Mathematisches und physikalisches Pendel, Steinersscher Satz (Versuch 17)

23.09.16

Gliederung:

1. Einleitung

Einleitender Satz bzw. bessere Beschreibung der Motivation des Experiments

1.1 Ziel des Versuchs

Teil A: Bestimmen der Schwingungsdauer T_p eines physikalischen Pendels.

Teil B: Bestimmen der Schwingungsdauer T_m eines mathematischen Pendels in Abhängigkeit der Pendellänge l_m um den theoretischen Zusammenhang zwischen Periode und Länge zu überprüfen. ~~Außerdem soll die statistische Unsicherheit der Messung der Schwingungsdauer bestimmt werden und~~ Die Schwingungsdauer soll als Funktion der Schwingungsamplitude gemessen werden um den theoretischen Verlauf zu verifizieren.

Teil C: Die Gültigkeit des Steinerschen Satz ist mit Hilfe eines Drehpendels zu überprüfen.

1.2 Versuchsaufbau und Durchführung

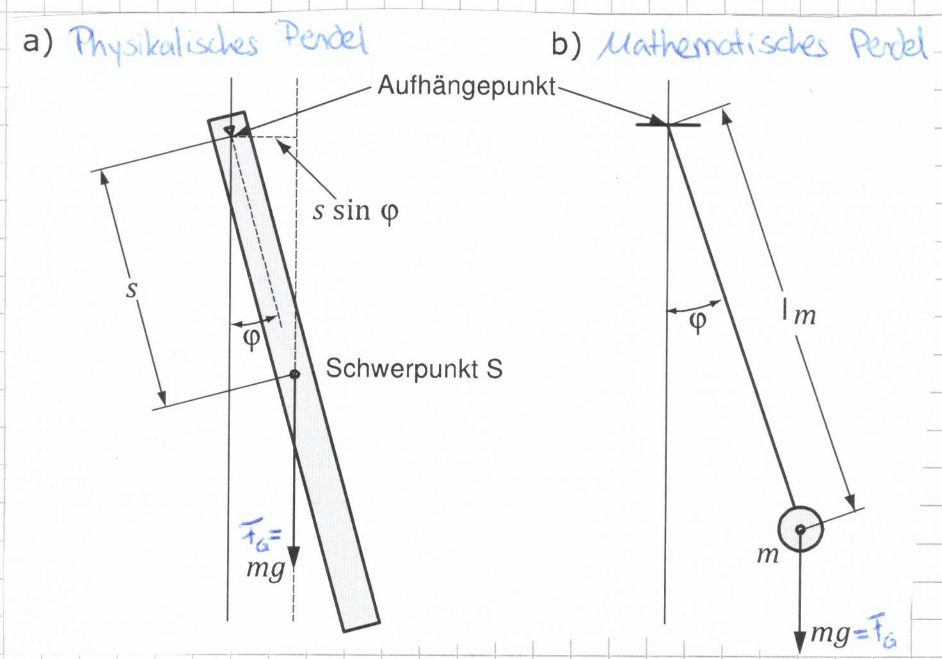
Teil A: Physikalisches Pendel

Bei dem Physikalischen Pendel ~~wird~~ werden zehnmal ~~10~~ zehn Perioden des Pendels gemessen um die Schwingungsdauer T_p zu berechnen. Dazu ist ein Stab an einem Aufhängepunkt befestigt der hin und her schwingen kann. Außerdem ist am oberen Ende eine Anzeige, an der Halterung, die anzeigt um wie viel ~~Gra~~ Grad ~~er~~ es ausgelenkt wird, befestigt.

Teil B: Mathematisches Pendel

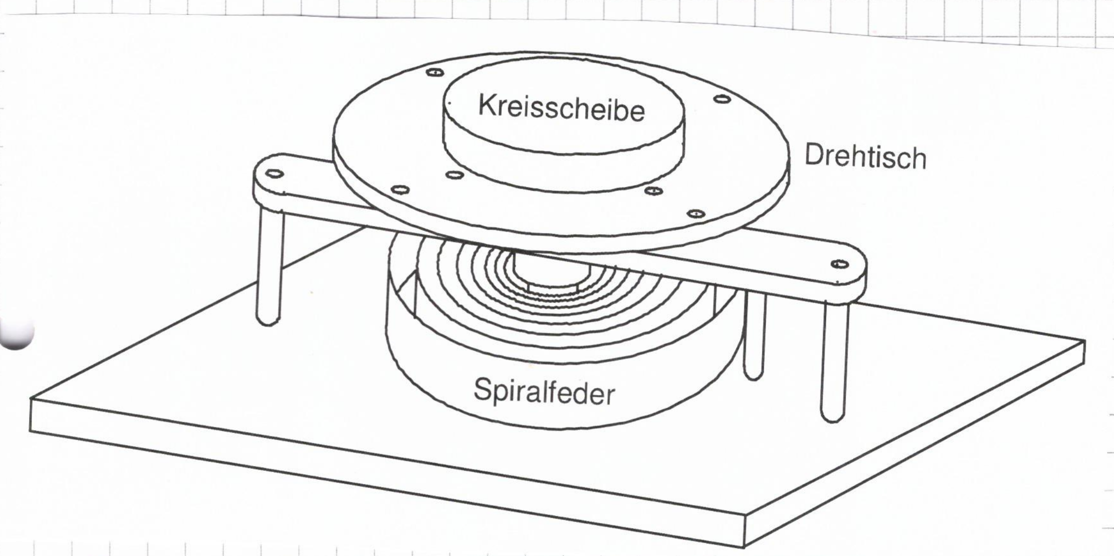
Das Mathematische Pendel besteht aus einer Kugel die an einem Seil befestigt ist. Das Seil ~~ist auf beiden seiten~~ geht einmal durch die Kugel durch, wodurch die Kugel beim Schwingen nicht so sehr ~~sch~~ auf die seiten pendelt. Auch hier ist eine Anzeige, die die Auslenkung der Kugel in Grad anzeigt.
In einer ersten Messung ist die Schwingungsdauer von verschiedenen ~~Drei~~ Pendellängen l_m zu messen. Dazu misst man für zehn verschiedene Längen zehn Schwingungen.⊗ In einer nächsten Messung wird eine Pendellänge zehn Mal mit jeweils zehn Schwingungen gemessen. Daraus wird dann die statistische Unsicherheit der Schwingungsdauer bestimmt. Als dritte Messung wird dann für eine Pendellänge die Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Amplitude gemessen. Dazu werden wieder zehn Messungen mit jeweils ~~10~~ zehn Schwingungsdauern gemessen, wobei jede Messung eine andere Anfangsamplitude zwischen 10° und 50° hat.

⊗ Daraus kann durch eine grafische Darstellung gegen l_m der erwartete theoretische Zusammenhang überprüft werden. ~~Aus~~ Aus der Grafik kann l_r die reduzierte Pendellänge des physikalischen Pendels bestimmt werden. Diesen Wert kann man mit der Abmessung des Stabs vergleichen.



Quelle?

Teil C: Drehpendel



Draufsicht wäre besser → „sinvolle" Skizzen

Bei diesen Versuch verwenden wir ein Drehpendel. Dieses besteht aus einer Spiralfeder die an einem Drehtisch befestigt ist. Auf dem ~~aus einer Spiral~~ Drehtisch ist eine Kreisscheibe die durch Löcher in dem Drehtisch daran befestigt werden kann. Durch eine Auslenkung des Drehtisches um 90° kann man die ~~Perioden~~ Schwingungsdauern bestimmen. Auch hier werden jeweils 10 ~~Schwi~~ Perioden gemessen, wodurch die Messung genauer wird. Die Kreisscheibe wird immer an anderen Position gelegt. ~~und~~ Einmal wird der ~~Scheibe~~ Drehtisch auch ohne Gewicht ausgelenkt, und die Schwingungsdauer gemessen.

~~Aus~~ Daraus kann man ~~nun~~ die Gültigkeit des Steinerschen Satz überprüfen, indem man das Hauptträgheitsmoment des Körpers sowie das Richtmoment des Drehtisches bestimmt. Das Trägheitsmoment soll außerdem noch mit der Berechnung aus der Abmessungen und der Gewicht verglichen werden.

1.3 Physikalische Grundlagen

Teil 1: Physikalisches Pendel:

Der Schwerpunkt S lässt sich bei einer Auslenkung φ bei einem physikalischen Pendel durch den Ortsvektor

Quelle?

$$\vec{r}_S = \begin{pmatrix} s\cdot\sin\varphi \\ -s\cdot\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

beschreiben. Die Kraft die am Schwerpunkt wirkt ist durch

$$\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

gegeben. Somit ergibt sich für das Drehmoment M:

$$|\vec{M}| = |\vec{r}_S \times \vec{F}_G| = -m\cdot g\cdot \sin\varphi\cdot s. \qquad (3)$$

Das Drehmoment lässt sich auch durch den Trägheitsmoment I zu

$$M = I\cdot\ddot{\varphi}. \qquad (4)$$

ausdrücken. Mit Gleichung (3) folgt somit:

$$I\cdot\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi\, s, \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{mgs}{I}\sin\varphi = 0. \qquad (6)$$

Mit der Kleinwinkelnäherung $\sin\varphi \approx \varphi$ gilt: Gültigkeitsb…

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{I}\varphi = 0. \qquad (7)$$

Durch den Ansatz $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \varphi_{Phase})$ kann die Differentialgleichung gelöst werden. φ_0 gibt dabei die Amplitude an. Für die Eigenfrequenz folgt daraus:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgs}{I}}. \qquad (8)$$

Durch $T = \frac{2\pi}{\omega}$ können wir nun die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels angeben:

$$T_{Phy} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgs}}. \qquad (9)$$

Nach der Definition für das Trägheitsmoment folgt $I_{Stab} = \frac{1}{3}ml^2$. Und für $s = \frac{l}{2}$ ergibt sich die Periodendauer zu

$$T_{Phy} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}. \qquad (10)$$

Teil B: mathematisches Pendel

Die Kugel am Ende eines masselosen Fadens, mit der Länge l_m bis zum Aufhängepunkt, wird als Punktmasse mit der Masse m angenommen. Auch hier gilt die Gleichung (9). ~~Nach~~ ~~der~~ Definition für ~~das~~ Trägheitsmoment gilt hier: ~~I~~

$$I_m = m l_m^2 \tag{11}$$

Außerdem gilt $s = l_m$, womit sich für die Periodendauer des mathematischen Pendels

$$T_{mat} = 2\pi \sqrt{\frac{l_m}{g}} \tag{12}$$

ergibt. Da das Schwingungsverhalten eines mathematischen Pendels viel einfacher zu beschreiben ist, ~~daher~~ ist es interessant die Länge l_R herauszufinden, welche das mathematische Pendel haben muss, um das gleiche Schwingungsverhalten wie ein physikalisches Pendel aufzuweisen. l_R heißt auch reduzierte Länge.
Aus ~~to~~ Gleichsetzen von (10) und (12) folgt:

$$2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_R}{g}} \tag{13}$$

$$\Rightarrow l_R = \frac{2}{3} l \tag{14}$$

Somit beträgt $\frac{2}{3}$ der Länge des physikalischen Pendels l_R des mathematischen.

Für große Auslenkungen muss man eine andere Näherungsformel benutzen, da die Kleinwinkelnäherung dort nicht mehr gilt. Die Schwingungsdauer wird dann durch eine Potenzreihe

$$T_G = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \frac{9}{64} \sin^4\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \dots\right) \tag{15}$$

beschrieben, wobei höhere Terme vernachlässigbar sind. T_0, was durch Kleinwinkelnäherung bestimmt wird, ist eindeutig kleiner als T, da auf die 1 nur positive Werte addiert werden. Selbst bei $\varphi_0 = 50°$ macht der Term $\sin^4(\frac{\varphi_0}{2})$ nur ungefähr 5% des Korrekturterms aus, woraus sich folgendes ergibt:

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 + \dots\right) \tag{16}$$

Teil C: Drehpendel

Das Trägheitsmoment I ist durch

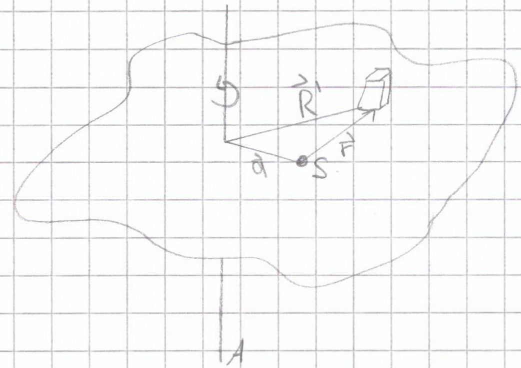
$$I = \int_V \rho r^2 dV = \int_V r^2 dm \tag{17}$$

definiert. Wobei V das Volumen angibt, r der Abstand zur Drehachse ist und ρ die Dichte.
Zur Quantifizierung braucht es zwei Größen, die der Masseverteilung und Rotationsachse. Der Steinersche Satz beschreibt den Trägheitsmoment eines Körpers, der sich nicht um die Achse seines Schwerpunkts dreht. Dabei kann der Körper auch unregelmäßig und inhomogen sein.
Für die Kreisscheibe in unserem Fall gilt:

$$I = \frac{1}{2} m r^2 \tag{17A}$$

Genau genommen hat ρ zu „viel" Information" wir brauchen nur 3 Zahlen nicht die Ganze Fkt ρ.

5



$$I_A = \int \rho \, \vec{R}'^2 \, dV = \int \rho \, (\vec{r} + \vec{a})^2 \, dV \qquad (18)$$

Mit $dV \cdot \rho = dm$ gilt weiter:

$$I_A = \int_V (\vec{r} + \vec{a})^2 \, dm$$

$$= \underbrace{\int \vec{r}^{\,2} \, dm}_{\text{Trägheitsmoment im Schwerpunktsystem } I_S} + \underbrace{2\vec{a} \int \vec{r} \, dm}_{\text{=0, da die Masse gleichmäßig um Schwerpunkt verteilt ist und sich somit alles weghebt}} + \underbrace{\vec{a}^2 \int dm}_{a^2 \cdot m} \qquad (19)$$

Somit lautet der Steinersche Satz:

$$I_A = I_S + a^2 m \qquad (20)$$

(20) ist unabh. von ρ.

Daran sieht man, dass der Trägheitsmoment eines Punktes welcher nicht im Schwerpunktsystem liegt, sich quadratisch mit dem Abstand zum Schwerpunkt vergrößert.
Das Drehmoment der Spiralfeder wirkt der Auslenkung φ des Drehtisches entgegen. D gibt die Richtkonstante der Feder an:

$$M = -D \cdot \varphi \qquad (21)$$

Mit (4) folgt:

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{I} \varphi = 0 \qquad (22)$$

Dies wird mit dem Ansatz $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \varphi_{Phase})$ gelöst und für die Schwingungsdauer des Drehpendels mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ergibt sich somit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \qquad (23)$$

Das Trägheitsmoment für das ganze Pendel ergibt sich aus der Summe über alle Trägheitsmoment zu

$$I_{Drehpendel} = I_{Drehtisch} + I_{Scheibe} + ma^2 \qquad (24)$$

In der folgenden Tabelle sind wichtige Physikalische Größen der Translations- und Rotationsbewegung gegenübergestellt:

Translation		Rotation	
Ortsvektor	$\vec{x}$	Winkelverschiebung	$\vec{\varphi}$
Geschwindigkeit	$\vec{v}$	Winkelgeschwindigkeit	$\dot{\vec{\varphi}} = \lvert\vec{\omega}\rvert$
Beschleunigung	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}}$	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}$
Masse	m	Trägheitsmoment	I
Kraft	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	Drehmoment	$\vec{M} = I\vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Arbeit	$W = \int \vec{F} dx$	Arbeit	$W = \int \vec{M} d\vec{\varphi}$
$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$		$E_{kin} = \frac{1}{2} I \omega^2$	
Leistung	$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot v$	Leistung	$P = M \cdot \omega$
Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = I\vec{\omega}$

φ ist kein Vektor

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{a} = \vec{r} \times \vec{\alpha}$$

$$\vec{v} = \omega \times \vec{r}$$

Wenn es zu einer sehr großen Reibung kommt ist es sinnvoller sich mit nur einer Schwingungsdauer zufrieden zu geben als so viele Messungen zumachen, obwohl die statistische Unsicherheit dadurch größer wird. Bei uns ist dies aber nicht der Fall weshalb wir mehrere Messungen machen. Sinnvoll wäre es die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels über die Pendellänge mit T^2 aufzutragen. ✓

Ich hätte Kapitel 1.3. vor 1.2. plaziert

2. Messungen

vM 17 — 23.09.2016

Teil A: Physikalisches Pendel

Länge des Stabes bis zum Aufhängepunkt $L_p = 95{,}4\,cm$
(=red. Pendellänge)

Länge oberhalb des Aufhängepunkts $L_R = 1\,cm$

$s_L = 0{,}1\,cm$

Periodendauer, Messgenauigkeit

Messung m	Perioden p	Zeit t /s
1	10	15,96
2	10	16,00
3	10	15,87
4	10	16,09
5	10	16,06
6	10	16,06
7	10	15,93
8	10	16,00

Auslenkung $\varphi \approx 9^\circ$ $s_t = 0{,}5\,s$

n	p	t/s
9	10	15,96
10	10	15,96

Teil B Mathematisches Pendel

1. Abhängigkeit von der Pendellänge

Ungenauigkeit $s_{l_m} = 0{,}2\,cm$

Auslenkung $\varphi = 9^\circ$

Radius $r = 1{,}6\,cm$ $s_r = 0{,}1\,cm$

n	l_m /m	Perioden p	t /s
1	25,1	10	10,31
2	28,5	10	10,90
3	31,4	10	11,43
4	34,2	10	12,00
5	~~45~~ 41,5	10	~~12,93~~ 13,06
6	46,7	10	13,81
7	64,5	10	16,21
8	70,5	10	16,96
9	74,9	10	17,25
10	65,9	10	16,40

2. Bestimmung der Messgenauigkeit

Pendellänge $l_m =$ ~~44,3~~ ~~45~~ 46,1 cm Auslenkung $\varphi = 9^\circ$
$s_{l_m} = 0{,}2$

n	Perioden p	t/s
1	10	13,50
2	10	13,53
3	10	13,75
4	10	13,50
5	10	13,37
6	10	13,53
7	10	13,43
8	10	13,43
9	10	13,40
10	10	13,56

3. Amplitudenabhängigkeit

$l_m = \cancel{44{,}3\,cm}$ 46,1 cm $s_{\varphi_A} = 0{,}5°$ $s_{\varphi_E} = 1°$

n	Periode p	Anfangsamplitude $\varphi_0 / °$	Endamplitude $\varphi_E / °$	t/s
1	10	10	9,5	13,43
2	10	15	14,0	13,40
3	10	20	19,0	13,53
4	10	25	23,5	13,65
5	10	28	26,0	13,59
6	10	32	30,5	13,71
7	10	35	33,5	13,78
8	10	38	36,5	13,81
9	10	41	39,0	13,90
10	10	45	42,5	14,09

C. Steinerscher Satz

Kreisscheibe $m = 1158\,g$ $s_m = 1g$
$b = 1{,}3\,cm$ $s_b = 0{,}1\,cm$
$2r = 12{,}1\,cm$ $s_{2r} = 0{,}1\,cm$

1. Drehtisch ohne Scheibe

Anfangsauslenkung $\varphi_0 = 90°$
$s_{\varphi_0} = 5°$

n	Periode p	Zeit t/s
1	5	~~21,76~~ 10,65
2	5	10,87
3	5	10,90
4	5	10,71
5	5	10,75
6	5	10,71

2. ~~Drehtische~~ Drehtisch mit Scheibe

d ≙ Abstand von Scheibenmittelachse von Drehachse des Tisches
$s_d = 0{,}1\,cm$
Auslenkung = 90°

n	Periode p	d/cm	t/s
1	5	0	11,96
2	5	0	12,03
3	5	0	12,12
4	5	1,5	12,46
5	5	1,5	12,40
6	5	1,5	12,28
7	5	3	12,78
8	5	3	12,87
9	5	3	12,78
10	5	4,5	13,68
11	5	4,5	13,65
12	5	4,5	13,62
13	5	9	17,50
14	5	9	17,46
15	5	9	17,65

VT 23.9.16 M.Re

2.

Teil

Teil

8 10

3. Auswertung

3.1 Teil A: Physikalisches Pendel

Als Erstes ~~haben wir~~ misst man für das physikalische Pendel zehn mal die Schwingungsdauer von zehn Schwingungen.

Hierfür relevante Größen, also die Auslenkung und die Länge des Stabes bis zum Aufhängepunkt, wurden gemessen:

$\varphi = 9°$ $\quad l_p = (95{,}4 \pm 0{,}1)\,\text{cm}$

So entstanden folgende Messwerte:

A1 Physikalisches Pendel		
Messung	10T/s	T/s
1	15,96	1,596
2	16	1,600
3	15,87	1,587
4	16,09	1,609
5	16,06	1,606
6	16,06	1,606
7	15,93	1,593
8	16	1,600
9	15,96	1,596
10	15,96	1,596
Mittelwert	15,96	1,599
Standardabweichung der Einzelmessung		0,007
Standardabweichung des Mittelwerts		0,002

Alle Diagramme und Tabellen wurden mit Excel 2013 erstellt.

Aus diesen Werten wurde der Mittelwert berechnet mit $\overline{T} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} T_i = 1{,}599\,s$

außerdem die Standardabweichung der Einzelmessung $s_T = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (T_i - \overline{T})^2} = 0{,}007\,s$

und die des Mittelwerts $s_{\overline{T}} = \frac{s_T}{\sqrt{10}} = 0{,}002\,s$

$\Rightarrow$ $T = (1{,}599 \pm 0{,}002)\,s$ bei einer Länge von $l_p = (95{,}4 \pm 0{,}1)\,\text{cm}$

~~3.1.1~~ Reduzierte Pendellänge

Aus der Theorie folgt für die reduzierte Pendellänge (Formel (14))

$$l_{red_1} = \frac{2}{3}\, l_p = 63{,}60\ \text{cm}$$

Fehlerberechnung

Aus dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz folgt: $s_{l_{red_1}} = \frac{2}{3} \cdot s_{l_p} = 0{,}7$ ~~cm~~ mm

$\Rightarrow$ $l_{red_1} = (636{,}0 \pm 0{,}7)\,\text{mm}$

Dieser Wert wird in Teil B erneut aufgegriffen werden, um ihn mit dem Ergebnis zu vergleichen, dass mithilfe der Schwingungsdauer gemessen wird.

2

Teil

3.2 Teil B: Mathematisches Pendel

3.2.1 Bestimmung der Messgenauigkeit

Damit die Unsicherheiten ~~unserer~~ der Messungen nicht Außen vor gelassen werden, wurde sozusagen eine Probemessung durchgeführt, für die eine mittlere Pendellänge gewählt wurde, die repräsentativ für alle folgenden Messungen fungiert.

Im Betracht der folgenden Messungen wurde die Länge $l_{mm} = 46,1\,cm$ gewähl

B2. Bestimmung der Messgenauigkeit

n	10T/s	T/s
1	13,50	1,350
2	13,53	1,353
3	13,75	1,375
4	13,50	1,350
5	13,37	1,337
6	13,53	1,353
7	13,43	1,343
8	13,43	1,343
9	13,40	1,340
10	13,56	1,356
Mittelwert		1,350
Standardabweichung		0,011
Stabw. Mittelwert		0,003

Te

Aus den gemessenen Werten folgt das Mittel $\overline{T} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} T_i = 1,35\,s$

mit der Standardabweichung der Einzelmessung $s_T = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(T_i - \overline{T})^2} = 0,011\,s$

und die des Mittelwerts $s_{\overline{T}} = \frac{s_T}{\sqrt{10}} = 0,003\,s.$

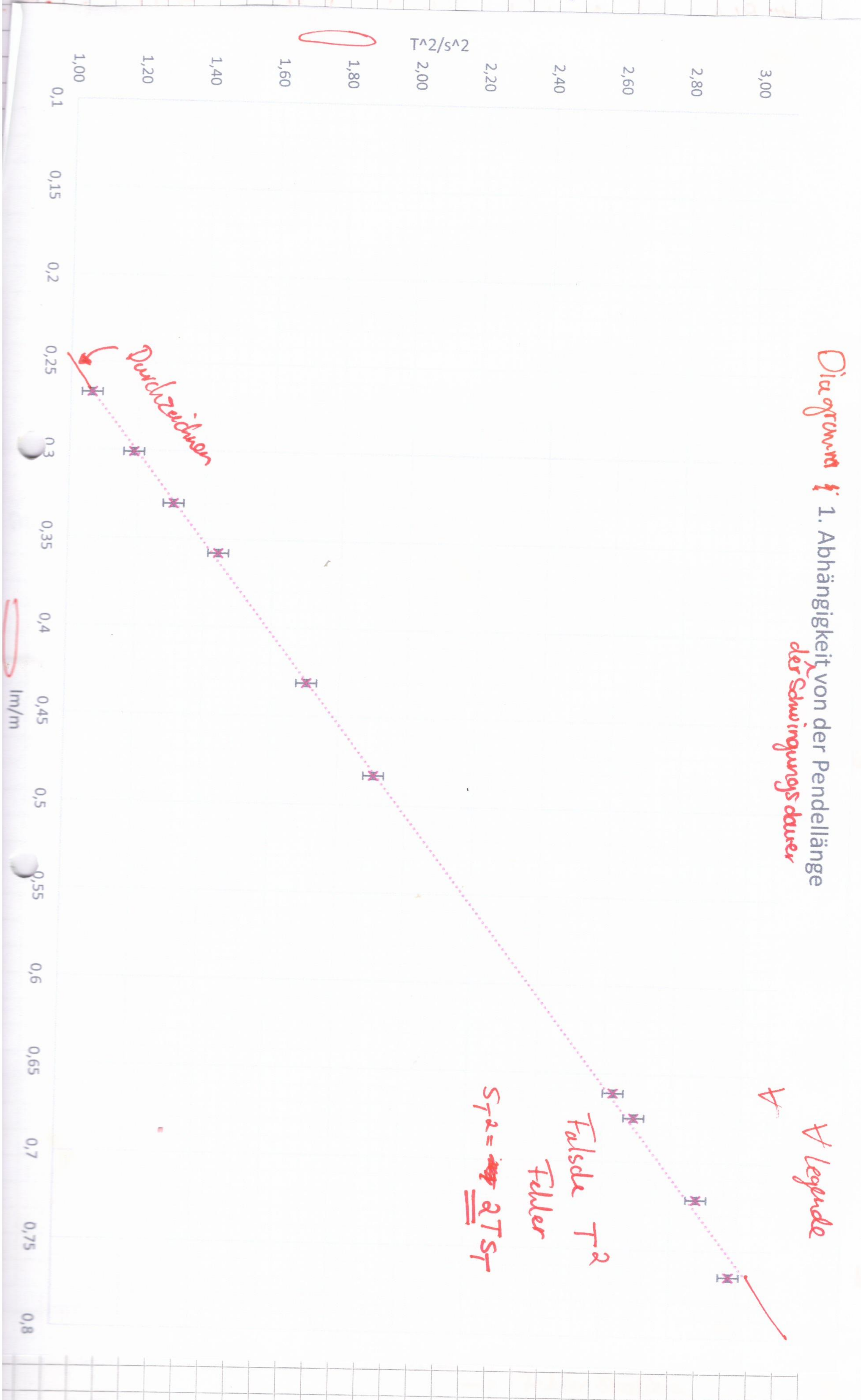
Im nächsten Schritt werden die Messwerte für die Abhängigkeit der Schwingungs von der Pendellänge in ein Diagramm eingetragen.
Der vorletzte oben berechnete Wert fungiert nun als Unsicherheit der Messdaten des Diagramms.
Aufgrund der mittleren Pendellänge bleibt die Abweichung von diesem Fehler für a Pendellängen vertretbar klein.
Auch wenn unser geschätzter Zeitfehler für die Messung größer war, als d Streuung vernachlässigen wir diesen, da aus unseren Messwerten offensichtlich hervorgeht, dass der Zeitfehler zu hoch geschätzt wurde und die Streuung unsere Messung somit besser beschreibt.

Wenn im nächsten Schritt nun T^2 gegen l_m aufgetragen wird, ist zu beacht dass sich der Fehler aus

$$s_{T^2} = \underset{T}{\underline{T}} \cdot s_T \cdot 2 = 0,03\,s^2$$

3.2.2 Abhängigkeit von der Pendellänge

Für 10 verschiedene Längen wurden jeweils 10 Perioden gemessen:



Schon aus dem Diagramm kann entnommen werden, dass der lineare Zusammenhang wohl besteht, jedenfalls tut er dies größtenteils innerhalb seiner Fehler. Die Fehler für l_n sind eingetragen, jedoch recht klein.

Pkt auf Ausgleichsgerade innerhalb vom Fehlern ⇒ > 2/3

B1. Abhängigkeit der Pendellänge

n	Lm/m $\hat{=} x$	10 T/s	$T^2/s^2 \hat{=} y$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})y_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-a-bx_i)^2 / 10^{-6}$
1	0,267	10,31	1,06	-0,23	-0,25	0,05	3
2	0,301	10,90	1,19	-0,20	-0,24	0,04	104
3	0,33	11,43	1,31	-0,17	-0,22	0,03	35
4	0,358	12,00	1,44	-0,14	-0,20	0,02	306
5	0,431	13,06	1,71	-0,07	-0,12	0,00	16
6	0,483	13,81	1,91	-0,02	-0,03	0,00	50
7	0,661	16,21	2,63	0,16	0,43	0,03	174
8	0,721	16,96	2,88	0,22	0,64	0,05	674
9	0,765	17,25	2,98	0,27	0,79	0,07	2296
10	0,675	16,40	2,69	0,18	0,47	0,03	404
Mittel	0,50	13,83	1,98				
Summe					1,27	0,32	4062

b / (s^2/m)	3,93
a/ s^2	0,014
Standardabweichung s/s^2	0,02
Fehler s_b $/(s^2/m)$	0,04
Fehler s_a $/s^2$	0,02

Lineare Regression

Die Werte der Tabelle wurden durch folgende Formeln berechnet:

~~Ach~~ Steigung b $\qquad b = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \qquad s_b = s\sqrt{\frac{1}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$

Achsenabschnitt a $\qquad a = \bar{y} - b\bar{x} \qquad s_a = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$

Standardabweichung der Einzelmessung $\qquad s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum (y_i - bx_i - a)^2}$

Dabei entspricht $y := T^2$ und $x := l_m$ $\qquad y = T^2$ oder $y = T^2/s^2$?

Wie oben ersichtlich erhält man:

$$\Rightarrow \quad b = (3{,}93 \pm 0{,}04)\ \frac{s^2}{m}$$

mit $s = 0{,}02\ s^2$

$$\Rightarrow \quad a = (0{,}014 \pm 0{,}02)\ s^2$$

$(0{,}01 \pm 0{,}02)\ s^2$

Folgend wird der erwartete Zusammenhang über den Vergleich der Erdbeschleunigung geprüft.

Aus Formel (12) folgt $\qquad T_M^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_m$

$$\Rightarrow b = \frac{4\pi^2}{g}$$

$$\Leftrightarrow \quad g = \frac{4\pi^2}{b} = 10{,}04\ \frac{m}{s^2}$$

Fehler auf g: $s_g = g \cdot \frac{s_b}{b} = 0{,}10 \frac{m}{s^2}$

So folgt für die Erdbeschleunigung: $g = (10{,}0 \pm 0{,}1) \frac{m}{s^2}$

Im Vergleich mit dem allgemein gebräuchlichen Referenzwert $g \approx 9{,}81 \frac{m}{s^2}$ entspricht dies einem Fehler von 2,6. Innerhalb diesen Fehlers wird die Proportionalität also bestätigt. Jein, Proportionalität $\hat{=}$ Parameter + Qualitativer Zshg.

Berechnung der reduzierten Pendellänge

Hierfür wird die Schwingungsdauer aus Teil A benötigt: $T_p = (1{,}599 \pm 0{,}002)\,s$.

$\Rightarrow \quad T_p^2 = 2{,}556\, s^2$

Gesucht wird ein l_m, sodass:

$$T_p^2 = b \cdot l_m + a \Rightarrow l_{red_2} = l_m = \frac{T_p^2 - a}{b} = 0{,}646\,m$$

Fehlerrechnung

$$s_{l_{red_2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial l_{red_2}}{\partial T_p^2}\right)^2 s_{T_p^2}^2 + \left(\frac{\partial l_{red_2}}{\partial b}\right)^2 s_b^2 + \left(\frac{\partial l_{red_2}}{\partial a}\right)^2 s_a^2} \qquad \Big| \text{ mit } s_{T_p^2} = 2 \cdot T_p \cdot s_{T_p}$$

$$= \sqrt{\underbrace{\left(\frac{s_{T_p^2}}{b}\right)^2}_{\text{zu vernachlässigen}} + \left(\frac{a - T_p^2}{b^2}\right)^2 s_b^2 + \left(\frac{s_a}{b}\right)^2}$$

$$= 0{,}008\,m$$

$\Rightarrow \quad l_{red_2} = (0{,}646 \pm 0{,}008)\,m$

Der Vergleich mit dem aus den Abmessungen des Stabes berechneten Wert

$$l_{red_1} = (0{,}6360 \pm 0{,}0007)\,m$$

zeigt, dass diese im (im Bezug auf l_{red_1}) zweifachen Fehlerbereich liegen. (→ Diskussion)

3.2.3 Amplitudenabhängigkeit

Um den theoretischen Ansatz aus Formel (16)

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2\right)$$

zu überprüfen, wurden wiederum zehn Messungen à zehn Schwingungen mit verschiedener Ausrichtung φ durchgeführt.
Dazu wurde (siehe Diagramm 2) die Schwingungsdauer einer Schwingung T gegen $\bar{\varphi}^2$ (im Bogenmaß) aufgetragen und dafür der Anfangswert von φ ~~gegen~~ mit dem Endwert von φ ~~aufg~~ gemittelt.

Fehler von $\bar{\varphi}$: $s_{\bar{\varphi}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} s_{\varphi_A}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} s_{\varphi_E}\right)^2} = 0{,}6^\circ$

~~Da wir~~ Da aber $\bar{\varphi}^2$ in Rad aufgetragen wird lautet der Fehler

$$s_{\bar{\varphi}^2} = 2 \cdot \underbrace{\bar{\varphi} \cdot s_{\bar{\varphi}}}_{\text{wurden vor dem Einsetzen ins Bogenmaß umgerechnet}} = 0{,}010 \, \cancel{Rad}$$

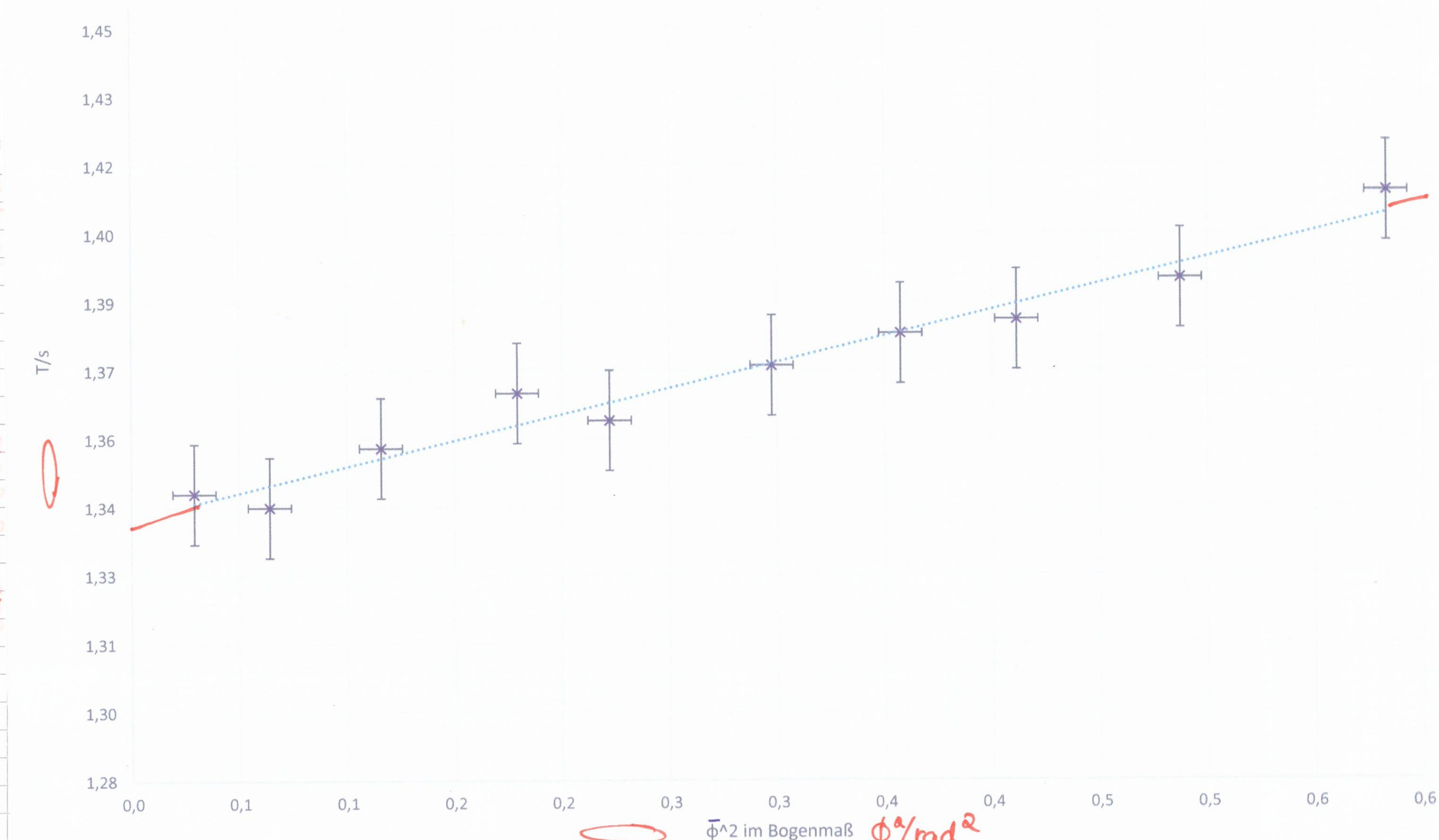
Siehe Teil B: rad = 1, Seid aber bitte konsistent

$s_{\bar{\varphi}^2} = 2 \bar{\varphi} s_{\bar{\varphi}}$ aber $\bar{\varphi}$ ist ~~frei~~ versch. → Fehler skalieren

$s_T = 0{,}011\,s$ ~~entnehme~~ entnimmt man 3.2.1, da ein Pendel der selben Länge gewählt wurde.

16

Diagramm 2. Amplitudenabhängigkeit



Lineare Regression

Um den theoretischen Ansatz noch genauer zu überprüfen (im Diagramm linear innerhalb der Fehler) wird erneut eine lineare Regression durchgeführt, die der Vorgehensweise der vorherigen gleicht.

~~[illegible]~~ Diesmal wird definiert: $x_i := \bar{\varphi}^2$ $\quad y_i := T$

hängigkeit

~~End~~/°	10T/s	T/s	$\bar{\varphi}$/rad	$\bar{\varphi}^2$ / rad	(x_i-x)	$(x_i-\bar{x})y_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-a-bx_i)^2/10^{-6}$
9,5	13,43	1,34	9,75	0,03	-0,25	-0,33	0,06	4,58
14,0	13,40	1,34	14,50	0,06	-0,21	-0,28	0,04	23,65
19,0	13,53	1,35	19,50	0,12	-0,16	-0,21	0,03	4,96
23,5	13,65	1,37	24,25	0,18	-0,10	-0,13	0,01	49,04
26,0	13,59	1,36	27,00	0,22	-0,05	-0,07	0,00	15,19
30,5	13,71	1,37	31,25	0,30	0,02	0,03	0,00	0,25
33,5	13,78	1,38	34,25	0,36	0,08	0,11	0,01	0,11
35,5	13,81	1,38	36,75	0,41	0,14	0,19	0,02	12,28
39,0	13,90	1,39	40,00	0,49	0,21	0,30	0,05	10,08
42,5	14,09	1,41	43,75	0,58	0,31	0,43	0,10	24,07
		1,37	28,10	0,27				
						0,04	0,31	144,22
		in Rad	0,49					

0,114

1,338

0,004

0,008

0,002

Man erwartet

$$T = T_0 + \frac{T_0}{16}\bar{\varphi}^2$$

Um dies zu erfüllen, sollte der Achsenabschnitt T_0 entsprechen, also der Zeit für sehr kleine Winkel.

$\Rightarrow$ $a = (1{,}338 \pm 0{,}002)\,s$

Es wird also erwartet, dass T_0 der Schwingungsdauer bei $\varphi = 10°$ entspricht.

$\Rightarrow$ $T_0 := T_{10°} = (1{,}340 \pm 0{,}011)s$

Diese Werte stimmen im einfachen Fehlerbereich von a miteinander überein.

Es gilt für die Steigung $b = (0{,}114 \pm 0{,}008)\ \cancel{\frac{s}{rad}}$ s/(rad²)

Nach der Theorie erwartet man ebenso $b' = \frac{T_0}{16} = (0{,}0839 \pm 0{,}0007)\, s/rad^2$

Somit stimmen b und b' nur innerhalb des 4-fachen Fehlers überein → Deshalb war hier eher graph. Auswertung gedacht.

Eure Messreihe ist aber gut deshalb kann man darüber streiten

3.3 Teil C: Steinerscher Satz

Als Erstes wurde die Drehschwingung für fünf Schwingungen ohne befestigte Kreisscheibe gemessen.

3.3.1 Ohne Kreisscheibe

C 1. Drehtisch ohne Scheibe

n	5T/s	T/s	T^2/s^2
1	10,65	2,13	4,54
2	10,87	2,17	4,73
3	10,90	2,18	4,75
4	10,71	2,14	4,59
5	10,75	2,15	4,62
6	10,71	2,14	4,59
Mittelwert	10,77	2,15	4,64
Standardabweichung	0,10	0,02	0,09
Stabw. MW	0,04	0,008	0,03

Aus der Theorie ((23)) folgt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}$$

Somit kann man aus der Tabelle den Quotienten $\frac{I_{00}}{D}$ berechnen, wobei I_{00} das Trägheitsmoment der Drehscheibe ist.

$$\Rightarrow \frac{I_{00}}{D} = \frac{\overline{T}^2}{4\pi^2} = 0{,}1174\,s^2$$

Fehlerberechnung

$$s_{I_{00}/D} = \frac{s_{\overline{T}^2}}{4\pi^2} = 0{,}0009\,s^2$$

$$\Rightarrow \zeta := \frac{I_{00}}{D} = (0{,}1174 \pm 0{,}0009)\,s^2$$

3.3.2. Mit Kreisscheibe

Trägheitsmoment der Kreisscheibe über Abmessung

I_K soll zuerst über Masse und Abmessungen der Scheibe berechnet werden. Aus den Grundlagen zeigt sich

$$I_K^* = \frac{1}{2} m r^2 \qquad (17A)$$

Dazu wurden folgende Abmessungen getätigt

$m = 1{,}158\,kg$ Masse
$b = 0{,}013\,m$ Breite
$2r = 0{,}121\,m$ Durchmesser
$s_m = 0$
$s_b = $
$s_{2r} = 0$

$$\Rightarrow I_K^* = 0{,}002119\,kgm^2$$

Fehlerrechnung

$$s_{I_K^*} = I_K^* \sqrt{\left(\frac{s_m}{m}\right)^2 + 2\left(\frac{s_{2r}}{2r}\right)^2} = 0{,}00002\,kgm^2$$

$$\Rightarrow I_K^* = (0{,}00212 \pm 0{,}00002)\,kgm^2$$

C2

d/m	T/s
0	
0,015	
0,03	
0,045	
0,09	
Mittelwert	
Summe	
Steigung b	
Achsenabschnitt a	
Standardabweichung	
s(b)	
s(a)	

Trägheitsmoment - Grafische / Analytische Bestimmung

In einem erneuten Messdurchgang wurden wieder fünf Schwingungen gemessen, jedoch diesmal mit der Kreisscheibe, die in verschiedenen Abständen zum Drehzentrum angebracht wurde.

Die Schwingungsdauer T wird durch

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}$$

nach (23) berechnet

Hierbei ist zu beachten, dass nach dem Steinerschen Satz gilt (20)

$$I = I_{ges} + d^2 m$$

Dabei ist: m = Masse der Kreisscheibe

$I_{ges} = I_{0} + I_K$ (für $d = 0$) (24)

So folgt: $\Rightarrow \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{I_{ges}}{D} + \frac{4\pi^2 m}{D} d^2$

Im folgenden Diagramm 3 wurde T^2 gegen d^2 aufgetragen, damit D und I_{ges} durch lineare Regression bestimmt werden können.

~~Dabei haben wir b~~

Dabei wurde bei d^2 bewusst kein Fehler aufgetragen, da der Abstand der Positionen, in denen die Kreisscheibe auf dem Drehteller befestigt wurde, in der Versuchsanleitung ohne Fehler vorgegeben war.

Als Fehler von T^2 wurde s_{T^2} aus Tabelle C1 verwendet.

$s_{T^2} = 0{,}09\ s^2$

Die Werte und Ergebnisse der linearen Regression sind Tabelle C2 zu entnehmen

Allgemein gibt euch eine Messung vom Typ C (Streuexp.) einen Fehler auf die gemessene Größe d.h. T. Für s_{T^2} muss entsprechend fortgepflanzt werden: $s_{T^2} = 2T s_T$

$\Rightarrow$ Fehler skalieren

2. Drehtisch mit Scheibe		
n	d/m	5T/s
1	0,000	11,96
2	0,000	12,03
3	0,000	12,12
4	0,015	12,46
5	0,015	12,40
6	0,015	12,28
7	0,030	12,78
8	0,030	12,87
9	0,030	12,78
10	0,045	13,68
11	0,045	13,65
12	0,045	13,62
13	0,090	17,50
14	0,090	17,46
15	0,090	17,65

Lieber als Referenz am Ende als in Zwischenräume kleben...

^{2}/m^2	y T^2/s^2	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})y_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-a-bx_i)^2$
0,0000	5,80	-0,0023	-0,013	0,0000051	0,004258
0,0002	6,13	-0,0020	-0,012	0,0000041	0,008324
0,0009	6,56	-0,0014	-0,009	0,0000018	0,000144
0,0020	7,45	-0,0002	-0,002	0,0000001	0,000291
0,0081	12,30	0,0059	0,072	0,0000342	0,000009
0,002	7,65				
			0,04	0,00005	0,01

794,8 s^2/m^2

5,861 s^2

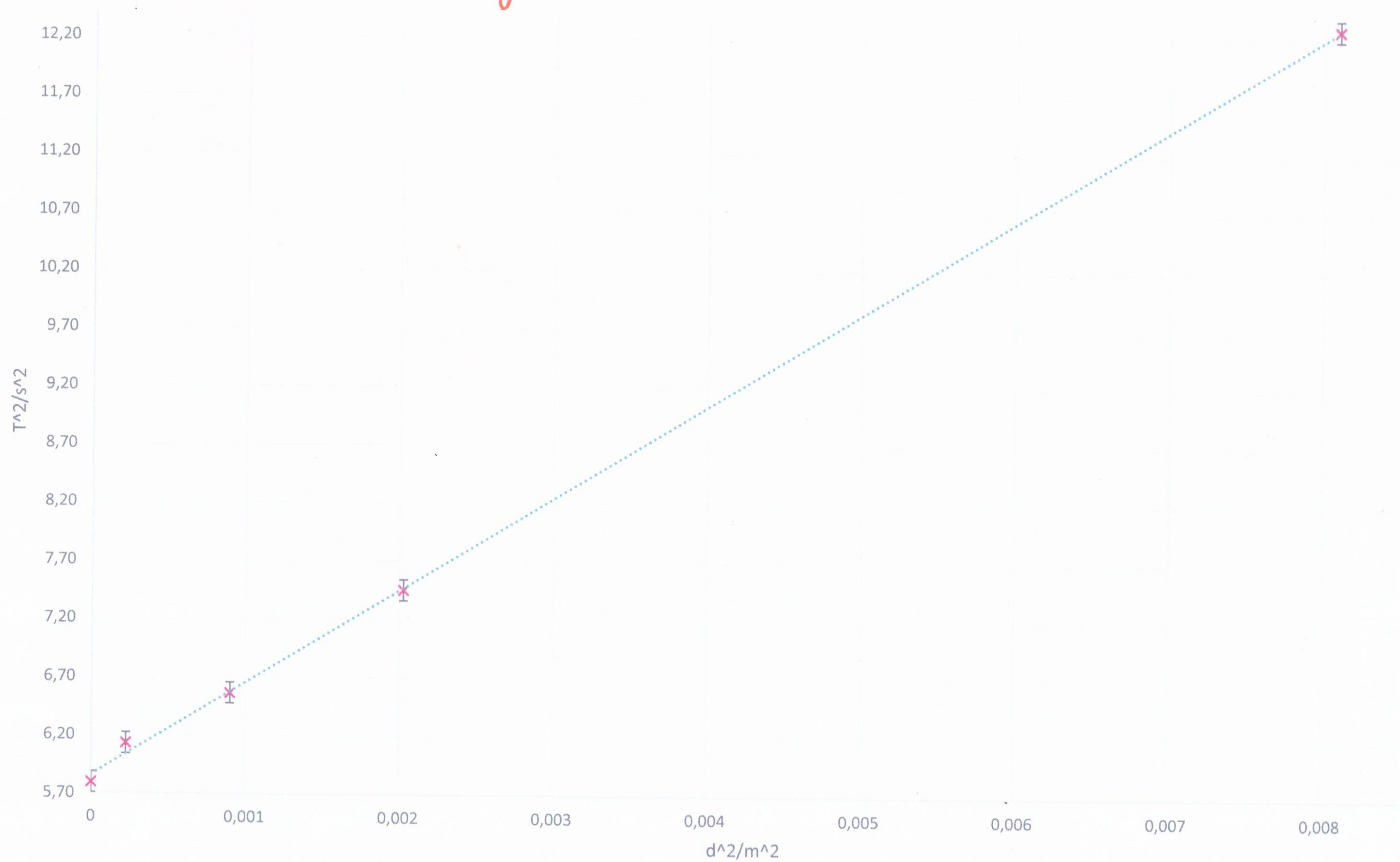
0,008 s^2

1,1 s^2/m^2

0,004 s^2

20

Digramm 3. Drehtisch mit Scheibe



Richtkonstante D

Nach vorheriger Formel gilt

$$\frac{4\pi^2 m}{D} = b = (794{,}8 \pm 1{,}1)\,\frac{s^2}{m^2}$$

$$\Rightarrow D = \frac{4\pi^2 m}{b} \qquad \text{mit} \quad m = (1{,}158 \pm 0{,}001)\,kg$$

$$= \cancel{0{,}058\,\frac{kg\,m^2}{s^2}} \quad 0{,}05752\,\frac{kg\,m^2}{s^2}$$

Fehlerrechnung

$$s_D = D\sqrt{\left(\frac{s_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{s_m}{m}\right)^2} = 0{,}00009\,\frac{kg\,m^2}{s^2}$$

$$\Rightarrow \quad D = (0{,}05752 \pm 0{,}00009)\,\frac{kg\,m^2}{s^2}$$

Sinvolle Einheit $g m^2 s^{-2}$

Achsenabschnitt a

Aus der Theorie folgt:

$$a = 4\pi^2\,\frac{I_{ges}}{D}$$

$$\Rightarrow I_{ges} = \frac{a \cdot D}{4\pi^2} = 0{,}00854\ kgm^2$$

Fehlerrechnung

$$s_{I_{ges}} = I_{ges}\sqrt{\left(\frac{s_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{s_a}{a}\right)^2} = 0{,}00002\ kgm^2$$

$$\Rightarrow I_{ges} = (0{,}00854 \pm 0{,}00002)\,kgm^2$$

Dadurch kann nun ~~berechnet~~ I_{00} berechnet werden

Trägheitsmoment Drehteller

$$I_{00} = \zeta \cdot D = 0{,}00675\ kgm^2$$

~~ζ ? ⇒ Alle Variablen~~

Fehlerrechnung

$$s_{I_{00}} = I_{00}\sqrt{\left(\frac{s_\zeta}{\zeta}\right)^2 + \left(\frac{s_D}{D}\right)^2} = 0{,}00005\ kgm^2$$

$$\Rightarrow \cancel{0{,}006} \quad I_{00} = (0{,}00675 \pm 0{,}00005)\,kgm^2$$

Berechnung von I_K

Mit den vorher berechneten Werten kann so erneut das Trägheitsmoment der Kreisscheibe berechnet werden.

Es gilt nach (24)

$$I_K = I_{ges} - I_0 = 0{,}00178\ kgm^2$$

Fehlerrechnung

$$s_{I_K} = \sqrt{s_{I_0}^2 + s_{I_{ges}}^2} = 0{,}00005\ kgm^2$$

$$\Rightarrow \quad I_K = (0{,}00178 \pm 0{,}00005)\,kgm^2$$

Vergleich

Wenn man I_K^* und I_K vergleicht entspricht das einem ~~Unterschied~~ Fehler von 76 ~~Sigma~~, was leider nicht sehr genau ist.

→ Unwahrscheinlich:
→ Messfehler?
→ Fehler unterschätzt?
→ Theorie falsch?

$7\sigma \rightsquigarrow p \ll 10^{-4}$ ‰!

4. Zusammenfassung und Diskussion

Teil A und B:

Durch unsere Messungen ist ersichtlich, dass es einen linearen Zusammenhang zwischen T^2 und l_0 sowie zwischen T und φ^2 gibt. → quantifizieren Die theoretisch reduzierte Pendellänge lies sich bei uns auf $l_{Red} = (636{,}0 \pm 0{,}7)\,mm$ errechnen. Ergebnisse abschen. Durch lineare Regression kamen wir auf einen Wert von $l_{Red_2} = (646 \pm 8)\,mm$, was eine Abweichung von zwei-σ hat.
Unser Wert für die Erdbeschleunigung $g = (10{,}0 \pm 0{,}1)\,\frac{m}{s^2}$ hat eine Abweichung von zwei σ zu dem gebräuchlichen Referenzwert $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$. Innerhalb dieser Abweichung wird die Proportionalität also bestätigt.
Die Formel für große Winkel ist auch nur eine Näherung und kann deshalb nicht auf zu große Winkel angewendet werden. } Diskussion Parameter & Qualität

Teil C:

Auch in diesen Teil wird der lineare Zusammenhang zwischen T^2 und a^2 gezeigt. ~~Wie in dem Diagramm 3 zu sehen ist, wird der Steinersche Satz verifiziert, da der Fehler~~
Als theoretischen Wert für das Trägheitsmoment I_k^* haben wir $I_k^* = (0{,}00212 \pm 0{,}00002)\,kg\,m^2$ herraus bekommen. Für den durch die Grafik berechneten Trägheitsmoment bekommen wir „das" Trägheitsmoment $I_k = (0{,}00178 \pm 0{,}00005)\,kg\,m^2$ herraus. Die Richtkonstante D haben wir auf $D = (0{,}05752 \pm 0{,}00009)\,\frac{kg\,m^2}{s}$ bestimmt.
Der Trägheitsmoment des Drehtisches beträgt $I_{00} = (0{,}00675 \pm 0{,}00005)\,kg\,m^2$. Der aus der Grafik berechnete Trägheitsmoment hat zu den theoretischen Trägheitsmoment eine Abweichung von 7σ, was jedoch von den unglaublich kleinen Fehler kommt. Wie Grafisch zu sehen ist gilt der Steinersche Satz im Bereich von T^2, ~~bei T und kann~~ ?

Fehlerquellen:

- Reibung spielt bei allen Messungen eine Rolle, da sich dadurch die Schwingung dämpft. Folgen?

Teil A+B:

- Es ist schwer die ~~Anzeige der~~ Auslenkung genau von der Anzeige abzulesen.
- Beim Loslassen des Pendels kann es sein, dass man dem Pendel noch ein kleines bisschen Schwung mitgibt.
- Das Pendel und die Kugel sind auch nicht masselos, genau wie die Schnur. (Kugel, Pendel sind auch in der Theorie masselos angenommen) aber der Radius der Kugel wird zu 0 angenommen)

Teil C:

→ evtl. Messung vorschlagen

- Es ist nicht getestet worden, ob das Drehpendel dem Hookschen Gesetz folgt, außerdem ist die Spiralfeder schon alt wodurch eine Materialermüdung vorliegen kann. → in welche Richtung beeinflusst das die Werte?