten variiert. Abb. 3 stellt die Verläufe der beiden Periodendauern in diesem Intervall grafisch dar. Es ist nun deutlich zu erkennen, dass eine gleiche Periodendauer der verschiedenen Aufhängungen bei einer Position x zwischen 62cm und 64cm vorzufinden ist. Zum einen kann nun an dem Schnittpunkt ein Wert für T^* abgelesen werden, zum anderen kann die Position x in noch kleineren Intervallschritten variiert werden, bis $T_1 = T_2$ gilt. Da mit der Lichtschranke über fünf Perioden gemessen wurde, ergibt sich so ein Bestwert für die Dauer von fünf Perioden \hat{T}_5^* . Die Unsicherheit dieses Wertes entspricht der Unsicherheit in der Bestimmung der Periodendauer durch die Lichtschranke. Diese begründet sich in der Ungenauigkeit der digitalen Anzeige der Lichtschranke. Mit der Rechtecksverteilung und $a = 0,005\text{s}$ folgt damit für die Standardunsicherheit und Zeit bei 5 Perioden:

$$T_5^* = (9,88 \pm 0,003)\text{s}$$

Daraus ergibt sich folgendes Ergebnis für eine Periode:

$$T^* = (1,976 \pm 0,0005)\text{s}$$

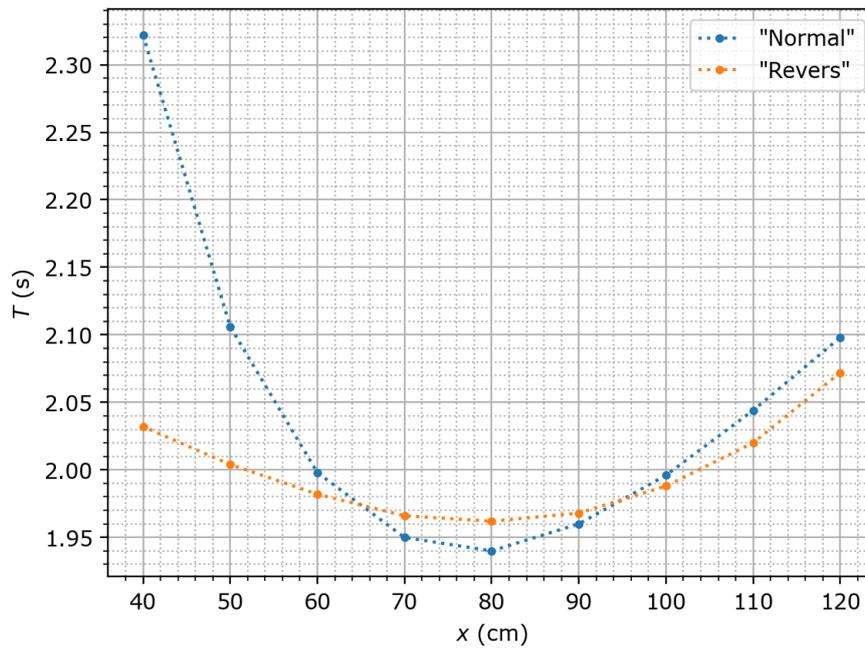


Abbildung 2: Grober Verlauf der Periodendauern T in Abhängigkeit von Position x für normale und reverse Aufhängung.

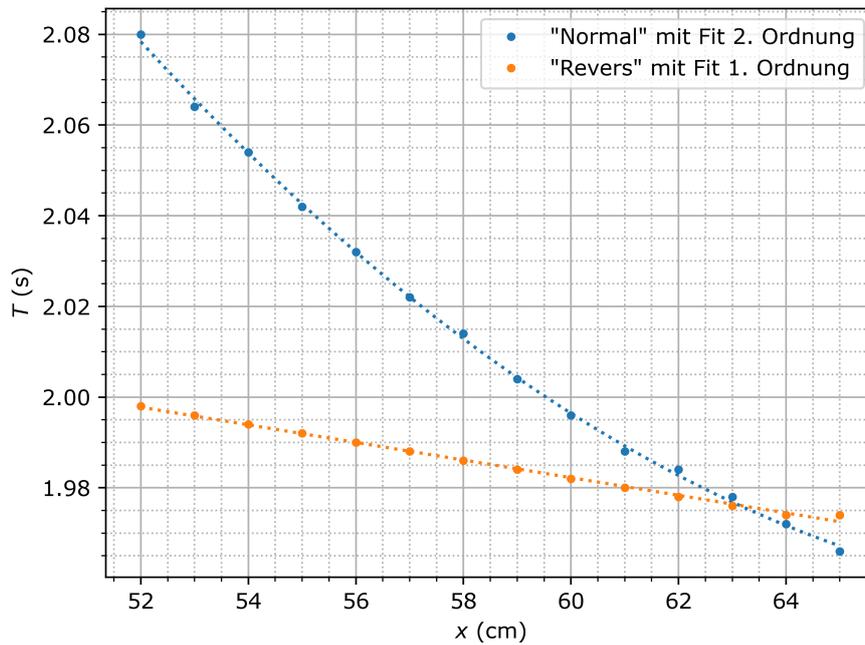


Abbildung 3: Genauer Verlauf der Periodendauern T in Abhängigkeit von Position x in einem Teilintervall für normale und reverse Aufhängung

3.3 Lokale Erbeschleunigung g

Da nun L und T^* bekannt sind, kann die lokale Erdbeschleunigung g mit Formel (2) bestimmt werden. Einsetzen der beiden Werte liefert:

$$g = (9,797 \pm 0,006) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Unsicherheit wird dabei mittels der Gaußschen Fehlerfortpflanzung wie folgt berechnet:

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^{*2}} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 L}{T^{*3}} \Delta T^*\right)^2}$$

Der Beitrag mit der Standardunsicherheit ΔT^* ist dabei dominierend. Die Unsicherheit in der Messung der Länge L kann somit vernachlässigt werden.

Die relative Unsicherheit beträgt:

$$\frac{\Delta g}{g} = 0,0006 = 0,06\%$$

Das Ziel, die lokale Erdbeschleunigung g mit einer relativen Ungenauigkeit kleiner als 10^{-3} zu bestimmen wird damit erreicht. Bevor jedoch das endgültige Ergebnis angegeben werden kann, soll die Bestimmung von g mittels dem Reversionspendel auf systematische Fehler untersucht werden. Verschiedene potentielle Fehlerquellen werden im folgenden Abschnitt genauer beleuchtet.

3.4 Fehlerquellen

3.4.1 Periodendauerabhängigkeit von Amplitude

Zunächst soll die Abhängigkeit der Periodendauer von der Amplitude untersucht werden. Die Amplitude der Schwingung wird durch die anfängliche Auslenkung φ_0 beeinflusst. Für kleine Auslenkwinkel gilt folgende Formel:

$$T^* = T_0 \left(1 + \frac{\varphi^2}{16}\right)$$

Es ist somit eine lineare Abhängigkeit von φ^2 zu erwarten. Die Messpunkte in Abb. 4 zeigen näherungsweise ein lineares Verhalten. Die Abweichungen von der Ausgleichsgerade können auf die hohe statistische Unsicherheit bei dieser Messung zurückgeführt werden. Der Faktor rechts in Klammern in obiger Formel ist ein Korrekturfaktor. Ist dieser Faktor kleiner als 1,0005 so ist die Abweichung vernachlässigbar in Anbetracht der angestrebten relativen Unsicherheit von 0,001. Bei einer anfänglichen Auslenkung $\varphi_0 = 5^\circ$, die bei den Messungen der Periodendauern angesetzt wird, beträgt der Korrekturfaktor ungefähr 1,0005 und sollte somit beachtet werden. Die präzisere Periodendauer T_0 kann man in Abb. 4 anhand des y-Achsenabschnittes ablesen, oder, da man die Auslenkung

kennt, analytisch mit obiger Formel berechnen. Mit letzterem Weg ergibt sich eine neue Periodendauer

$$T_{neu}^* = (1,975 \pm 0,003)s$$

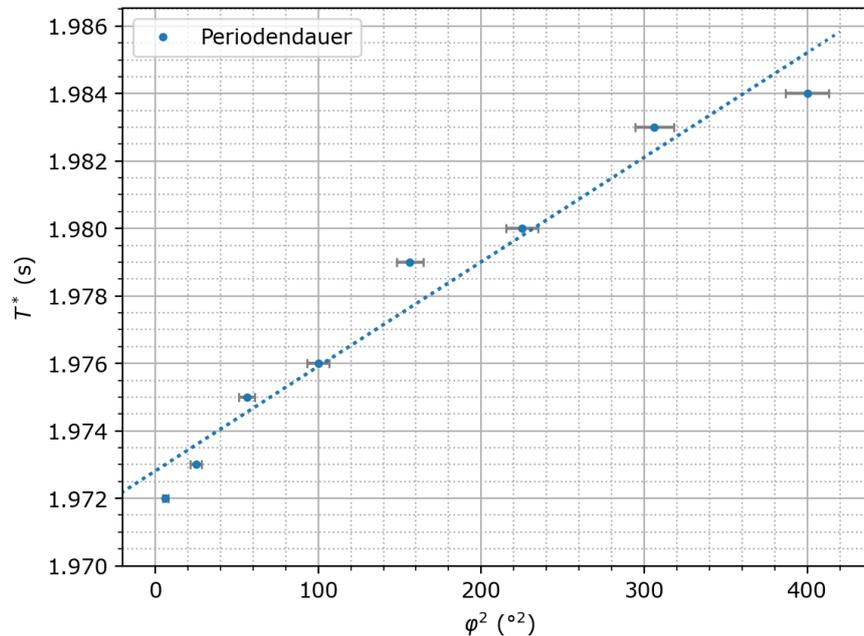


Abbildung 4: Die Periodendauer gegen den Auslenkwinkel φ^2

3.4.2 Dämpfung

Ein weiterer Fehler kann durch die Stokesche Reibung des Pendels mit der Luft und mit der Aufhängung entstehen. Man kann den Einfluss dieser Reibung mithilfe eines Faktors

$$f_r = \frac{T_\tau}{T} = 1 + \frac{T^2}{8\pi^2\tau^2}$$

beschreiben, wobei T die Periodendauer des Pendels ist. Der Faktor selbst muss wieder kleiner als 1,0005 sein um die angestrebte Genauigkeit zu erreichen. Um dies zu überprüfen wird der kritische Wert $f_r = 1,0005$ in die Formel eingesetzt und nach τ umgestellt. Nun kann ein kritischer Wert für τ ausgerechnet werden. Das τ kommt aus der Formel für die zeitliche Auslenkung

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

des Pendels, die zum Zeitpunkt τ um Faktor $\frac{1}{e}$ kleiner ist und kann somit für das vorliegende Reversionspendel experimentell bestimmt werden. Ist der experimentell bestimmte

Wert für τ größer als der errechnete kritische Wert so ist gezeigt, dass der Korrekturfaktor f_r kleiner ist als 1,0005. Die Prüfung wird mithilfe dieser Grundlage durchgeführt. Dazu wird das Pendel um einen Winkel $\varphi_0 = 15^\circ$ ausgelenkt, die Lichtschranke wird bei $\varphi_e = \frac{\varphi_0}{e} \approx 5,5^\circ$ aufgebaut. Nach der zuvor ausgerechneten Zeit $\tau \approx 49,75\text{s}$ passierte das Pendel immernoch die Lichtschranke, somit ist gezeigt, dass der Korrekturfaktor, im Rahmen der angepeilten Unsicherheit, keine Rolle spielt.

3.4.3 Luftauftrieb

Ein letzter Fehler, kann durch die Auftriebskraft entstehen. Diese wirkt auf das Pendel stets nach oben. Sie lässt sich ebenfalls durch einen Faktor

$$f_a = \frac{T}{T_a} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_{Luft}}{\rho_{Pendel}}$$

beschreiben. Auch für diesen gilt, ist er kleiner als 1,0005, ist er vernachlässigbar. Das Pendel besteht aus Messing und Edelstahl. Selbst wenn man davon ausgeht, dass das Pendel vollständig aus Edelstahl besteht, dass eine geringere Dichte¹ $\rho_{Edelstahl} \geq 7700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ gegenüber Messing hat, so ist der Faktor $f_a = 1,000078 \leq 1,0005$, da die Dichte von Luft² $\rho_{Luft} = 1,2041 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ im Verhältnis sehr gering ist. Der Korrekturfaktor f_a ist damit vernachlässigbar.

3.4.4 Neuberechnung von g

Unter der Berücksichtigung von 3.4.1 ergibt sich nun für die Erdbeschleunigung

$$g = (9,806 \pm 0,006) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4 Diskussion der Ergebnisse

4.1 Übersichtliche Angabe der Endergebnisse

Für die Erdbeschleunigung g erhält man:

$$g = (9,806 \pm 0,006) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

mit relativer Unsicherheit:

$$\frac{\Delta g}{g} = 0,0006 = 0,06\%$$

¹[Gmb23]

²[Wik23b]

4.2 Vergleich mit erwartetem Ergebniss

Das Ergebnis der Messung soll mit einem errechneten Wert verglichen werden. Zur Berechnung wird die WELMEC-Normalschwereformel³

$$g_{welmec} = 9,780318 \left(1 + 0,0053024 \sin(\phi)^2 - 0,0000058 \sin(2\phi)^2 \right) - 0,000003085 \cdot h \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

verwendet. Für den Versuchsort im Praktikumsgebäude in Freiburg folgt mit der Höhe⁴ über Normalnull $h = 287\text{m}$ und der geographischen Breite⁵ $\phi = 48,0026718^\circ$ die Erdbeschleunigung

$$g_{welmec} = 9,808 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Dieser Wert wird als exakt angenommen. Es soll nun die Verträglichkeit des bestimmten Wertes g mit dem errechneten Wert g_{welmec} untersucht werden. Es wird ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ festgelegt und folgender t-Wert berechnet:

$$t = \frac{|g - g_{welmec}|}{\Delta g} = 0,3$$

Die Abweichung ist damit nicht signifikant und die Werte sind miteinander verträglich.

4.3 Verbesserte Methoden

Sind die systematischen Fehler berücksichtigt oder eliminiert, so können die statistischen Unsicherheiten ΔL und ΔT^* limitierend sein. Wie schon in der Fehleranalyse für die lokale Erdbeschleunigung g beschrieben, kann die Unsicherheit in der Längenmessung ΔL vernachlässigt werden. Die Unsicherheit ΔT^* lässt sich reduzieren in dem die Zeit über mehr als fünf Perioden gemessen wird. Für beispielsweise eine Messung über 20 Perioden, ergibt sich eine Standardunsicherheit $\Delta T^* = 0,00014\text{s}$. Mit dieser Standardunsicherheit ist dann folgende relative Ungenauigkeit für die lokale Erdbeschleunigung g zu erwarten:

$$\frac{\Delta g}{g} = 0,00017 = 0,017\%$$

Die relative Ungenauigkeit wird dadurch im Vergleich zur ursprünglichen relativen Ungenauigkeit ungefähr gedrittelt. Diese Messmethode geht jedoch auch mit einem erheblich größeren Zeitaufwand einher.

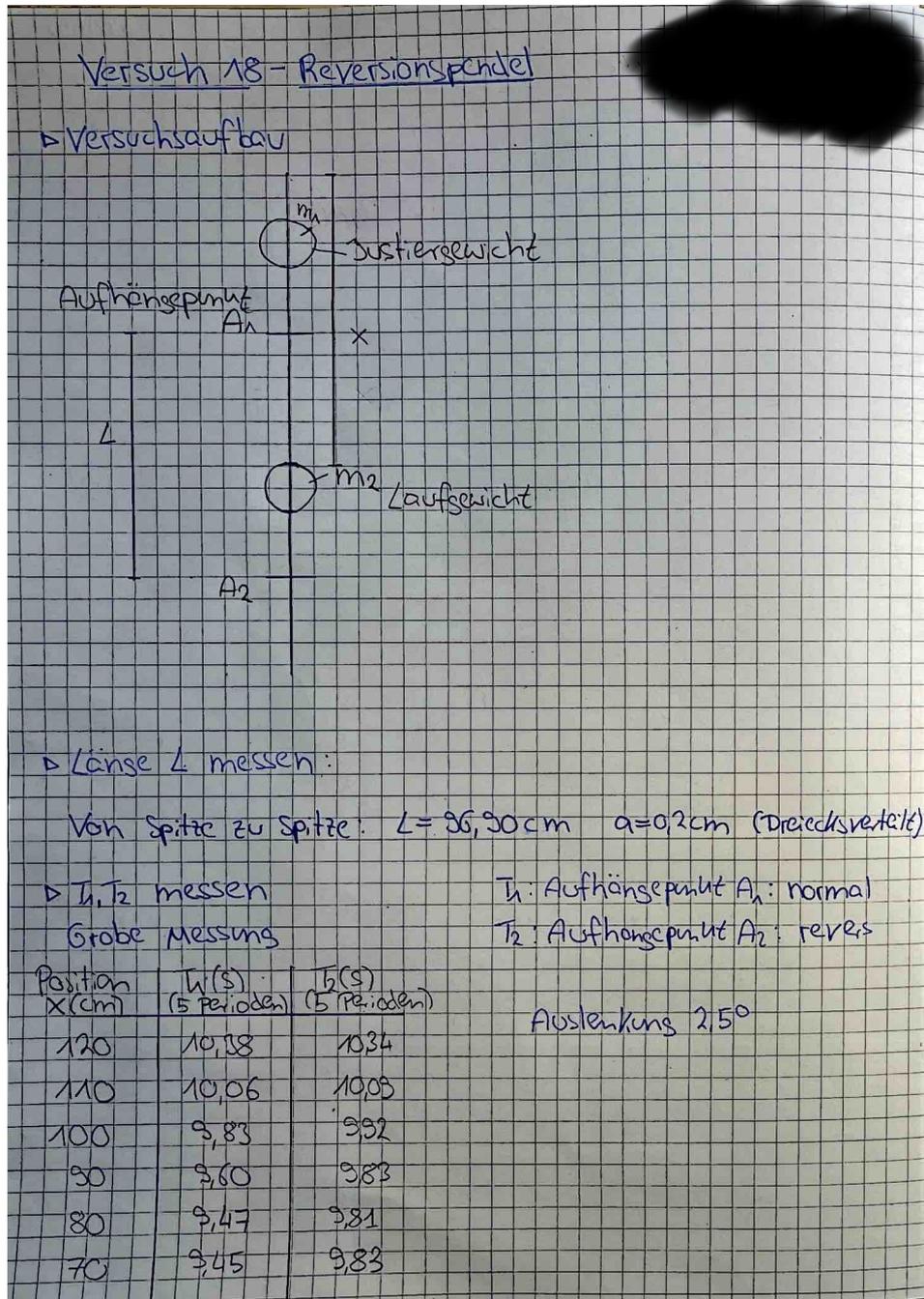
³[Bun]

⁴[Wik23a]

⁵[Map]

5 Anhang

5.1 Rohdaten mit Vortestat



Position x (cm)	T_1 (s) (5 Perioden)	T_2 (s) (5 Perioden)
60	9,62	9,50
50	10,14	10,01

Genauere Messung: Bereich 110-120 cm:

Position x (cm)	T_1 (s) (5 Perioden)	T_2 (s) (5 Perioden)
120	10,32	10,34
119	10,28	10,32
118	10,26	10,29
117	10,21	10,26
116	10,19	10,23
115	10,16	10,21
114	10,13	10,18
113	10,11	10,16
112	10,08	10,13
111	10,07	10,12
110	10,08	10,09
109	9,99	10,02
108	9,97	9,99

Unsicherheiten:

Zeitmessung mit Lichtschranke: $a = 0,005$ s (Rechtsvert.)

Position x : $a = 0,1$ cm (Dreiecksvert.)

Grobere Messung:

Position x (cm)	T_1 (s) (5 Perioden)	T_2 (s) (5 Perioden)
50	9,55	9,86
51	9,96	9,95
52	9,52	9,93
53	9,83	9,91
54	9,81	9,90
55	9,81	9,89
56	9,80	9,88
57	9,79	9,86
58	9,80	9,85
59	9,73	9,84
60	9,76	9,82

Genauere Auslenkung:

Größere Auslenkung: $5,5^\circ$

Position x (cm)	T_1 (s)	T_2 (s)
50	10,37	10,00
51	10,32	9,98
52	10,24	
53		
54		
55		
56		

▷ Grobe Messung			▷ Genaue Messung		
Position X (cm)	T_1 (s) 5 Perioden	T_2 (s) 5 Perioden	Position X (cm)	T_1 (s) 5 Perioden	T_2 (s) 5 Perioden
120	10,45	10,36	52	10,40	9,88
110	10,22	10,10	53	10,32	9,89
100	9,98	9,94	54	10,27	9,87
90	9,80	9,84	55	10,21	9,86
80	9,70	9,81	56	10,15	9,85
70	9,75	9,83	57	10,11	9,84
60	9,88	9,91	58	10,07	9,83
50	10,53	10,02	59	10,02	9,82
40	11,61	10,16	60	9,99	9,81
			61	9,94	9,80
			62	9,92	9,80
			63	9,88	9,80
			64	9,86	9,87
			65	9,83	9,87

▷ Schwingungsdauer abhängig von der Amplitude

Amplitude ϕ in $^\circ$	T (s) 5 Perioden	
25	9,91	-
20	9,92	19,84
15	9,90	19,80
10	9,87	19,76
5	9,86	19,73
2,5	9,86	19,72
17,5	9,92	19,83
12,5	9,90	19,79
7,5	9,87	19,75

$\alpha = 2^\circ$ (Dreieckswert)

▷ Dämpfung:
Auslenkung $15^\circ \Rightarrow \frac{15^\circ}{e} = 5,5^\circ \Rightarrow \tau = 4 \text{ s}$
Nach 5min: Auslenkung $\varphi > 5,5^\circ$

Abbildung 5: Rohdaten

Literatur

- [Bun] Physikalisch-*Technische Bundesanstalt*. URL: https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung_1/1.1_masse/1.15_gravzonen.pdf (besucht am 27.09.2023).
- [Gmb23] mirrorINOX GmbH Co. KG. *Edelstahl-Dichte*. 2023. URL: <https://www.mirrorinox.de/edelstahl/edelstahl-dichte> (besucht am 26.09.2023).
- [Map] Google Maps. URL: <https://maps.app.goo.gl/oTkQzEYYAcV1rCXP6> (besucht am 26.09.2023).
- [Wik23a] Wikipedia. *Freiburg im Breisgau*. 25. Sep. 2023. URL: https://de.m.wikipedia.org/wiki/Freiburg_im_Breisgau (besucht am 26.09.2023).
- [Wik23b] Wikipedia. *Luftdichte*. 9. Sep. 2023. URL: <https://de.m.wikipedia.org/wiki/Luftdichte> (besucht am 26.09.2023).