

Universität Freiburg
Physiklabor für Anfänger*innen
Ferienpraktikum nach dem Sommersemester 2023

Versuch 14

Streuversuch



20. September 2023

Datum der Durchführung: 18 September 2023

Assistent:



Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuchs	1
2 Versuchsaufbau	1
3 Versuchsdurchführung	2
4 Auswertung und Fehleranalyse	2
4.1 Fester Stoßparameter b	3
4.2 Variable Stoßparameter b	4
4.2.1 Messergebnisse	4
4.2.2 Zusammenhang $\bar{\theta}$ und b	5
4.2.3 Rückschlüsse auf die Targetform	5
4.2.4 Bestimmung der Ausgleichsgerade	5
4.2.5 Bestimmung des Targetradius R_T	8
5 Diskussion	9
5.1 Übersichtliche Angabe der Endergebnisse	9
5.2 Vergleich mit dem gemessenen Zylinderradius R_T	9
5.3 Fehlerquellen	9
5.4 Verbesserungsvorschläge	10
6 Anhang	11
6.1 Bilder Versuchsaufbau	11
6.2 Diagramme	12
6.3 Laborheft	13
6.4 Verzeichnisse	17

1 Ziel des Versuchs

Wir wollen durch einen Streuversuch den Radius R_T eines unbekannten Targets bestimmen. Des Weiteren wollen wir mit verschiedenen Stoßparametern b_R das Streuverhalten messen und statistisch auswerten.

2 Versuchsaufbau

Uns steht die in Abb. 1 dargestellte Apparatur zur Verfügung, mit der man mittels Luftdruck Metallkugeln in einen Metallring, die Stoßkammer, schießen kann (siehe Abb. 7 und 8).

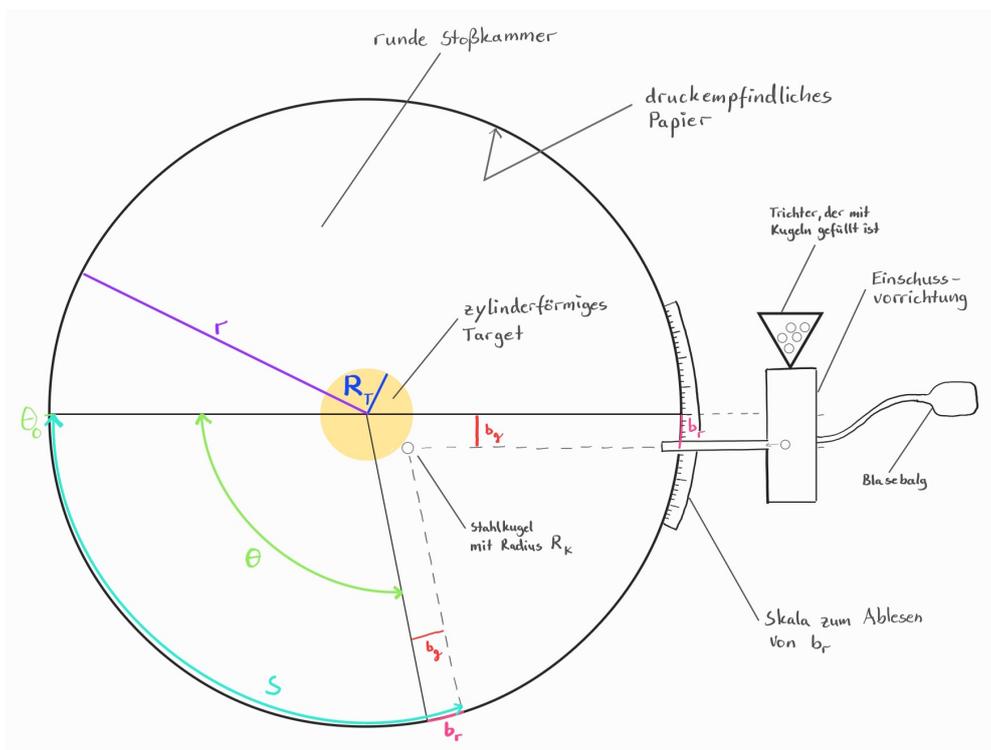


Abbildung 1: Versuchsaufbau

Damit man anschließend nachvollziehen kann wo die Kugel die Wand getroffen hat, wird ein druckempfindliches Papier eingespannt, auf welchem man die Einschlagpunkte gut erkennen kann.

In der Mitte des Metallrings ist ein Target (Abb. 5) befestigt, an welchem die geschossenen Kugeln abgelenkt werden können. Die Abschussvorrichtung kann so eingestellt werden, dass die Kugeln an einer anderen Stelle auf das Target und somit auch auf das Papier treffen.

3 Versuchsdurchführung

Zuerst stellen wir an der Einschussvorrichtung den Stoßparameter b_r ein. Der Wert b_r kann mithilfe einer am Metallring angebrachten Skala abgelesen werden (siehe Abb. 6). Wir verwenden Kugeln mit Radius R_K . Diese werden in den Trichter gefüllt und die Vorrichtung geladen. Durch den Blasebalk wird Druck erzeugt um die Kugeln einzeln auf das Target zu feuern. Bei der Durchführung gilt es darauf zu achten, dass stets nur eine Kugel pro Schuss abgefeuert wird. Das druckempfindliche Papier wird möglichst wellenfrei eingespannt. Wie in Abb. 1 eingezeichnet muss auf dem Papier zu Beginn θ_0 markiert werden. Uns stehen 25 Stahlkugeln zur Verfügung.

Mit dieser Vorrichtung werden zwei Experimente durchgeführt. Zunächst schießen wir bei festem Stoßparameter b , 50 mal auf das Target.

Im zweiten Teil betrachten wir für 18 verschiedene Stoßparameter jeweils die Streuung von $n = 25$ Kugeln durch den Stoß am Target.

4 Auswertung und Fehleranalyse

Wir werden mit verschiedenen Stoßparameter b_r auf unser Target schießen. Den Targe-tradius $R_{T_{mess}} = (2,9 \pm 0,2)$ cm haben wir mithilfe eines Maßbandes bestimmt. Aufgrund von Messungenauigkeit beim Ablesen haben wir die Unsicherheit $\Delta R_{T_{mess}} = 0,2$ cm gewählt.

Weiter haben wir mithilfe des Maßbandes den Radius r der Stoßkammer bestimmt. Wir haben dabei festgestellt, dass die Stoßkammer nicht exakt kreisförmig ist und der Durchmesser je nach Messtelle um circa 5 mm variiert. Wir haben als Bestwert für den Radius $\hat{r} = 64,0$ cm gewählt und dessen Unsicherheit auf $\Delta \hat{r} = 0,5$ cm geschätzt.

Mithilfe einer Messschraube haben wir den Radius $R_K = (2,18 \pm 0,03)$ mm unserer Kugeln gemessen. Die Schätzung der Unsicherheit resultiert aus einer schlechten Nullung unserer Messschraube, sowie Ableseungenauigkeiten.

In den nun folgenden Versuchen markieren wir stets zu Beginn unseren Winkel θ_0 auf dem druckempfindlichen Papier.

Außerdem werden wir den in Abb. 1 als b_r bezeichneten Teil des Stoßkammerumfangs als Stoßparameter b verwenden. Die Verschiebung b_r ist für alle von uns verwendeten Stoßparameter um maximal ± 1 mm vom b_g -Wert abgewichen. Diesen Unterschied vernachlässigen wir. Er ist im Vergleich zu anderen Messfehlern sehr gering. Wir haben bei Rechnungen mit beiden Werten festgestellt, dass dieser Unterschied keinen signifikanten Einfluss auf das Ergebnis hat.

4.1 Fester Stoßparameter b

Zunächst betrachten wir für $n = 50$ Kugeln bei einem festen Stoßparameter von $b = (3,5 \pm 0,1)$ cm die Streuung am Zylindertarget. Wir erhalten die in Abb. 2 zu sehende Verteilung an Aufprallstellen der Kugeln auf dem druckempfindlichen Papier.

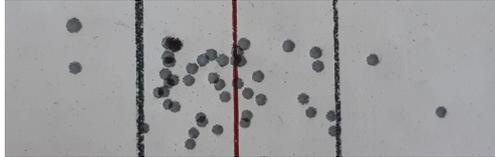


Abbildung 2: Trefferbild mit rot eingezeichnetem Mittelwert \bar{s} und gewählter Unsicherheit $s_{\bar{s}}$

Wir zeichnen in diese „Wolke“ aus Treffern den Mittelwert \bar{s} per Augenmaß so ein, dass dieser mittig zwischen den einzelnen Aufprallstellen liegt. Die sichtlich abweichenden Werte erklären wir dadurch, dass manchmal mehrere Kugeln gleichzeitig abgefeuert werden. Wegen der Interferenz der beiden Kugeln und dem verfälschten Ergebnis betrachten wir solche Messungen als statistischen Fehler.

Mithilfe eines Maßbands bestimmen wir $s = (24,0 \pm 0,8)$ cm als Strecke zwischen der Markierung θ_0 und unserem eingezeichneten Mittelwert \bar{s} der Treffer. Die Unsicherheit des Mittelwertes \bar{s} entnehmen wir Abb. 2.

Wenn wir die Strecke s durch den Radius der Stoßkammer $r = (64,0 \pm 0,5)$ cm teilen erhalten wir den mittleren Ablenkwinkel $\bar{\theta}$. Bei der Berechnung müssen wir als Korrekturfaktor von der Strecke s noch den Stoßparameter $b = (3,5 \pm 0,1)$ cm abziehen (siehe Abb. 1). Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\bar{\theta} &= \frac{s - b}{r} \\ &= 0,64 \text{ rad} \\ &= 36,67^\circ\end{aligned}\tag{1}$$

Mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnen wir die Unsicherheit $\Delta\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\theta} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial s} \cdot \Delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial r} \cdot \Delta r\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{r} \cdot \Delta s\right)^2 + \left(-\frac{1}{r} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{b-s}{r^2} \cdot \Delta r\right)^2} \\ &= 1,4^\circ \end{aligned} \tag{2}$$

Als Ablenkwinkel für $b = (3,5 \pm 0,1)$ cm erhalten wir somit

$$\bar{\theta} = (36,7 \pm 1,4)^\circ \tag{3}$$

mit dem relativen Fehler

$$\frac{\Delta\bar{\theta}}{\bar{\theta}} = 3,8\% \tag{4}$$

4.2 Variable Stoßparameter b

Mit dem in Abschnitt 4.1 verwendeten Verfahren werden wir nun für insgesamt 18 Stoßparameter den mittleren Ablenkwinkel $\bar{\theta}$ bestimmen. Wir schießen für jeden Stoßparameter 25 Kugeln auf das Target.

4.2.1 Messergebnisse

In Tabelle 1 haben wir für die Stoßparameter b die bestimmten Werte der Strecke \bar{s} und den daraus berechneten Winkel $\bar{\theta}$ eingetragen.

Tabelle 1: Messergebnisse s , $\bar{\theta}$ mit Unsicherheiten

b in cm	3,5(1) 3,3(1) 3,1(1) 2,9(1) 2,7(1) 2,5(1) 2,3(1) 2,1(1) 1,7(1)
s in cm	24(2) 33,0(7) 40(1) 48(1) 53,3(6) 58,5(9) 65,6(9) 70(1) 78,2(8)
$\bar{\theta}$ in rad	0,63(5) 0,93(2) 1,15(3) 1,40(4) 1,59(2) 1,75(3) 1,98(4) 2,12(4) 2,39(3)
b in cm	-0,5(1) -1,0(1) -1,2(1) -1,4(1) -1,6(1) -1,8(1) -2,0(1) -2,2(1) -2,4(1)
s in cm	80(1) 67(1) 63,5(8) 55,8(8) 50(1) 45,2(6) 39,4(8) 32(1) 21(1)
$\bar{\theta}$ in rad	3,13(4) 3,57(4) 3,68(4) 3,93(4) 4,13(5) 4,27(4) 4,46(5) 4,70(5) 5,04(5)

4.2.2 Zusammenhang $\bar{\theta}$ und b

Für den Stoß zwischen einer Kugel und einem Zylinder gilt die in [Fre23b] angegebene Formel

$$\bar{\theta}(b) = 2 \arccos \left(\frac{b}{R_K + R_T} \right). \quad (5)$$

Hierbei ist b der Stoßparameter, R_K der Kugelradius und R_T der Targetradius. Dieser Zusammenhang gilt nur für $R_K + R_T \leq b$ da sonst kein Stoß zwischen Kugel und Target stattfindet.

4.2.3 Rückschlüsse auf die Targetform

Wir sehen in Abb. 9 einen relativ symmetrischen Verlauf unseres mittleren Ablenkwinkels $\bar{\theta}$ gegenüber dem Stoßparameter b . Dadurch schließen wir auf ein symmetrisches Target.

Anhand unseres arccos-Fittes kann man den Symmetriepunkt bei ungefähr $b = 0,5$ cm erahnen. Wir schließen daraus, dass unser Target ungefähr in der Mitte des Metallringes liegt. Die Differenz zu $b = 0$ cm ergibt sich vermutlich aus der Streuung der Messwerte und der daraus resultierenden Ungenauigkeit des Fittes.

Einen linearen Zusammenhang erhalten wir durch das Auftragen von $\cos(\bar{\theta}/2)$ gegen b (siehe Abb. 3). Da für den Stoß zweier runder Objekte Gleichung (5) gilt, können wir auf ein rundes Target schließen.

Da der vertikale Auftreffpunkt der Kugel auf dem Target keinen Einfluss auf die Ablenkung hat, können wir von einem zylindrischen Target ausgehen.

4.2.4 Bestimmung der Ausgleichsgerade

Unsere Ausgleichsgerade hat die Form $y = m \cdot x + c$. Unsere Werte für m und c sowie deren Fehler bestimmen wir mittels Linearer Regression (siehe [Fre23a]). Als Gleichungen für die Bestwerte \hat{c} und \hat{m} gilt:

$$\begin{aligned} \hat{c} &= \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ &= -0,03 \text{ rad} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \frac{n \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ &= 0,27 \text{ rad cm}^{-1} \end{aligned}$$

Wir berechnen die Streuung der Messwerte um das Modell:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{c} + \hat{m} \cdot x_i)]^2} \quad (7)$$

Nun können wir die Standardunsicherheiten von \hat{c} und \hat{m} berechnen:

$$\begin{aligned}\Delta c &= s \cdot \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \cdot \sum x_i^2} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2} \\ &= 0,03 \text{ rad} \\ \Delta m &= s \cdot \sqrt{\frac{n}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \\ &= 0,11 \text{ rad cm}^{-1}\end{aligned}\tag{8}$$

Mit diesen Werten zeichnen wir nun unsere Ausgleichsgerade in Abb. 3 ein.

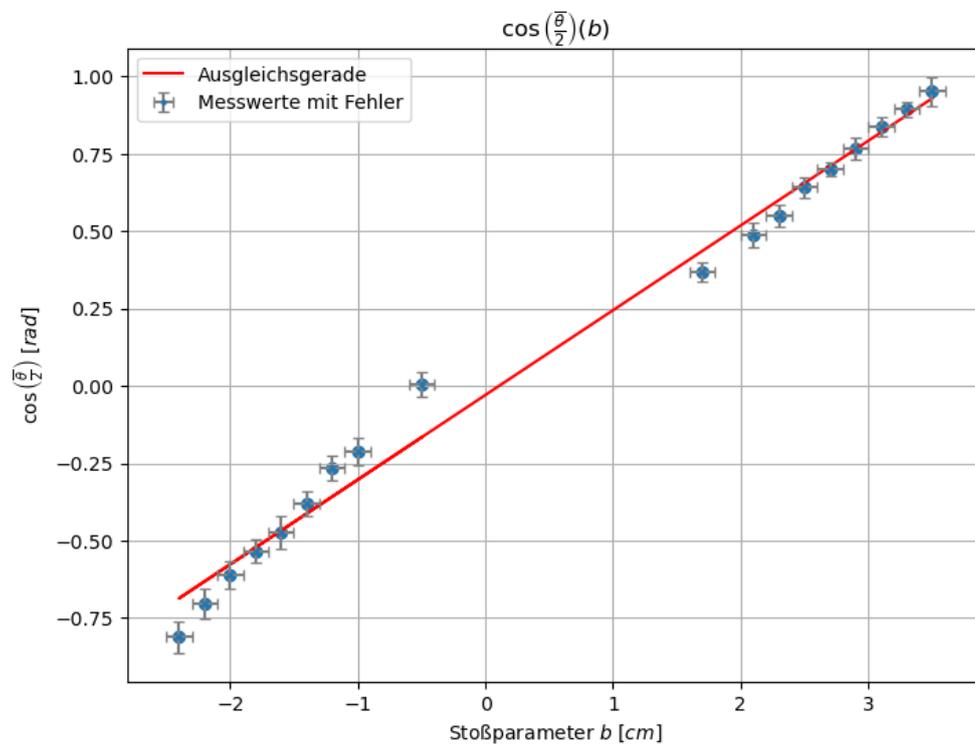


Abbildung 3: Darstellung $\pm \cos(\frac{\bar{\theta}}{2})$ gegenüber Stoßparameter b

Die Qualität unserer Ausgleichsgerade beurteilen wir mit Hilfe eines Residuendiagramms (Abb. 4).

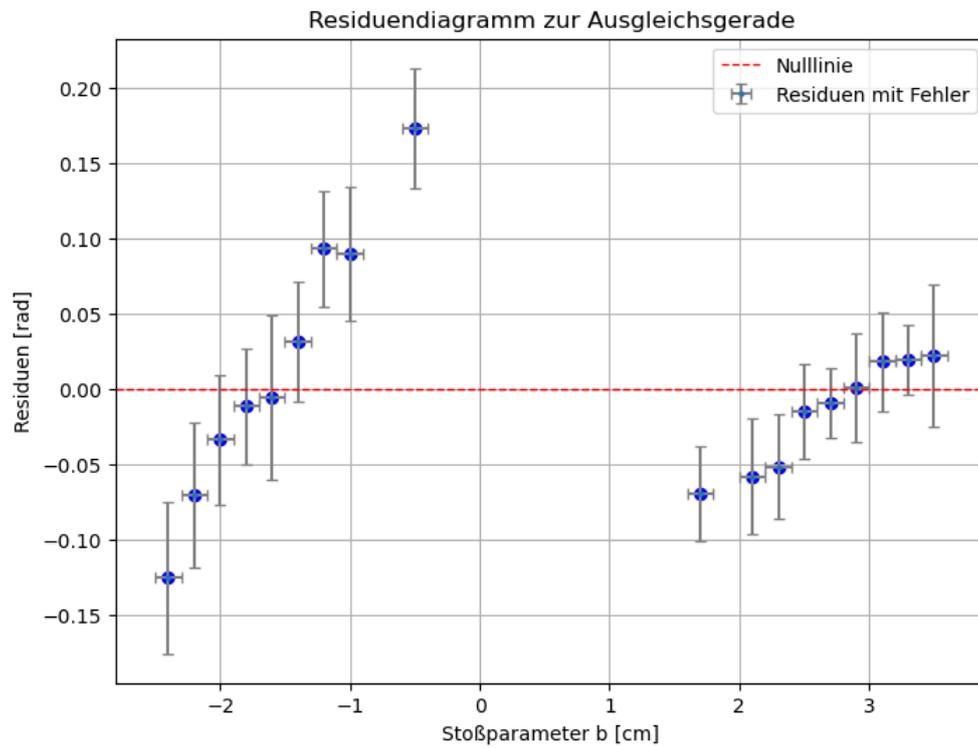


Abbildung 4: Residuendiagramm der Ausgleichsgerade in Abb. 3 mit Fehlerbalken

Bei ca. 55% der Messwerte liegt der Mittelwert innerhalb des Fehlers. Man sieht deutlich, dass innerhalb der positiven sowie negativen Stoßparameter jeweils ein linearer Zusammenhang vorhanden ist. Über alle Messwerte ist eine Linearität allerdings nicht eindeutig erkennbar.

4.2.5 Bestimmung des Targetradius R_T

Der Targetradius berechnet sich nun aus Gleichung (5) und der berechneten Steigung $m = (0,27 \pm 0,11) \text{ rad cm}^{-1}$:

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta}(b) &= 2 \arccos\left(\frac{b}{R_K + R_T}\right) \\
 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right) &= b \cdot \underbrace{\frac{1}{R_K + R_T}}_{=m} \\
 \Rightarrow m &= \frac{1}{R_K + R_T} \\
 \Leftrightarrow R_T &= \frac{1}{m} - R_K \\
 \Rightarrow R_T &= 3,49 \text{ cm}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Der Messfehler berechnet sich mittels Gauß'scher Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned}
 \Delta R_T &= \sqrt{\left(\frac{\partial R_T}{\partial m} \cdot \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial R_T}{\partial R_K} \cdot \Delta R_K\right)^2} \\
 \Delta R_T &= \sqrt{\left(-\frac{1}{m^2} \cdot \Delta m\right)^2 + (-1 \cdot \Delta R_K)^2} \\
 \Rightarrow \Delta R_T &= 1,5 \text{ cm}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Somit haben wir einen Targetradius von

$$R_T = (3,5 \pm 1,5) \text{ cm.} \tag{11}$$

Der relative Fehler beträgt $\Delta R_T/R_T = 42,9\%$.

5 Diskussion

5.1 Übersichtliche Angabe der Endergebnisse

Im ersten Teil des Versuchs konnten wir mit einem festem Stoßparameter von 3,5 cm eine Ablenkung von $(36,7 \pm 1,4)^\circ$ bestimmen. Unser relativer Fehler beträgt hier 3,8 %.

Im zweiten Teil des Versuchs stellen wir fest, dass die Kurve in Abb. 9 einem arccos ähnelt.

Durch das linearisierte Diagramm haben wir den Targetradius $R_T = (3,5 \pm 1,5)$ cm mit einer Genauigkeit von 42,9 % bestimmt.

5.2 Vergleich mit dem gemessenen Zylinderradius R_T

Vergleicht man unseren berechneten Targetradius $R_T = (3,5 \pm 1,5)$ cm mit dem vorher gemessenen Wert $R_{T_{mess}} = (2,9 \pm 0,2)$ cm aus Abschnitt 4 sieht man, dass er mit seinem Fehler nicht signifikant abweicht. Allerdings liegt bei dem bestimmten Targetradius R_T ein sehr hoher relativer Fehler vor.

5.3 Fehlerquellen

Die große Unsicherheit bei unseren Berechnungen resultiert zum größten Teil aus der Unsicherheit von \bar{s} . Bei der Auswertung bestimmen wir \bar{s} per Augenmaß. Genauer ist es, \bar{s} als rechnerischen Mittelwert einzuzeichnen. Außerdem entsteht eine Unsicherheit daraus, dass wir festlegen müssen, ab welcher Abweichung wir „Ausreißer“ nicht mehr mit in die Berechnung der Standardunsicherheit $s_{\bar{s}}$ einbeziehen.

Des Weiteren liegt bei der Bestimmung von \bar{s} eine systematische Unsicherheit durch das Einzeichnen von θ_0 vor.

Eine weitere Fehlerquelle liegt in der Einschussvorrichtung. Es kann sein, dass mehrere Kugeln zusammen aus dem Rohr geschossen werden und so das Messergebnis verfälscht wird. Ebenso befindet sich der Versuch auf einem recht wackeligen Tisch. Bei einer leichten Erschütterung wird das Messergebnis somit verfälscht.

Bei unserer Berechnung in Gleichung (1) gehen wir davon aus, dass die Kugel die Einschussvorrichtung ohne Ablenkwinkel θ verlässt. In der Realität ist dies bis auf endlich viele Ausnahmen nicht gewährleistet. Ein leicht schräger horizontaler Abschusswinkel führt zu einem anderen Auftreffpunkt am Target. Somit verschiebt sich auch das Trefferbild auf dem Papier.

5.4 Verbesserungsvorschläge

Um ein genaueres Messergebnis zu erhalten, kann die Anzahl an verwendeten Stoßparametern vergrößert werden. Dadurch würde unsere Ausgleichsgerade im $\cos \frac{\theta}{2}$ - b -Diagramm (siehe Abb. 3) weiter an Genauigkeit gewinnen.

Unsere Trefferbilder haben sich teilweise überlagert. In diesem Fall war nicht eindeutig zu erkennen, welcher Treffer welchem Stoßparameter zugeordnet werden kann. Um dies zu verhindern könnte man für jeden Stoßparameter separates Papier verwenden. Allerdings muss dabei darauf geachtet werden, dass θ_0 am Metallring eingezeichnet wird, so dass sich dieser Wert zwischen den Messungen nicht verändert.

Wir haben festgestellt, dass unsere Stoßkammer nicht exakt kreisförmig ist. Durch eine Stoßkammer mit identischem Radius könnte man das Ergebnis weiter verbessern.

6 Anhang

6.1 Bilder Versuchsaufbau

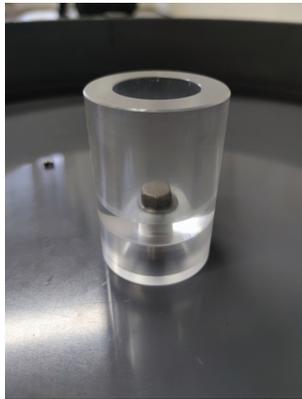


Abbildung 5: Target

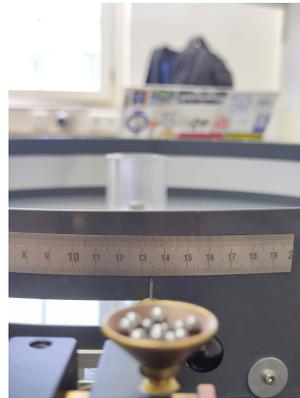


Abbildung 6: Maßband zum Ablesen des Stoßparameters b



Abbildung 7: Einschussvorrichtung



Abbildung 8: Kugeln

6.2 Diagramme

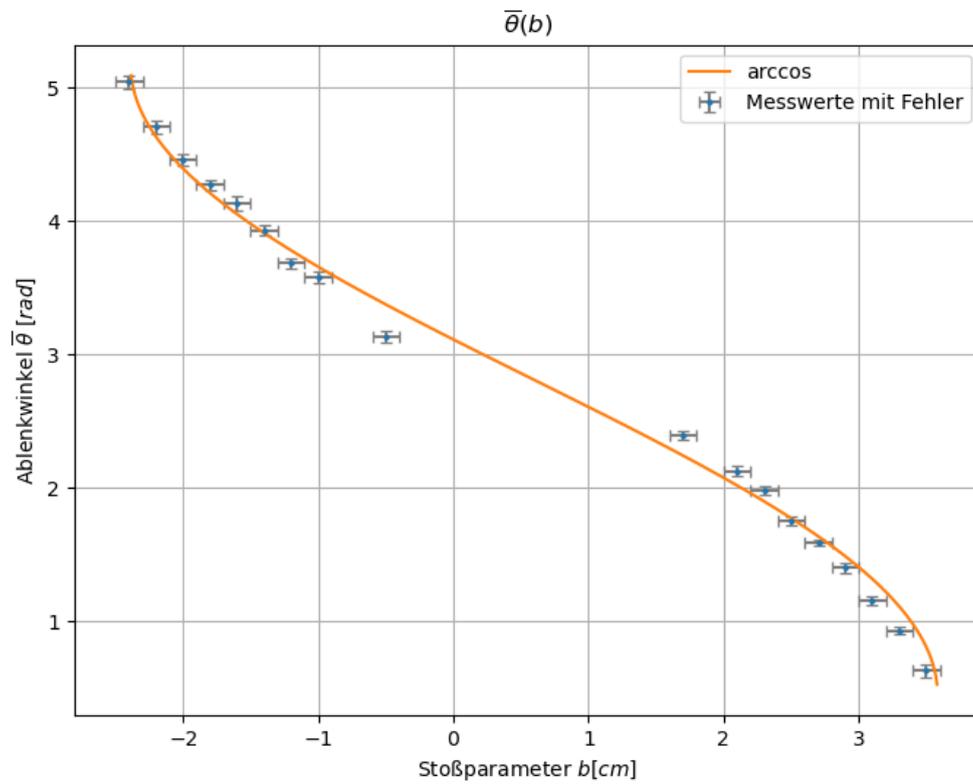


Abbildung 9: $\bar{\theta}(b)$ mit Fehlerbalken und gefittetem arccos

6.3 Laborheft

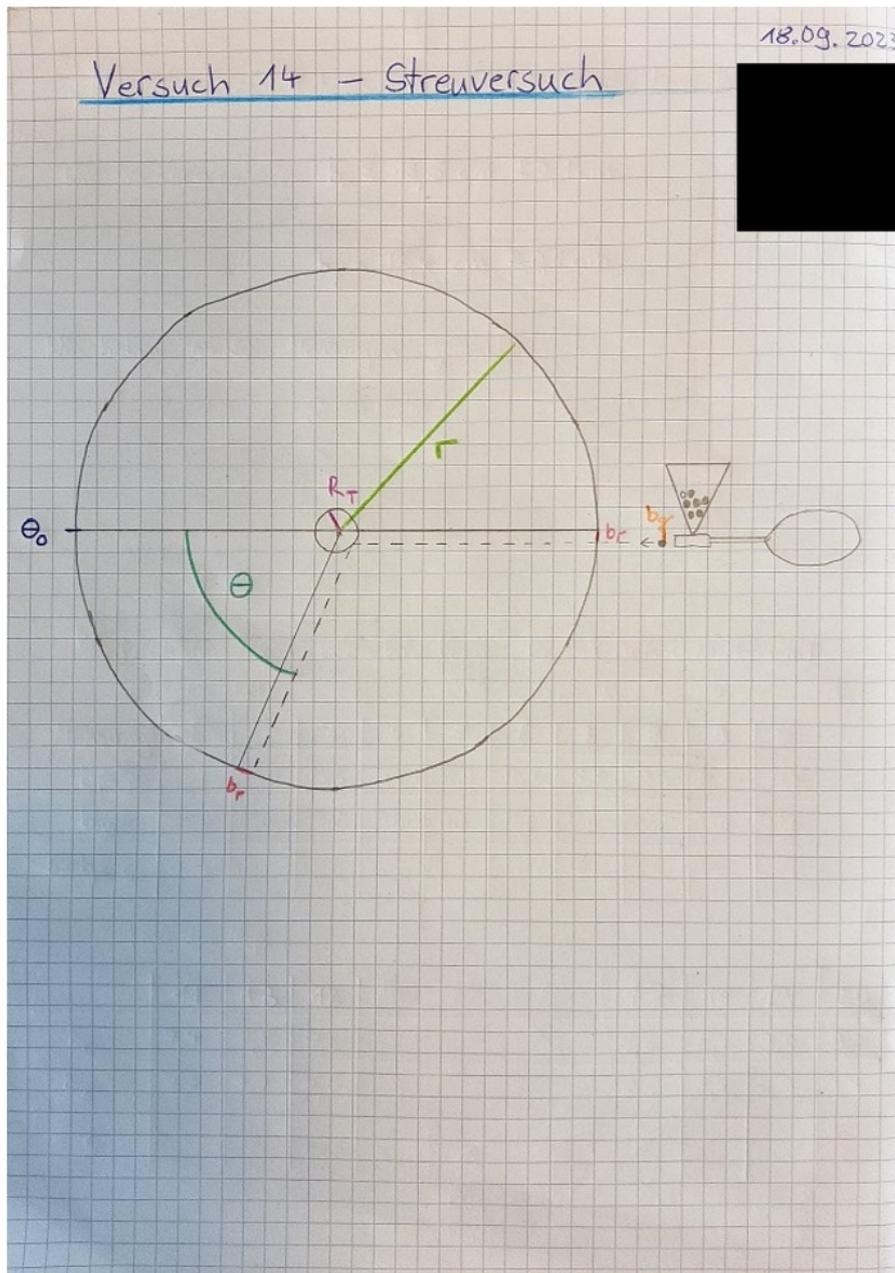


Abbildung 10: Laborheft Seite 1

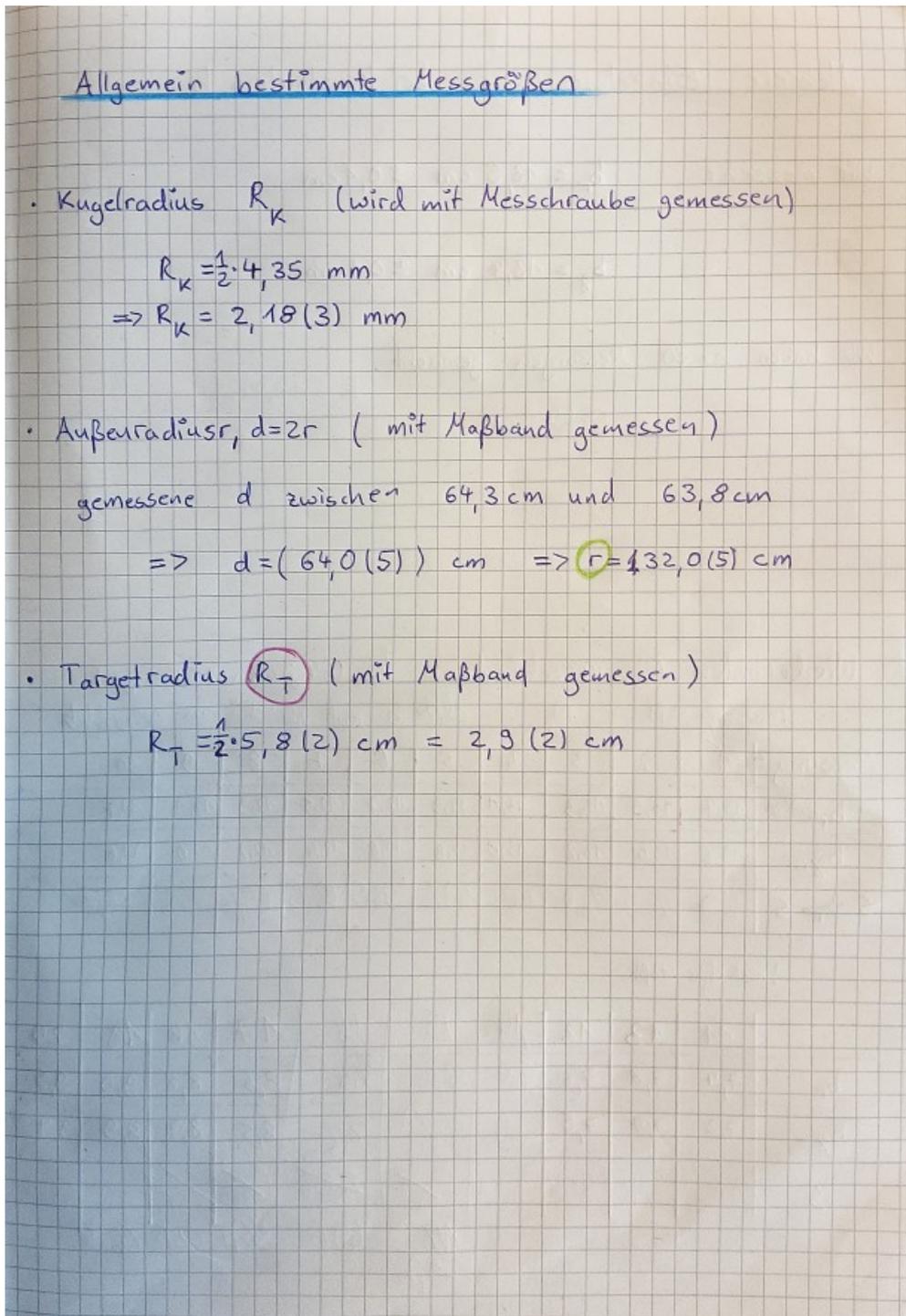


Abbildung 11: Laborheft Seite 2

Mehrere Einzelmessungen bei konstantem b

Wir messen: $b_r = 13,5 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$

$b_g = 13,4 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$

Wir haben $n=50$ Messungen gemacht

$S = 24,0 \text{ cm}$

Wiederholen für verschiedene b (mit jeweils $n=25$ Messungen)

! nach ohne stoß!

alle b. mit $\Delta b = \pm 2 \text{ mm}$ verändert

Messung #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$b_r \pm 0,1 \text{ cm}$	13,7	13,5	13,3	13,1	12,9	12,7	12,5	12,3	12,1	11,7
$b_g \pm 0,1 \text{ cm}$	13,6	13,4	13,2	13,0	12,8	12,6	12,4	12,2	12,0	11,6
S S in cm	2,7	28,5	38,0	40,0	47,6	53,5	58,5	65,6	70,0	78,2

! nach ohne stoß!

	11	13	12	14	15	16	17	18	19	20
b_r	7,4	7,8	7,6	8,0	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,5
b_g	7,3	7,7	7,5	7,9	8,1	8,3	8,5	8,7	8,9	9,4
S	3,6	31,8	21,2	39,4	49,5 45,2	55,8 49,5	65,5 55,8	66,7 68,5	66,7 68,5	80,4

Abbildung 12: Laborheft Seite 3

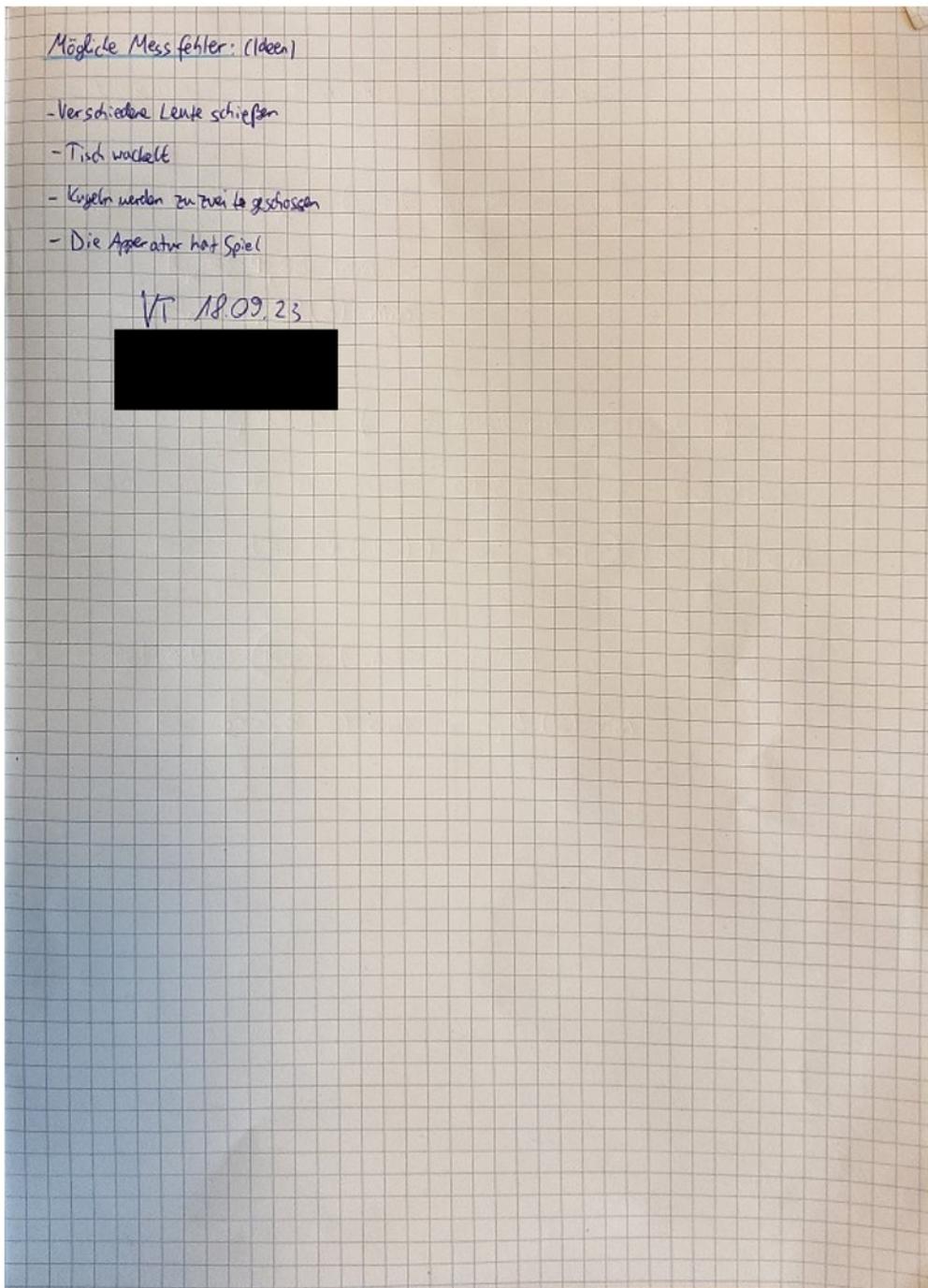


Abbildung 13: Laborheft Seite 4

6.4 Verzeichnisse

Tabellenverzeichnis

1	Messergebnisse $s, \bar{\theta}$ mit Unsicherheiten	4
---	---	---

Abbildungsverzeichnis

1	Versuchsaufbau	1
2	Trefferbild mit rot eingezeichnetem Mittelwert \bar{s} und gewählter Unsicherheit $s_{\bar{s}}$	3
3	Darstellung $\pm \cos(\frac{\bar{\theta}}{2})$ gegenüber Stoßparameter b	6
4	Residuendiagramm der Ausgleichsgerade in Abb. 3 mit Fehlerbalken	7
5	Target	11
6	Maßband zum Ablesen des Stoßparameters b	11
7	Einschussvorrichtung	11
8	Kugeln	11
9	$\bar{\theta}(b)$ mit Fehlerbalken und gefittetem \arccos	12
10	Laborheft Seite 1	13
11	Laborheft Seite 2	14
12	Laborheft Seite 3	15
13	Laborheft Seite 4	16

Literatur

[Fre23a] Uni Freiburg. „Datenanalyse A“. In: https://ilias.uni-freiburg.de/goto.php?target=file3207816_downloadclient;d=unifreiburg (2023).

[Fre23b] Uni Freiburg. „Versuch 14, Streuversuch“. In: https://ilias.uni-freiburg.de/goto.php?target=file3207821_unifreiburg (2023).