

Inhaltsverzeichnis

1	Versuchsziel	3
2	Versuchsaufbau	4
3	Physikalischer Hintergrund	5
4	Versuchsdurchführung	8
5	Auswertung	9
5.1	Physikalisches Pendel	9
5.2	Mathematisches Pendel	9
5.2.1	Abhängigkeit von der Pendellänge	9
5.2.2	Bestimmung der Messgenauigkeit	13
5.2.3	Amplitudenabhängigkeit	14
5.3	Steinerscher Satz	17
6	Zusammenfassung und Diskussion	21
6.1	Physikalisches Pendel	21
6.2	Abhängigkeit des mathematischen Pendels von der Pendellänge	21
6.3	Bestimmung der Messgenauigkeit des mathematischen Pendels	21
6.4	Amplitudenabhängigkeit des mathematischen Pendels	21
6.5	Steinerscher Satz	22
7	Anhang	23

1 Versuchsziel

Der zu bearbeitende Versuch lässt sich in drei Aufgaben unterteilen.

Znächst soll die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels gemessen werden.

Im Anschluss sollen an einem mathematischen Pendel verschiedene Messungen durchgeführt werden. Zuerst wird dabei für verschiedene Pendellängen gemessen, um durch eine Auftragung gegen l_m den Wert der reduzierten Pendellänge l_r des physikalischen Pendels zu erhalten. Dieser wird danach mit dem durch Abmessung des Stabs erhaltenen Wert verglichen.

Im Anschluss soll durch eine Messreihe mit immer gleichen Pendellänge die statistische Unsicherheit bestimmt werden.

Zuletzt soll das Pendel bei immer gleicher Pendellänge für verschiedene Amplituden gemessen werden, um den theoretischen Verlauf der Näherungsformel zu bestätigen.

Im letzten Teil des Versuchs ist es die Aufgabe, den Steinersche Satz zu verifizieren. Dafür wird ein Drehpendel verwendet und die Schwingungsdauer mit und ohne den aufgelegten Körper gemessen. Außerdem soll der Körper an verschiedenen Positionen auf dem Tisch gemessen werden.

Aus diesen Messungen sollen das Hauptträgheitsmoment des Körpers und das Richtmoment des Tisches bestimmt werden. Zuletzt wird das aus den Messungen erhaltene Trägheitsmoment mit dem aus Abmessung und Gewicht erhaltenen verglichen.

2 Versuchsaufbau

Das verwendete physikalische Pendel besteht aus einem einfachen schwingungsfähigen Stab, der nahe seines Endes aufgehängt wird.

Um ein korrektes mathematisches Pendel zu erhalten, wird ein einfaches Fadenpendel verwendet, das allerdings an zwei Fäden aufgehängt wird, um eine mögliche Rotation der Schwingungsebene zu vermeiden.

Die Pendellängen des mathematischen Pendels werden alle mit einem Bandmaß gemessen. $\rho \rightarrow$

Um den Steinerschen Satz zu untersuchen, wird ein Drehpendel verwendet. Dieses besteht aus einem Drehtisch, einer Spiralfeder und einer aufgelegten Kreisscheibe. Auf dem Drehtisch können dabei noch weitere Massen befestigt werden. Versetzt man das Drehpendel in Bewegung, ergibt sich durch die Spiralfeder ein Rückstellmoment, wodurch der Aufbau beginnt, eine Schwingung durchzuführen. ~~Bewegung~~ Auslenkung

Durch Variation der Position verschiedener Massen auf dem Drehtisch verändert sich das Trägheitsmoment, wodurch eine Änderung der Schwingungsdauer gemessen werden kann. $\rho \rightarrow$

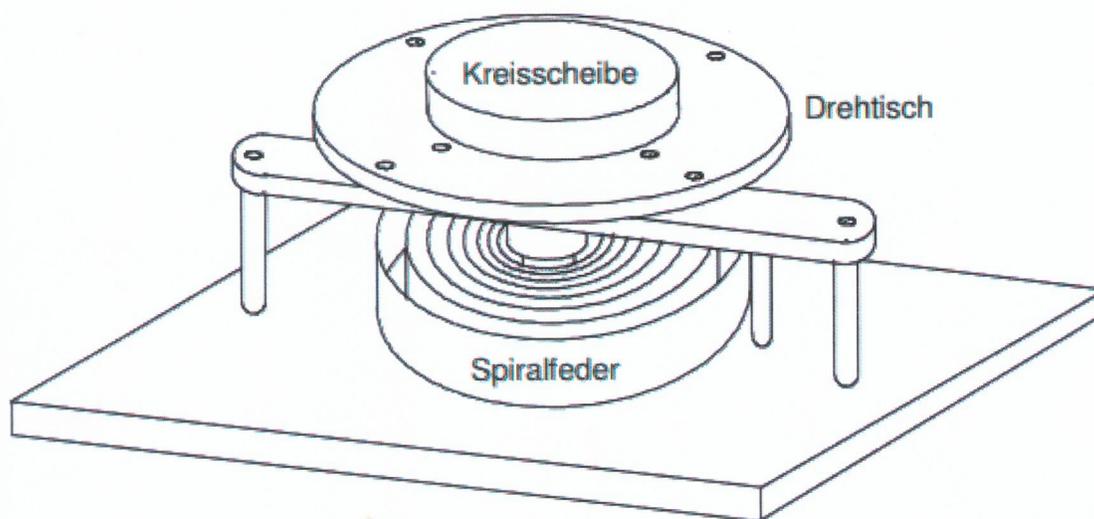


Abbildung 1: Drehpendel zur Überprüfung des Steinerschen Satzes
Quelle: *Physiklabor für Anfänger*innen Teil 1, Teil A*

3 Physikalischer Hintergrund

Zu Beginn ist es hilfreich zunächst in einer Tabelle die wichtigen physikalischen Größen der Rotationsbewegung und deren entsprechendes Äquivalent bei linearen Bewegungen zu betrachten:

Translation	Rotation
Ortsvektor \vec{x}	Winkelverschiebung ϕ
Geschwindigkeit \vec{v}	Winkelgeschwindigkeit ω
Beschleunigung \vec{a}	Winkelbeschleunigung α
Masse m	Trägheitsmoment I
Kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	Drehmoment $M = I \cdot \alpha = \frac{dL}{dt}$
Arbeit $W = \int \vec{F} d\vec{x}$	Arbeit $W = \int M d\phi$
$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	$E_{kin} = \frac{1}{2} I \omega^2$
Leistung $P = \frac{dW}{dt} = Fv$	Leistung $P = M \cdot \omega$
Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$	Drehimpuls $L = I \cdot \omega$

Tabelle 1: Zuordnung der physikalischen Größen der Rotations- zur Translationsbewegung

Ein physikalisches Pendel wird um den Winkel ϕ ausgelenkt. Bei dieser Auslenkung kommt es zu einem Drehmoment M , welches der Bewegung entgegen wirkt und somit durch

$$M = -m \cdot g \cdot s \cdot \sin\phi \quad (3.1)$$

beschrieben werden kann. In diesem Fall beschreibt s der Abstand vom Schwerpunkt S zum Aufhängepunkt, g die Erdbeschleunigung und m die Masse des Pendels.

Bei einer Drehbewegung kann das Drehmoment M außerdem durch den Zusammenhang

$$M = I \cdot \ddot{\phi} \quad (3.2)$$

ausgedrückt werden, wobei $\ddot{\phi}$ die Winkelbeschleunigung und I das Trägheitsmoment beschreibt. Daraus folgt folgende Bewegungsgleichung:

$$I \cdot \ddot{\phi} = -m \cdot g \cdot s \cdot \sin\phi. \quad (3.3)$$

Durch die Kleinwinkelnäherung gilt $\sin\phi \approx \phi$, weshalb die Differentialgleichung

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{m \cdot g \cdot s}{I} \right) \phi = 0 \quad (3.4)$$

lautet. Diese lässt sich durch den Ansatz $\phi(t) = \phi_0 \cdot \sin(\omega t - \delta)$ lösen.

Aus dem Zusammenhang $\omega = 2\pi f$ (f beschreibt die Frequenz und ω die Winkelgeschwindigkeit) folgt für die Schwingungsdauer T_p

$$T_p = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot s}}. \quad (3.5)$$

Für das physikalische Pendel in diesem Versuch gilt für den Abstand vom Aufhängepunkt zum Schwerpunkt $s = \frac{l}{2}$ und für das Trägheitsmoment $I = \frac{1}{3} m l^2$. Demnach folgt für die Periodendauer T_p

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{3l}{3g}}. \quad (3.6)$$

Für das mathematische Pendel gilt, aufgrund des Aufbaus mit der gesamten Masse m in einem Punkt im Abstand l_m zum Aufhängepunkt, $I = ml_m^2$ und $s = l_m$. Daraus folgt für die Schwingungsdauer T_m

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l_m}{g}}. \quad (3.7)$$

Die reduzierte Pendellänge l_r bezeichnet die Länge, die ein mathematisches Pendel haben muss, um dieselbe Schwingung durchzuführen wie das physikalische Pendel. Aus diesem Grund erhält man l_r durch Gleichsetzen beider Schwingungsdauern:

$$T_p = T_m \quad (3.8)$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} = s\pi\sqrt{\frac{l_m}{g}} \quad (3.9)$$

$$\Leftrightarrow l_m = \frac{2}{3}l \quad \checkmark \quad (3.10)$$

Hierbei bezeichnet der erhaltene Wert für l_m die reduzierte Pendellänge.

Tritt der Fall ein, dass die Auslenkung zu groß ist, um die Näherung $\sin\phi \approx \phi$ nutzen zu können, kann die Differentialgleichung nicht mehr als reine sinusförmige Schwingung angenommen werden. Sie ist trotzdem noch periodisch und die Schwingungsdauer wird größer, da die rücktreibende Kraft (Drehmoment) langsamer ansteigt als der Winkel. Durch Verwendung der Taylor-Entwicklung kann die Schwingungsdauer jedoch über folgenden Zusammenhang genähert werden:

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\phi_0}{2} + \dots\right). \quad (3.11)$$

Wenn die Winkel nicht zu groß sind, können noch einmal einige Näherungen angewandt werden, weshalb in diesem Fall gilt:

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{16}\phi_0^2 + \dots\right). \quad (3.12)$$

Subsection

Um den physikalischen Hintergrund des Steinerschen Satzes zu beschreiben, verwendet man in diesem Fall ein Drehpendel. Dabei wird das rücktreibende Moment nicht durch die Schwerkraft, sondern durch eine Spiralfeder erwirkt. Innerhalb des Hooke'schen Gesetzes gilt deshalb der Zusammenhang

$$M = -{}^\circ D\phi. \quad (3.13)$$

Aus diesem Zusammenhang ergibt sich für die Bewegungsgleichung

$$I\ddot{\phi} = -{}^\circ D\phi. \quad (3.14)$$

Hierbei bezeichnet ${}^\circ D$ das Richtmoment und ϕ den Drehwinkel.

Die Differenzialgleichung kann auch hier über einen sinusförmigen Ansatz

$$\phi(t) = \phi_0 \cdot \sin(\omega t - \delta) \quad (3.15)$$

gelöst werden, weshalb sich mit $\omega = \sqrt{\frac{{}^\circ D}{I}}$ für die Schwingungsdauer ergibt:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{{}^\circ D}}. \quad (3.16)$$

Demnach gilt der Zusammenhang $T^2 \propto I$.

Das Trägheitsmoment wird allgemein definiert als

Subsection

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \quad (3.17)$$

Nach dieser Definition lässt sich das Trägheitsmoment nicht durch eine einzige Angabe quantifizieren, da es sowohl von der Masse m , als auch dem Abstand der Masse zur Drehachse r abhängt.

Der Steinersche Satz leitet sich aus der Bewegungsgleichung und dem Trägheitsmoment her. Dabei nimmt man ein Koordinatensystem an, wobei der Schwerpunkt in den Ursprung gelegt wird. Für einen Punkt P gibt es eine parallele Achse zu der durch den Schwerpunkt.

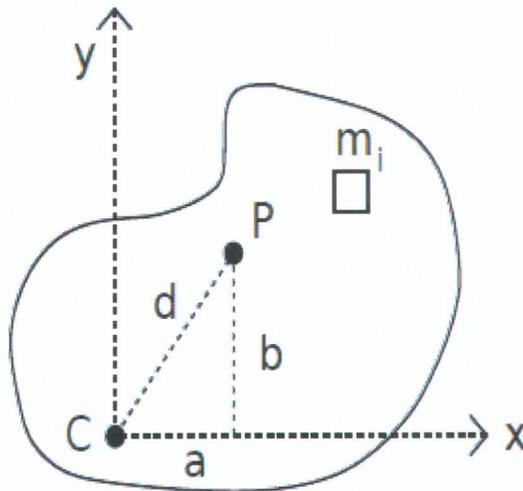


Abbildung 2: Herleitung Steinerscher Satz

Aus Abbildung 2 folgt für das Trägheitsmoment I_P im Punkt P demnach

$$I_{cm} = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow I_P = \sum_i m_i [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2] \quad (3.19)$$

$$= \sum_i m_i (x_i^2 - 2ax_i + a^2 + y_i^2 - 2by_i + b^2) \quad (3.20)$$

$$= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2a \sum_i m_i x_i - 2b \sum_i m_i y_i + (a^2 + b^2) \sum_i m_i. \quad (3.21)$$

Da der Koordinatenursprung im Schwerpunkt angesetzt wird, gilt $\sum_i m_i x_i = 0$ und $\sum_i m_i y_i = 0$ und somit vereinfacht sich der Term zu

$$I_P = I_{cm} + Md^2, \quad (3.22)$$

wobei I_{cm} das Trägheitsmoment im Schwerpunkt, M die Gesamtmasse und d der Abstand zwischen Schwerpunkt und Drehachse beschreibt. Der Steinersche Satz gilt, wie in Abbildung 2 gut erkennbar, auch für unregelmäßige und inhomogene Körper.

Alle Messungen sind vollständig im Anhang zu finden.

4 Versuchsdurchführung

Zu Beginn des Versuchs wurde zunächst an dem physikalischen Pendel gemessen. Um ein möglichst genaues Ergebnis zu erhalten, war es von Vorteil mit zehn Periodendauern pro Messung zu arbeiten. Durch dieses Verfahren kann der durch die Reaktionszeit und die Stoppuhr verursachte Fehler beim Beginn und am Ende verringert werden.

Außerdem musste die Länge des Pendels und die Position des Aufhängepunkts abgemessen werden.

Im Anschluss erfolgten die verschiedenen Messungen am mathematischen Pendel.

Dabei wurde zunächst die Schwingungsdauer bei verschiedenen Pendellängen ermittelt. Danach sollte zur Bestimmung der Messgenauigkeit eine weitere Messreihe durchgeführt werden, wobei mehrere Messungen bei gleicher (mittlerer) Pendellänge nötig waren, um daraus die Unsicherheit der Periodendauer bestimmen zu können.

Der letzte Abschnitt mit dem mathematischen Pendel untersucht die Amplitudenabhängigkeit, wofür Schwingungsdauern bei verschiedenen Amplituden gemessen wurden. Für größere Auslenkungen ($\phi > 30^\circ$) wurde dabei nur noch eine Periodendauer gemessen, da die prozentuale Abnahme der Amplitude so hoch war, dass der Fehler durch die Reaktionszeit und die Stoppuhr geringer waren als der Fehler der abnehmenden Amplituden bei mehreren Schwingungsdauern. Außerdem sollte darauf geachtet werden, dass vor allem im Bereich hoher Amplituden die Messungen ausreichend kleinschrittig angesetzt wurden.

Im letzten Teil des Versuchs wurden an dem im Versuchsaufbau beschriebenen Drehpendel zwei Messreihen durchgeführt.

Zum Einen sollten sechs Einzelmessungen ohne Kreisscheibe erfolgen. Dabei wurden je fünf Periodendauern gemessen und darauf geachtet, dass die Auslenkung noch innerhalb des Hookeschen Gesetzes lag. *wie?*

Zum Anderen wurde in der zweiten Messreihe eine Kreisscheibe, dessen Masse und Radius gewogen bzw. ausgemessen wurden, verwendet und sechs Messungen mit verschiedenen Abständen a zwischen Schwerpunkt der Kreisscheibe und Mittelpunkt des Drehtischs gemessen.

5 Auswertung

5.1 Physikalisches Pendel

Aus den gemessenen Werten für das physikalische Pendel konnte zunächst der arithmetische Mittelwert und die Standardabweichung bestimmt werden. Dies ergibt die statistische Unsicherheit der Messung.

arithmetisches Mittel / s	1,599
Varianz / s^2	8,04E-06
Standardabweichung / s	0,003

Fehler des Mittels?

Tabelle 2: Statistische Unsicherheit der Messung $+?$ $N?$
Ref?

Außerdem musste die Länge des Stabs und die Lage des Aufhängepunkts bestimmt werden. Mit Hilfe der Formel aus dem physikalischen Hintergrund folgt für die reduzierte Pendellänge:

$$l_r = \frac{2}{3} l. \quad (5.1)$$

Die Unsicherheit der Länge l_r kann über Gaußsche Fehlerfortpflanzung berechnet werden:

$$s_{l_r} = l_r \sqrt{\left(\frac{s_l}{l}\right)^2}. \quad (5.2)$$

Die berechneten Werte können aus Tabelle 3 entnommen werden.

Länge Stab/cm	96,1
Fehler Stablänge(s_{lp})/cm	0,2
Abstand Stabende-Aufhängepunkt/cm	1,0
red. Pendellänge/cm	64,07
Fehler reduziertes Pendel(s_{lr})/cm	0,13

SI benutzen.

nicht abrunden

Tabelle 3: Maße des physikalischen Pendels und reduzierte Pendellänge

Vergleich mit lg aus T?

5.2 Mathematisches Pendel

5.2.1 Abhängigkeit von der Pendellänge

Bei der Untersuchung zur Abhängigkeit der Schwingungsdauer des mathematischen Pendels von der Länge des Pendels wurden acht verschiedene Pendellängen eingestellt und jeweils zehn Periodendauern gemessen.

Aus diesen Messwerten werden zunächst die einzelnen Periodendauern sowie deren Quadrate ausgerechnet. Der Fehler auf s_T ist dabei der Messfehler bei der Zeitmessung, der hier auf $s_T = 0,1s$ abgeschätzt wurde. warum? ~~3~~

Der Fehler auf s_{T^2} wird mit

$$s_{T^2} = 2T s_T \quad (5.3)$$

berechnet. Die hier genannten Werte können Tabelle 4 entnommen werden.

mathematisches Pendel					
Abhängigkeit von der Pendellänge					
Länge/cm	10T/s	T/s	T ² /s ²	s _T ² /s ²	
32,5	11,45	1,15	1,31	0,01	} zu klein? NB
35,0	11,91	1,19	1,42	0,01	
41,2	12,99	1,30	1,69	0,01	
44,9	13,50	1,35	1,82	0,01	
56,4	15,20	1,52	2,31	0,02	
64,1	16,10	1,61	2,59	0,02	
70,0	16,85	1,69	2,84	0,02	
80,6	18,13	1,81	3,29	0,02	

Tabelle 4: Messergebnisse zur Abhängigkeit von der Pendellänge

Zur Bestimmung der Ausgleichsgerade und der Steigung sowie des Achsenabschnitts mit den jeweiligen Fehlern wird anschließend eine lineare Regression durchgeführt. Diese soll im Folgenden genauer erläutert werden.

Der Ansatz ist dabei die Geradengleichung

$$y(x) = a + bx, \quad (5.4)$$

wobei es sich bei b um die Steigung und bei a um den Achsenabschnitt handelt. Die Steigung wird über die Formel

$$b = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \quad (5.5)$$

berechnet. \bar{x} bezeichnet dabei den arithmetischen Mittelwert der x -Werte und x_i bzw. y_i die einzelnen x/y -Werte. Der Achsenabschnitt kann über die Gleichung

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (5.6)$$

ermittelt werden. Des Weiteren wird noch die Standardabweichung der Einzelwerte benötigt, die sich über folgenden Zusammenhang herausfinden lassen:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_i (y_i - a - bx_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_i v_i^2}, \quad (5.7)$$

wobei die Varianz mit

$$v_i := y_i - a - bx_i \quad (5.8)$$

berechnet werden kann.

Die Unsicherheit der Steigung beträgt dabei

$$s_b = s \sqrt{\frac{1}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}} \quad (5.9)$$

und die des Achsenabschnitts

$$s_a = s \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}} \quad (5.10)$$

Somit werden für diese Messreihe die nachfolgenden Werte berechnet.
Für die Steigung erhält man

$$b = (0,0408 \pm 0,0003) \frac{\text{s}^2}{\text{cm}}. \quad (5.11)$$

Der Achsenabschnitt ist

$$a = (-0,01 \pm 0,01) \text{s}^2. \quad (5.12)$$

Die Standardabweichung beträgt

$$s = 0,01 \text{s}^2. \quad (5.13)$$

welche? Verglichen mit der aus den Messergebnissen berechneten Standardabweichung stimmen die beiden Werte ziemlich miteinander überein. Die Werte der linearen Regression können in Tabelle 5 nachvollzogen werden.

lineare Regression								
$x_i = l/\text{cm}$	$y_i = T^2/\text{s}^2$	$x_i - x_m/\text{cm}$	$(x_i - x_m)^2/\text{cm}^2$	$(x_i - x_m) \cdot y_i/\text{s}^2 \cdot \text{cm}$	$a + bx_i$	v_i	v_i^2	
32,50		1,31	-20,59	423,85	-26,99	1,32	-0,01	0,00
35,00		1,42	-18,09	327,16	-25,66	1,42	0,00	0,00
41,20		1,69	-11,89	141,31	-20,06	1,67	0,01	0,00
44,90		1,82	-8,19	67,04	-14,92	1,82	0,00	0,00
56,40		2,31	3,31	10,97	7,65	2,29	0,02	0,00
64,10		2,59	11,01	121,28	28,55	2,61	-0,02	0,00
70,00		2,84	16,91	286,03	48,02	2,85	-0,01	0,00
80,60		3,29	27,51	756,94	90,43	3,28	0,01	0,00
Summe	Summe	Summe	Summe	Summe	Summe	Summe	Summe	Summe
424,70		17,27	0,00	2134,57	87,02	17,27	0,00	0,00
Mittel x_m/cm	Mittel y_m/s^2							
53,09		2,16		Varianz	0,0002			
				Standardabw.	0,01			
$b/\text{s}^2/\text{cm}$		0,04		Unsicherheit s_b	0,0003			
a/s^2		-0,01		Unsicherheit s_a	0,01			

Tabelle 5: Lineare Regression der Pendellänge + T^2

Die Ausgleichsgerade wird zusammen mit den Werten in ein Diagramm eingetragen, siehe Abbildung 3. Dabei wird die Länge des Pendels l auf die x-Achse und die Periodendauer zum Quadrat auf die y-Achse aufgetragen. (Die Fehlerbalken sind dabei so klein, dass sie hier zur besseren Sichtbarkeit dreifach vergrößert werden.) In x-Richtung ist dabei der vergrößerte Fehler auf die Länge mit $s_l = 0,2\text{cm}$ eingetragen und in y-Richtung der vergrößerte, vorher berechnete Fehler s_{T^2} .

* bitte nicht!

Mathematisches Pendel in Abhängigkeit von der Pendellänge

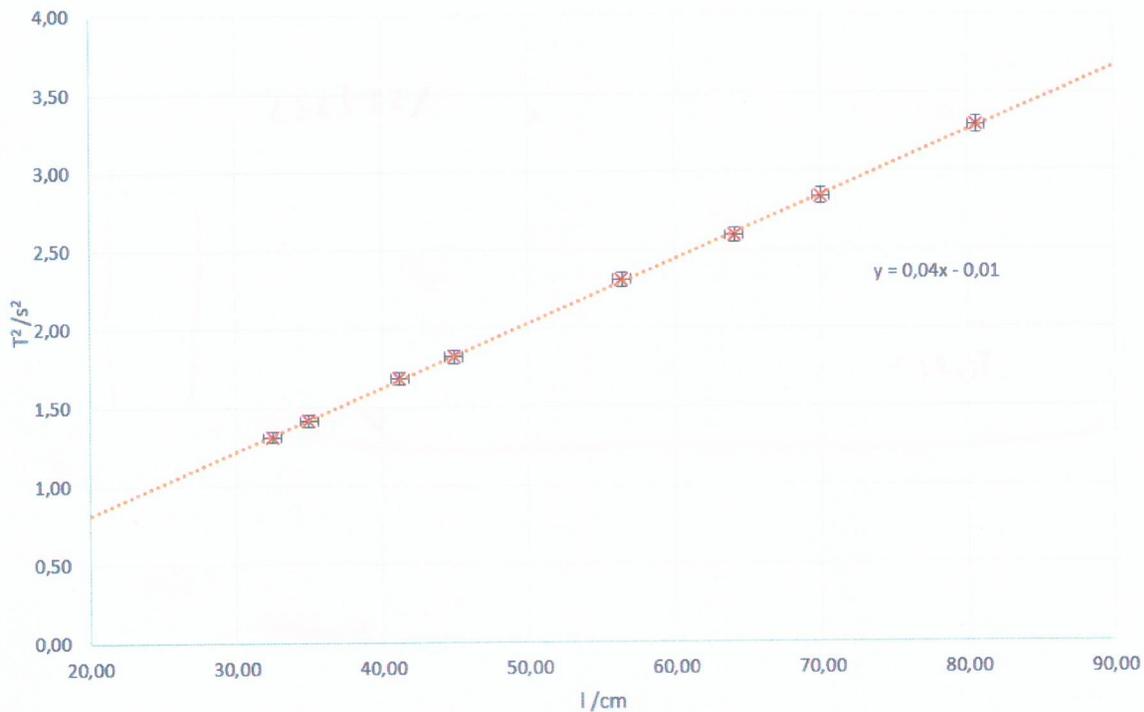


Abbildung 3: Abhängigkeit der Periodendauer von der Pendellänge mit dreifach vergrößerten Fehlerbalken

Berechnung der Erdbeschleunigung

Aus

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5.14)$$

erhält man durch Quadrieren den Zusammenhang

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}l, \quad (5.15)$$

wobei die Steigung b hier abgelesen werden kann als

$$b = \frac{4\pi^2}{g}. \quad (5.16)$$

Durch Umstellen erhält man für die Erdbeschleunigung g den Ausdruck

$$g = \frac{4\pi^2}{b} = 967,4\text{cm/s}^2. \quad \checkmark \quad (5.17)$$

Der dazugehörige Fehler entsteht über den Fehler der Steigung und ist

$$s_g = g \cdot \frac{s_b}{b} = 6,3\text{cm/s}^2. \quad \checkmark \quad (5.18)$$

Insgesamt erhält man für die Erdbeschleunigung somit

$$g = (967 \pm 6)\text{cm/s}^2. \quad \text{SI} \quad (5.19)$$

Bestimmung der reduzierten Pendellänge

Um die reduzierte Pendellänge l_r herauszufinden, wird die quadratische Periodendauer des physikalischen Pendels verwendet, die

$$T_p^2 = 2,56s \quad \backslash sT\{\}\{\}\{\} \quad (5.20)$$

beträgt. Der Fehler auf die T_p^2 ist dabei über $s_{T_p^2}^2 = 2 \cdot s_T \cdot T$ zu berechnen, sodass man dadurch erhält:

$$T_p^2 = (2,56 \pm 0,01)s^2 \quad \checkmark \quad (5.21)$$

Diese wird mit der Geradengleichung $T_i^2(l_i) = a + bl_i$ gleichgesetzt, um über die Beziehung

T_i, l_i :

$$T_p^2 = a + bl_r \Leftrightarrow l_r = \frac{T_p^2 - a}{b} \quad \checkmark \quad (5.22)$$

die reduzierte Pendellänge erhalten zu können.

Somit lässt sich ein Wert von

$$l_r = 62,9\text{cm} \quad (5.23)$$

berechnen. Den Fehler darauf erhält man durch die Anwendung der Gaußschen Fehlerfortpflanzung:

$$s_{l_r} = \sqrt{\left(\frac{\partial l_r}{\partial T_p^2} s_{T_p^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial l_r}{\partial a} s_a\right)^2 + \left(\frac{\partial l_r}{\partial b} s_b\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2s_{T_p^2}}{b}\right)^2 + \left(\frac{s_a}{b}\right)^2 + \left(\frac{T_p^2 - a}{b^2} s_b\right)^2} \quad (5.24)$$

Somit ist die reduzierte Pendellänge

$$l_r = (62,9 \pm 0,7)\text{cm} \quad \pm 1,3\% \quad (5.25)$$

5.2.2 Bestimmung der Messgenauigkeit

Zur Bestimmung der Messgenauigkeit wurde eine mittlere Pendellänge ausgewählt und die Messung acht mal wiederholt, um so das arithmetische Mittel und die Standardabweichung, im folgenden als s_T bezeichnet, auszurechnen.

Die Ergebnisse der Messung können Tabelle 6 entnommen werden.

mathematisches Pendel (Bestimmung der Messgenauigkeit)				
Messung	10T/s	T/s	arithm. Mittel /s	1,38
1	13,79	1,38	Varianz /s ²	2,53E-05
2	13,79	1,38	Standardabw. (s _T) /s	0,01
3	13,86	1,39	Abweichung Mittelwert /s	0,002
4	13,69	1,37		
5	13,73	1,37		
6	13,8	1,38		
7	13,78	1,38		
8	13,79	1,38		

Tabelle 6: Messsergebnisse zur Bestimmung der Messgenauigkeit

von was?

5.2.3 Amplitudenabhängigkeit

Bei der Messreihe zur Untersuchung der Amplitudenabhängigkeit wurden die Periodendauern von neun verschiedenen Amplituden im Bereich von 5° bis 45° gemessen. Die Messergebnisse sind in Tabelle 7 zu finden.

mathematisches Pendel (Amplitudenabhängigkeit)								0,009	
Amplitude/ $^\circ$	T/s	T/s	Amplitude am Ende/ $^\circ$	Mittelwert Amplitude	φ /rad	φ^2 /rad ²	s_φ /rad	s_{φ^2} /rad ²	s_T /s
5	13,73 (10T)	1,37	5	5	0,09	0,0081	0,00162	0,005026714	
10	13,84 (10T)	1,38	10	10	0,17	0,0289	0,00306	0,005026714	
15	13,77 (10T)	1,38	15	15	0,26	0,0676	0,00468	0,005026714	
20	6,9 (5T)	1,38	20	20	0,35	0,1225	0,0063	0,02	
25	4,04 (3T)	1,35	24	24,5	0,43	0,1849	0,00774	0,033333333	
30	1,29 (1T)	1,29	29	29,5	0,51	0,2601	0,00918	0,1	
35	1,34 (1T)	1,34	33,5	34,25	0,6	0,36	0,0108	0,1	
40	1,27 (1T)	1,27	38	39	0,68	0,4624	0,01224	0,1	
45	1,33 (1T)	1,33	42	43,5	0,76	0,5776	0,01368	0,1	

s_A ?

Tabelle 7: Messergebnisse zur Messreihe der Amplitudenabhängigkeit

gleiche
Nachkomma-
stellen!

Die Amplitude wird dabei von Grad in Radiant umgerechnet und die zugehörigen Fehler werden ermittelt. *wie?*

Der Fehler auf T kann dabei jedoch nicht ohne weiteres von der Messreihe zur Bestimmung der Messgenauigkeit übernommen werden, da nicht bei jeder Messung die selbe Anzahl an Periodendauern gemessen wurden. Daher wurde er lediglich für die ersten drei Messungen herangezogen, da dort zehn Periodendauern gemessen wurden. Für diese Werte kann s_T verwendet werden, da die Pendellänge beibehalten wurde.

Für die restlichen Werte wird der Fehler auf die Zeitmessung s_t herangezogen, der als $s_t = 0,1s$ gewählt wurde. Dieser wurde für die zwei Messungen von drei und fünf Periodendauern durch die Anzahl der Periodendauern geteilt und für die restlichen Messungen von einer Periodendauer übernommen.

Der Fehler s_{φ^2} wird dabei über

$$s_{\varphi^2} = 2 \cdot \varphi \cdot s_\varphi \quad \checkmark \quad (5.26)$$

berechnet.

Anschließend werden die gemessenen Werte in ein Diagramm eingezeichnet, wobei φ^2 auf die x-Achse und T auf die y-Achse aufgetragen wird. Dies ist in Abbildung 4 zu sehen, wobei dort auch schon die Ausgleichsgerade eingetragen ist.

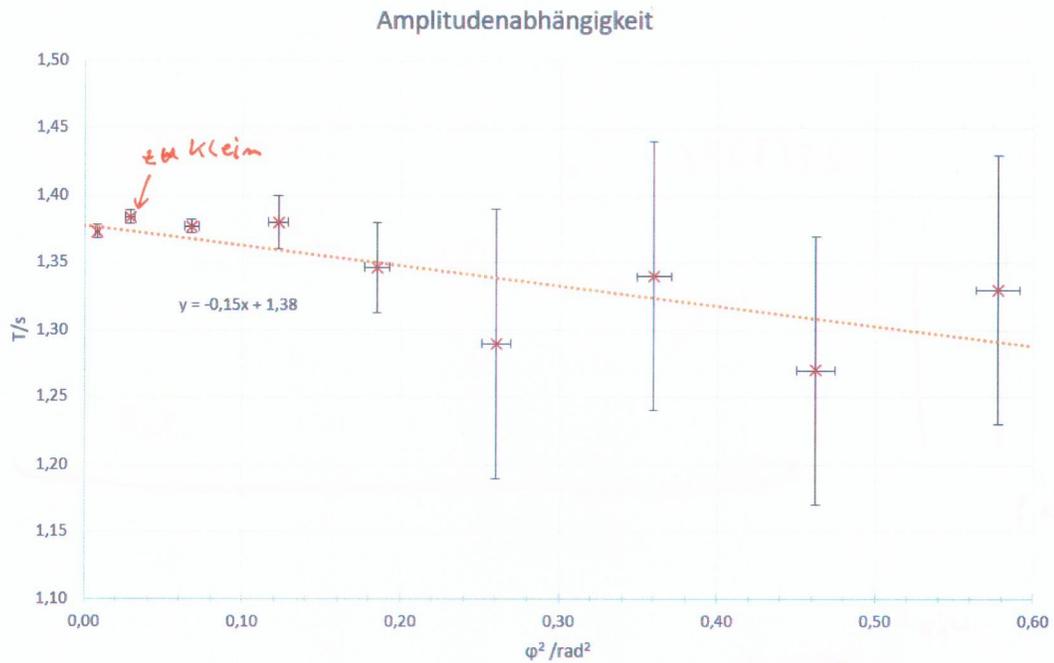


Abbildung 4: Werte der Untersuchung der Amplitudenabhängigkeit + Gerade

Auch hier wird, wie vorher schon erläutert, eine lineare Regression durchgeführt, um die Steigung und den Achsenabschnitt zu bestimmen. Diese kann in Tabelle 8 nachvollzogen werden.

lineare Regression									
$x_i = \varphi^2 / \text{rad}^2$	$y_i = T/s$	$x_i - x_m / \text{rad}^2$	$(x_i - x_m)^2 / \text{rad}^4$	$(x_i - x_m) * y_i / \text{rad}^2 \text{s}$	$a + bx_i$	v_i	v_i^2		
0,01	1,37	-0,22	0,05	-0,30	1,38	-0,0035	0,0000		
0,03	1,38	-0,20	0,04	-0,28	1,37	0,0106	0,0001		
0,07	1,38	-0,16	0,03	-0,22	1,37	0,0094	0,0001		
0,12	1,38	-0,11	0,01	-0,15	1,36	0,0205	0,0004		
0,18	1,35	-0,05	0,00	-0,06	1,35	-0,0035	0,0000		
0,26	1,29	0,03	0,00	0,04	1,34	-0,0490	0,0024		
0,36	1,34	0,13	0,02	0,17	1,32	0,0159	0,0003		
0,46	1,27	0,23	0,05	0,29	1,31	-0,0388	0,0015		
0,58	1,33	0,35	0,12	0,46	1,29	0,0384	0,0015		
Summe	Summe	Summe	Summe	Summe	Summe	Summe	Summe	Summe	
2,07	12,09	0,00	0,32	-0,05	12,09	0,0000	0,0063		
Mittel	Mittel								
0,23	1,34		Varianz	0,0009					
			Standardabw.	0,03					
b /s/rad²	-0,15		Unsicherheit s_b	0,0527					
a /s	1,38		Unsicherheit s_a	0,02					

Tabelle 8: lineare Regression der Amplitudenabhängigkeit

Die Größen a und b werden dabei benötigt, um den theoretischen Ansatz der Näherung der Periodendauer bei einer Auslenkung größer als $\varphi = 10^\circ$ zu überprüfen. Diese Näherung ist gegeben durch

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 \right). \quad (5.27)$$

Da dies einer Geradengleichung entspricht, kann direkt abgelesen werden, dass T_0 hier den Achsenabschnitt darstellt. Somit gilt

$$T_0 = a = (1,38 \pm 0,02)\text{s}. \quad \checkmark \quad (5.28)$$

Die Steigung beträgt hier

$$b = (-0,15 \pm 0,05)\text{s/rad}^2. \quad (5.29)$$

Durch die theoretische Näherung erhält man außerdem ein weiteres Ergebnis für b , da

$$b' = \frac{T_0}{16} = \frac{a}{16} = 0,086\text{s/rad}^2 \quad (5.30)$$

mit dem Fehler

$$s_{b'} = b' \cdot \frac{s_a}{a} = 0,001\text{s/rad}^2. \quad (5.31)$$

Somit ist wird der Wert

$$b' = (0,086 \pm 0,001)\text{s/rad}^2, \quad \checkmark \quad (5.32)$$

was nicht mit der berechneten Steigung b aus der linearen Regression übereinstimmt.

5.3 Steinerscher Satz

Zunächst wird die Schwingungsdauer ohne aufgelegte Kreisscheibe gemessen. Aus dieser Messung kann danach mit Hilfe folgender Formel der Quotient $I_{00}/^{\circ}D$ berechnet werden:

$$d = \frac{I_{00}}{^{\circ}D} = \frac{T^2}{4\pi^2}. \quad (5.33)$$

Dabei wird der errechnete Quotient als d definiert. Der Fehler auf diesen Quotient kann mit Fehlerfortpflanzung durch

$$s_d = d \cdot \frac{s_T}{T} \quad s_d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial T} s_T\right)^2} = 2 \frac{T}{4\pi^2} s_T \quad (5.34)$$

berechnet werden. Die daraus resultierenden Ergebnisse sind Tabelle 9 zu entnehmen.

Steinerscher Satz (ohne Scheibe)									
Messung	5T/s	T/s	T ² /s ²	s _T /s	s _T ² /s ²	d(=I ₀₀ / [°] D)/cm ²	s _d /cm ²		
1	10,59	2,12	4,49	0,1	0,42	0,11	0,01		
2	10,63	2,13	4,52	0,1	0,43	0,11	0,01		
3	10,72	2,14	4,60	0,1	0,43	0,12	0,01		
4	10,63	2,13	4,52	0,1	0,43	0,11	0,01		
5	10,63	2,13	4,52	0,1	0,43	0,11	0,01		
6	10,74	2,13	4,61	0,1	0,43	0,12	0,01		
						Mittelwert	0,12		

Woher s_T?

erst mitteln, dann d
Tabelle 9: Messreihe ohne Kreisscheibe

Im Anschluss wird das Trägheitsmoment der Kreisscheibe I_s bestimmt, indem man die Masse m und den Radius r abmisst.

Dabei kann I_s und dessen Fehler wie folgt berechnet werden:

$$I_s = \frac{1}{2}mr^2 \quad (5.35)$$

$$s_{I_s} = \frac{1}{2}mr^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{s_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{s_m}{m}\right)^2} \quad (5.36)$$

Aus Tabelle 10 sind alle dafür benötigten Werte abzulesen.

Trägheitsmoment aus Abmessungen	
Masse /g	1156,4
Radius/cm	5,5
s _m /g	0,5
s _r /cm	0,1
Trägheitsmoment/gcm ²	17491
s _{I_s} /gcm ²	450

Tabelle 10: Trägheitsmoment der Scheibe durch Abmessung

Danach wurde eine weitere Messreihe durchgeführt, bei der die Schwingungsdauer T für verschiedene Abstände a zwischen dem Mittelpunkt der Drehscheibe und dem der Kreisscheibe gemessen wurde, zu sehen in Tabelle 11.

Steinerscher Satz (mit Scheibe)		
Abstand a/cm	5T/s	T/s
0	11,92	2,38
1,5	12,2	2,44
3	12,81	2,56
4,5	13,57	2,71
6	14,66	2,93
7,5	15,96	3,19

NS
Fehler?

Tabelle 11: Messergebnisse mit Kreisscheibe in verschiedenen Abständen

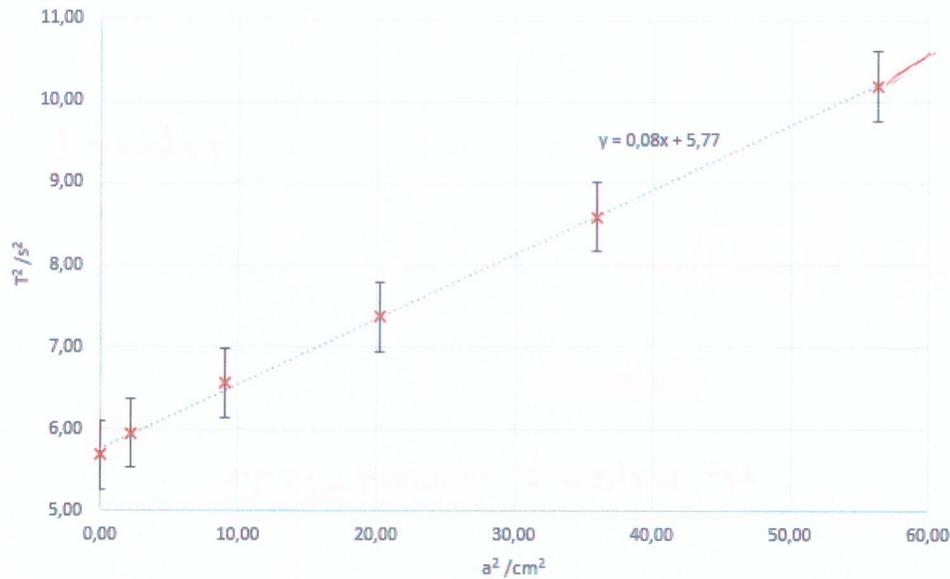
Nun werden die Werte von T^2 gegen a^2 in ein Diagramm aufgetragen und mittels linearer Regression eine Gerade gebildet. Es wird bei dieser linearen Regression gleich vorgegangen wie beim mathematischen Pendel zuvor. Diese kann in Tabelle 12 nachvollzogen werden. Das Diagramm mit den eingetragenen Werte und der Ausgleichsgerade ist in Abbildung 5 zu sehen.

σ_{T^2} wozu? skaliert mit T?

Lineare Regression									
$x_i = a^2 / \text{cm}^2$	$y_i = T^2 / \text{s}^2$	$x_i - x_m / \text{cm}^2$	$(x_i - x_m)^2 / \text{cm}^4$	$(x_i - x_m) \cdot y_i / \text{cm}^2 \text{s}^2$	$a + b x_i$	v_i	v_i^2		
0,00	5,68	-20,63	425,39	-117,22	5,77	-0,0830	0,0069		
2,25	5,95	-18,38	337,64	-109,40	5,94	0,0098	0,0001		
9,00	6,56	-11,63	135,14	-76,30	6,48	0,0881	0,0078		
20,25	7,37	-0,38	0,14	-2,76	7,36	0,0033	0,0000		
36,00	8,60	15,38	236,39	132,17	8,60	-0,0072	0,0001		
56,25	10,19	35,63	1269,14	362,98	10,20	-0,0111	0,0001		
Summe	Summe	Summe	Summe	Summe	Summe	Summe	Summe	Summe	
123,75	44,35	0,00	2403,84	189,47	44,35	0,0000	0,0149		
Mittel	Mittel								
20,63	7,39			0,004					
				0,06					
$b/s^2 / \text{cm} \text{ ?}$	0,08			0,001					
$a/\text{cm s}^2 \text{ ?}$	5,77			0,03					

Tabelle 12: Tabelle zum Erstellen der Linearen Regression

Steinerscher Satz

Abbildung 5: Linearer Zusammenhang zwischen T^2 und a^2

Aus der berechneten Gerade kann nun mit Hilfe der Masse m und folgendes Zusammenhangs

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I_{00}}{D} \text{ mit } I_{00} = ma^2 \quad (5.37)$$

$$\Rightarrow b = \frac{4\pi^2 m}{D} \quad \checkmark \quad I = I_{00} + I_{\text{Zyl}} + m_{\text{Zyl}} a^2 \quad (5.38)$$

$$\Rightarrow D = \frac{4\pi^2 m}{b} \quad \checkmark \quad (5.39)$$

der Wert der Richtkonstanten berechnet werden.

Um den Fehler von $^{\circ}D$ zu bestimmen wird Fehlerfortpflanzung verwendet:

$$s_{^{\circ}D} = ^{\circ}D \cdot \sqrt{\left(\frac{s_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{s_b}{b}\right)^2} \quad (5.40)$$

Daraus folgt für den Wert der Richtkonstanten, dass

$$^{\circ}D = (578632 \pm 9149) \text{gcm}^2/\text{s}^2 \quad (5.41)$$

Das Trägheitsmoment bei konzentrischer Anordnung der Scheibe I_0 kann danach mit Hilfe des Achsenabschnitts a ermittelt werden, da folgender Zusammenhang gilt:

$$a = 4\pi^2 \frac{I_0}{^{\circ}D} \quad \checkmark \quad \text{a ist schon vergeben} \quad (5.42)$$

$$\Leftrightarrow I_0 = \frac{a^{\circ}D}{4\pi^2} \quad (5.43)$$

Auch hier kann über Fehlerfortpflanzung die Unsicherheit von I_0 bestimmt werden:

$$s_{I_0} = I_0 \sqrt{\left(\frac{s_{^{\circ}D}}{^{\circ}D}\right)^2 + \left(\frac{s_a}{a}\right)^2} \quad (5.44)$$

Somit folgt für das Gesamtträgheitsmoment I_0

$$I_0 = (84604 \pm 1425) \text{gcm}^2 \quad \checkmark \quad (5.45)$$

Um den Steinerschen Satz überprüfen zu können, ist es zunächst noch notwendig, das Trägheitsmoment der Drehscheibe zu ermitteln. Dies ist über den im ersten Teil berechneten Quotienten d und der Richtkonstante ${}^{\circ}D$ möglich:

$$I_{00} = d \cdot {}^{\circ}D \quad (5.46)$$

$$s_{I_{00}} = I_{00} \sqrt{\left(\frac{s_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{s_{{}^{\circ}D}}{{}^{\circ}D}\right)^2}. \quad (5.47)$$

Die Werte für d und s_d können dabei aus Tabelle 9 entnommen werden. Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment der Drehscheibe

$$I_{00} = (66650 \pm 6390) \text{gcm}^2. \quad (5.48)$$

Mit den errechneten Trägheitsmomenten ist es nun möglich, auch das Trägheitsmoment der Scheibe I_s zu ermitteln, da nach dem ~~Steinerschen Satz~~ gelten muss:

$$I_s = I_0 - I_{00}. \quad (5.49)$$

Damit und mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung

$$s_{I_s} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_s}{\partial I_{00}} s_{I_{00}}\right)^2 + \left(\frac{\partial I_s}{\partial I_0} s_{I_0}\right)^2} = \sqrt{s_{I_{00}}^2 + s_{I_0}^2}. \quad (5.50)$$

folgt für das Trägheitsmoment der Scheibe demnach

$$I_s = (17954 \pm 6547) \text{gcm}^2. \quad (5.51)$$

6 Zusammenfassung und Diskussion

6.1 Physikalisches Pendel

Aus den Abmessungen des physikalischen Pendels ergibt sich eine reduzierte Pendellänge von

$$l_r = (64,1 \pm 0,1) \text{ cm} . \quad (6.1)$$

6.2 Abhängigkeit des mathematischen Pendels von der Pendellänge

Aus den Messungen hat sich ergeben, dass ein linearer Zusammenhang zwischen der Länge des Pendels und der quadratischen Periodendauer vorliegt. Die hier gemessenen Werte streuen sehr wenig, da jedoch auch die abgeschätzten Fehler sehr klein sind, scheinen diese angemessen abgeschätzt zu sein.

Auch der aus den Messergebnissen ermittelte Wert der Standardabweichung mit $s_{T^2} = (0,01 - 0,02) \text{ s}^2$ stimmt gut mit dem durch die lineare Regression berechneten Wert von $s = 0,01 \text{ s}^2$ überein. Der ermittelte Wert für die Erdbeschleunigung beträgt

$$(967 \pm 6) \text{ cm/s}^2 . \quad (6.2)$$

Verglichen mit einem Literaturwert von 981 m/s^2 ¹ liegt der durch die Messungen erhaltene Wert innerhalb des dreifachen Fehlerbereichs. *Bedeutung? Ursache?*

Bei der Bestimmung der reduzierten Pendellänge mittels linearer Regression erhält man einen Wert von

$$l_r = (62,9 \pm 0,7) \text{ cm} . \quad (6.3)$$

Beim Vergleich mit der reduzierten Pendellänge, die aus den Werten des physikalischen Pendels bestimmt worden ist, liegen die Werte innerhalb eines Fehlerbereichs von 2σ . Dabei muss auch noch berücksichtigt werden, dass das physikalische Pendel nicht am äußersten Ende, sondern ungefähr 1cm weiter unten erst befestigt wurde, sodass der Mittelpunkt des Pendels und der Schwerpunkt des Stabs nicht exakt miteinander übereinstimmen. Dies könnte ein Grund für diese Abweichung sein. ✓ *geteilt*

6.3 Bestimmung der Messgenauigkeit des mathematischen Pendels

Bei der Bestimmung der Messgenauigkeit ist eine Standardabweichung von

$$s_T = 0,01 \text{ s} \quad (6.4)$$

berechnet worden. Der Wert ist durch die geringe Streuung der Messwerte sehr klein.

Vergleich mit 3

6.4 Amplitudenabhängigkeit des mathematischen Pendels

Bei der Untersuchung der Amplitudenabhängigkeit fällt zunächst einmal auf, dass die durch die lineare Regression berechnete Steigung von

$$b = (-0,15 \pm 0,05) \text{ s/rad}^2 \quad (6.5)$$

lediglich im 5σ -Bereich mit der durch die Korrektur der großen Amplituden ermittelten Steigung von

$$b' = (0,086 \pm 0,001) \text{ s/rad}^2 \quad (6.6)$$

¹<http://www.techniklexikon.net/d/erdbeschleunigung/erdbeschleunigung.htm>; aufgerufen am 21.09.2017; 21:26 Uhr

übereinstimmt. Die Steigung sollte positiv sein, hier ist sie jedoch negativ. Dies kann vermutlich dadurch erklärt werden, dass es besser gewesen wäre, für alle Auslenkungen zehn Periodendauern zu messen anstatt von einer am Ende. Dadurch ist der Zeitfehler auf die größeren Amplituden wesentlich höher, wodurch die hier zu sehenden Abweichung möglicherweise zustande kam.

T_0 ?

6.5 Steinerscher Satz

Bei der Auswertung zum Steinerschen Satz wurde das Trägheitsmoment der Kreisscheibe I_s auf zwei unterschiedliche Weisen berechnet.

Zum Einen über die Abmessungen von Masse m und Radius r

$$I_{s1} = (17491 \pm 450) \text{gcm}^2 \quad (6.7)$$

und zum Anderen über die lineare Regression und den Steinerschen Satz

$$I_{s2} = (17954 \pm 6547) \text{gcm}^2 \quad (6.8)$$

Die beiden Endwerte liegen innerhalb des einfachen Fehlers, weshalb der Steinersche Satz damit innerhalb unserer Messgenauigkeit verifiziert werden konnte.

Bei der durchgeführten linearen Regression liegen alle Messwerte innerhalb des einfachen Fehlers, weshalb der Fehler auf die Zeit s_{T^2} vermutlich zu groß abgeschätzt wurde, was in Bezug auf den Fehler zu unnatürlich exakten Messergebnissen führt.

\mathcal{L}

Denkzettel
HIER könnte
IHRE Note stehen

7 Anhang

Versuch 17

20.03.2017

Physikalisches PendelLänge Stab: ges. Länge $L = (96,1 \pm 0,2) \text{ cm}$ Befestigung: $(1,1 \pm 0,1) \text{ cm}$ von oben $\rightarrow l_0 = 95 \text{ cm}$

Messung	$\Delta T / s$	$(\varphi = 10^\circ) \rightarrow \text{Fehler: } \pm 0,5^\circ$
1	15,98	
2	16,02	
3	16,02	Berechnung der reduzierten Pendellänge $l_0 = 64,07 \text{ cm}$
4	16,03	
5	15,96	Fehler auf Auslenkung: $\pm 0,5^\circ$
6	15,99	
7	15,97	
8	16,00	
9	16,02	
10	15,95	

Mathematisches Pendel

Länge/cm	$\Delta T / s$	ΔT in s
32,5	11,45	
35	11,91	
41,2	12,99	
44,9	13,50	
56,4	15,20	
$l_0 = 64,1$	16,10	
70	16,85	
80,6	18,13	

Abhängigkeit von der Pendellänge

Fehler auf Länge: $\pm 0,2 \text{ cm}$
Fehler auf Zeit: $\pm 0,05 \text{ s}$

Messung \times 10 T/s $L = 46,3, \varphi = 10^\circ$

1	13,79
2	13,79
3	13,86
4	13,69
5	13,73
6	13,80
7	13,78
8	13,79

Bestimmung der Messgenauigkeit

	$\varphi / ^\circ$	10 T/s	Amplitude am Ende 10°
1	5	13,73 (10T)	5
2	10	13,84 (10T)	10
3	15	13,77 (10T)	15
4	20	6,90 (5T)	20
5	25	4,04 (5 3T)	24
6	30	1,29 (1T)	29
7	35	1,34 (1T)	33,5
8	40	1,27 (1T)	38
9	45	1,33 (1T)	42

Amplitudenabhängigkeit

Fehler: $\pm 0,5^\circ$

Steinerscher SatzMasse der Scheibe: $m = 456,4\text{g} \pm 0,5\text{g}$ Radius der Scheibe: $r = 5,5\text{cm} \pm 0,1\text{cm}$

Messung	5 5T	ohne Scheibe
1	10,59	
2	10,63	
3	10,72	
4	10,63	
5	10,63	
6	10,74	

Abstand a_{cm}	5T/13	mit Scheibe
0	11,92	
1,5	12,20	
3	12,81	
4,5	13,57	
6	14,66	
7,5	15,96	

VT 