

Universität Freiburg

Kleines Physiklabor für Anfänger\*innen  
Ferienpraktikum im Sommersemester 2022

# Versuch 14

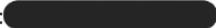
## Streuversuch

---

(Gruppe: )

17. September 2022

Datum der Durchführung: 16. September 2022

Assistent: 

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel des Versuchs</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Versuch</b>	<b>2</b>
2.1	Aufbau . . . . .	2
2.2	Durchführung . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Auswertung und Fehleranalyse</b>	<b>3</b>
3.1	Winkel $\theta$ bestimmen . . . . .	3
3.2	Bestimmung Radius Target . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>8</b>
4.1	Form Target . . . . .	8
4.2	Achsenabschnitt $a$ . . . . .	9
4.3	Vergleich ermittelter und gemessener Wert für Targetradius . . . . .	9
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>11</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>11</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>11</b>
<b>A</b>	<b>Diagramme</b>	<b>12</b>
<b>B</b>	<b>Laborbucheintrag</b>	<b>13</b>

## 1 Ziel des Versuchs

Durch Beschießen eines Targets mit kleinen Stahlkugeln untersuchen wir ihre Streuung, wobei wir den Stoßparameter  $b$  variieren. Über den Zusammenhang von Stoßparameter und Auftreffpunkt der Stahlkugeln können wir Aussagen über die Form des Targets treffen als auch auf dessen Radius schließen. ✓ gut!

## 2 Versuch

### 2.1 Aufbau

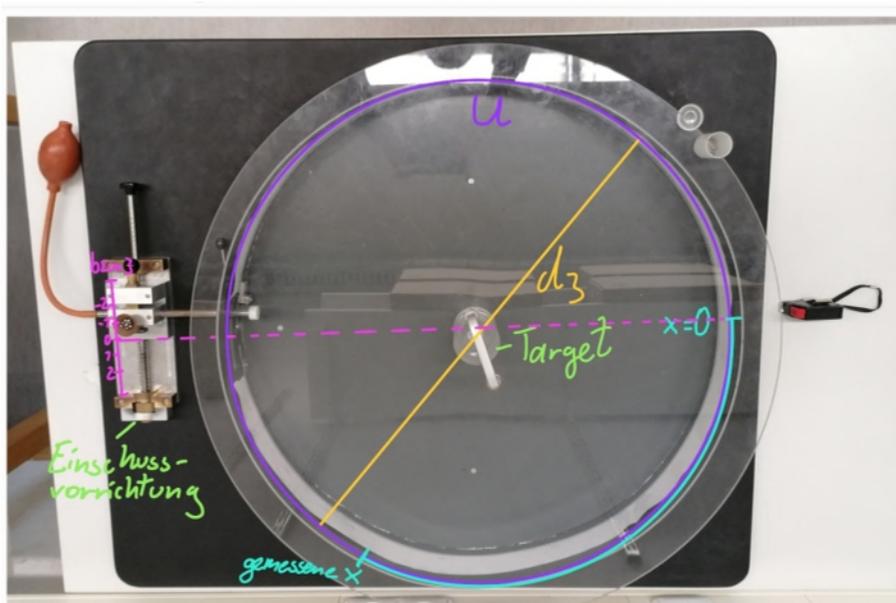


Abbildung 1: Versuchsaufbau und Definition der Variablen

In einer Stoßkammer mit Durchmesser  $d_3$  und Umfang  $U$  (Abb. 1) können Stahlkugeln mit Durchmesser  $d_1$  auf ein zylinderförmiges Target mit Durchmesser  $d_2$  geschossen werden (Abb. 2). Wir wollen die Form des Targets nun auch experimentell bestätigen. An der Innenwand der Stoßkammer liegt druckempfindliches Papier an, wodurch Markierungen entstehen, wenn die Stahlkugeln auf dieses auftreffen. Der Stoßparameter  $b$  entspricht bei uns einer Verschiebung der Einschussvorrichtung orthogonal zur Schussrichtung (Abb. 1).

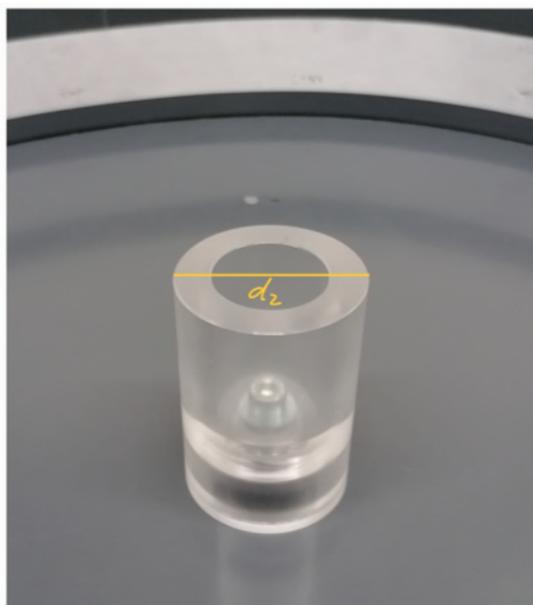


Abbildung 2: Target, auf das geschossen wurde mit Durchmesser  $d_2$

## 2.2 Durchführung

Den Durchmesser  $\hat{d}_1$  messen wir mit einer Bügelmessschraube,  $\hat{d}_3$  mit einem Maßband, was uns auf Ungenauigkeiten von  $\Delta d_1 = 5 \times 10^{-3}$  cm und  $\Delta d_3 = 0.1$  cm schließen lässt. Für 12 verschiedene Verschiebungen  $b$  zwischen -3 cm und 3 cm mit einer Unsicherheit  $\Delta b = 0.1$  cm schießen wir jeweils 20 Kugeln auf das Target und bestimmen am Ende für jeden Stoßparameter einen Mittelwert  $\bar{x}$  (s. Abb. 1) und eine Standardabweichung  $\Delta x$ , indem wir angenähert eine Normalverteilung über die Auftreffpunkte legen. Die Distanz zu  $x = 0$  messen wir mit dem Maßband.

*Theorie Kapitel...  
Im Versuch nehmen wir einen elastischen Stoß zwischen zwei Objekten mit rundem Querschnitt an. Daraus ergeben sich folgende Zusammenhänge...*

## 3 Auswertung und Fehleranalyse

*Was der Auftreffpunkt der Kugeln für eine Inclination der Schießvorrichtung bei herausgenommenem Target entspricht.*

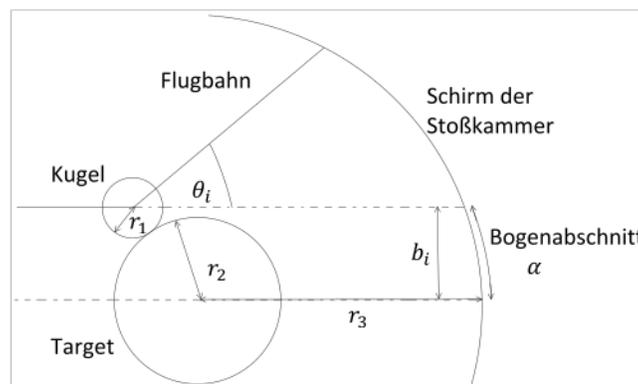
### 3.1 Winkel $\theta$ bestimmen

Mit den gemessenen Mittelwerten  $\bar{x}_i$ , den Werten  $\hat{b}_i$  und deren Unsicherheiten, die in Tabelle 1 zu finden sind, dem Durchmesser  $d_3$  und dessen Unsicherheit berechnen wir die Winkel  $\hat{\theta}_i$  (s. Abb. 3). Hierbei wird  $\alpha$  mit  $b_i$  genähert, da  $r_1 + r_2 \ll r_3$ . Außerdem gilt  $U = \pi d_3$ . Damit stellen wir das Verhältnis aus Gleichung (1) auf.

*naja vielleicht ein bisschen lang.*

Tabelle 1: Messwerte  $\hat{b}_i$  und  $\bar{x}_i$  und deren Unsicherheiten  $\Delta b_i$  und  $\Delta x_i$  aus Anhang B auf eine Nachkommastelle gerundet, da das Ablesen nicht genauer möglich ist

Index $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
$\hat{b}_i$ [cm]	-3.0	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$\Delta b_i$ [cm]	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\bar{x}_i$ [cm]	-24.5	-45.7	-60.4	-73.2	-84.2	-93.0	90.0	80.3	68.3	54.9	38.7
$\Delta x_i$ [cm]	0.6	0.5	0.4	0.5	0.4	0.3	0.2	0.4	0.5	0.6	0.5



✓  
Schön

Abbildung 3: Winkelberechnung und Definition der dafür benötigten Größen

$$\frac{\hat{\theta}_i}{2\pi} = \frac{\hat{x}_i - \hat{b}_i}{U} = \frac{\hat{x}_i - \hat{b}_i}{\pi \hat{d}_3} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_i = \frac{\hat{x}_i - \hat{b}_i}{\pi \hat{d}_3} \cdot 2\pi \quad \checkmark$$

Die zugehörigen Unsicherheit errechnen wir mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung. Hier nehmen wir für  $\Delta x$  nur die abgemessenen Werte an und vernachlässigen weitere Unsicherheiten die durch das Ablesen oder Ähnliches zustande kommen könnten, da diese im Verhältnis sehr klein sind. ✓

$$\Delta \theta_i = \sqrt{\left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial b_i} \Delta b_i\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial d_3} \Delta d_3\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{d_3} \Delta x_i\right)^2 + \left(-\frac{2}{d_3} \Delta b_i\right)^2 + \left(-2 \frac{x_i - b_i}{d_3^2} \Delta d_3\right)^2}$$

Tabelle 2: Werte für  $\hat{\theta}_i$ ,  $\Delta\theta_i$  und die relative Unsicherheit ✓

Index $i$	$\theta_i$ [rad]	$\frac{\hat{\theta}_i}{\Delta\theta}$ [%]
1	-0.672(19)	2.8
2	-1.350(15)	1.1
3	-1.825(13)	0.7
4	-2.241(17)	0.7
5	-2.600(14)	0.5
6	-2.891(11)	0.4
7	2.797(8)	0.3
8	2.478(13)	0.5
9	2.088(16)	0.8
10	1.653(18)	1.1
11	1.131(16)	1.4

Dann habt ihr das Problem erst gar nicht. So wird das auch eher in Popern formalisiert.  
Nicht: "In folgender Tabelle"

Die berechneten Werte sind in ~~folgender~~ Tabelle ~~angegeben~~ *er zu finden.*

Diese Werte tragen wir in einem Diagramm Abb. 6 auf  $b$  auf. Hierbei ist kein linearer Zusammenhang erkennbar. Die Unsicherheiten  $\Delta\theta_i$  und  $\Delta b_i$  tragen wir nicht im Diagramm auf, da die Fehlerbalken zu klein wären. ✓

*erwartet ihr das? Das Diagramm hättet ihr durchaus in die Auswertung machen können. Es wurde ja explizit danach gefragt.*

### 3.2 Bestimmung Radius Target

Wie in Abschnitt 3.1 festgestellt, können wir keinen linearen Zusammenhang zwischen Stoßparameter  $b$  und Streuwinkel  $\theta$  erkennen. Um den Radius  $r_2$  des Targets zu bestimmen, nutzen wir Koordinatentransformation um eine lineare Abhängigkeit zwischen  $b$  und  $\theta$  zu finden. Dazu berechnen wir für jedes  $b_i$  entsprechend  $\cos(\frac{\theta_i}{2})$  und tragen die berechneten Werte in einem Diagramm auf  $b$  auf (Abb. 7 in Anhang A). Man erkennt hier eine lineare Abhängigkeit.  $\Delta \cos(\frac{\theta_i}{2})$  erhalten wir durch Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Die Unsicherheit

$$\Delta \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\hat{\theta}_i}{2}\right) \cdot \Delta\theta_i\right)^2}$$

und die relative Unsicherheit berechnen wir jeweils mit :

$$\left| \frac{\Delta \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)} \right|$$

Tabelle 3: Werte für  $\cos(\frac{\hat{\theta}_i}{2})$ ,  $\Delta \cos(\frac{\theta_i}{2})$  und die relative Unsicherheit

Stoßparameter $b[\text{cm}]$	$\cos(\frac{\theta_i}{2})$	relative Unsicherheit [%]
-3.0	-0.944(3)	0.3
-2.5	-0.781(5)	0.6
-2.0	-0.612(5)	0.9
-1.5	-0.435(7)	1.7
-1.0	-0.267(7)	2.4
-0.5	-0.125(5)	4.2
0.5	0.171(4)	2.4
1.0	0.326(6)	2.0
1.5	0.503(7)	1.4
2.0	0.677(6)	1.0
2.5	0.844(4)	0.5

Da wir die Fehlerbalken nicht in unser Diagramm einzeichnen können, erstellen wir digital eine Ausgleichsgerade (Abb. 4), welche die Steigung  $\hat{m} = 32.1 \frac{1}{\text{m}}$  und den dimensionslosen Achsenabschnitt  $\hat{a} = 0.029$  hat. Durch lineare Regression (Formeln aus der Datenanalyse Teil A auf ILIAS) erhalten wir für  $n = 11$  (der zwölfte Wert fließt nicht in die Analyse mit ein, da die Stahlkugel hier das Target nicht mehr getroffen hat).

besser mit nicht kursiv

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\cos(\frac{\hat{\theta}_i}{2}) - (\hat{a} - \hat{m}b_i))^2}{n-2}} = 0.016$$

$$\Delta a = s \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{n \sum_{i=1}^n b_i^2 - (\sum_{i=1}^n b_i)^2}} = 0.005$$

$$\Delta m = s \cdot \sqrt{\frac{n}{n \sum_{i=1}^n b_i^2 - (\sum_{i=1}^n b_i)^2}} = 0.3 \text{ m}^{-1}$$

und damit

$$a = 0.029 \pm 0.005 \tag{2}$$

$$m = (32.1 \pm 0.3) \text{ m}^{-1} \tag{3}$$

Mithilfe <sup>der Steigung, dem Kugelradius</sup> von  $m$  und  $r_1$  können wir nun den Targetradius ermitteln. In der Ver-suchsanleitung ist für den elastischen Stoß zweier Kugeln gegeben:

OK hier kommt das "Theoriekapitel"

Wir nehmen an der Stoß erfolge elastisch dann gilt:

$$\theta = 2 \arccos\left(\frac{b}{r_1 + r_2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{r_1 + r_2} \tag{4}$$

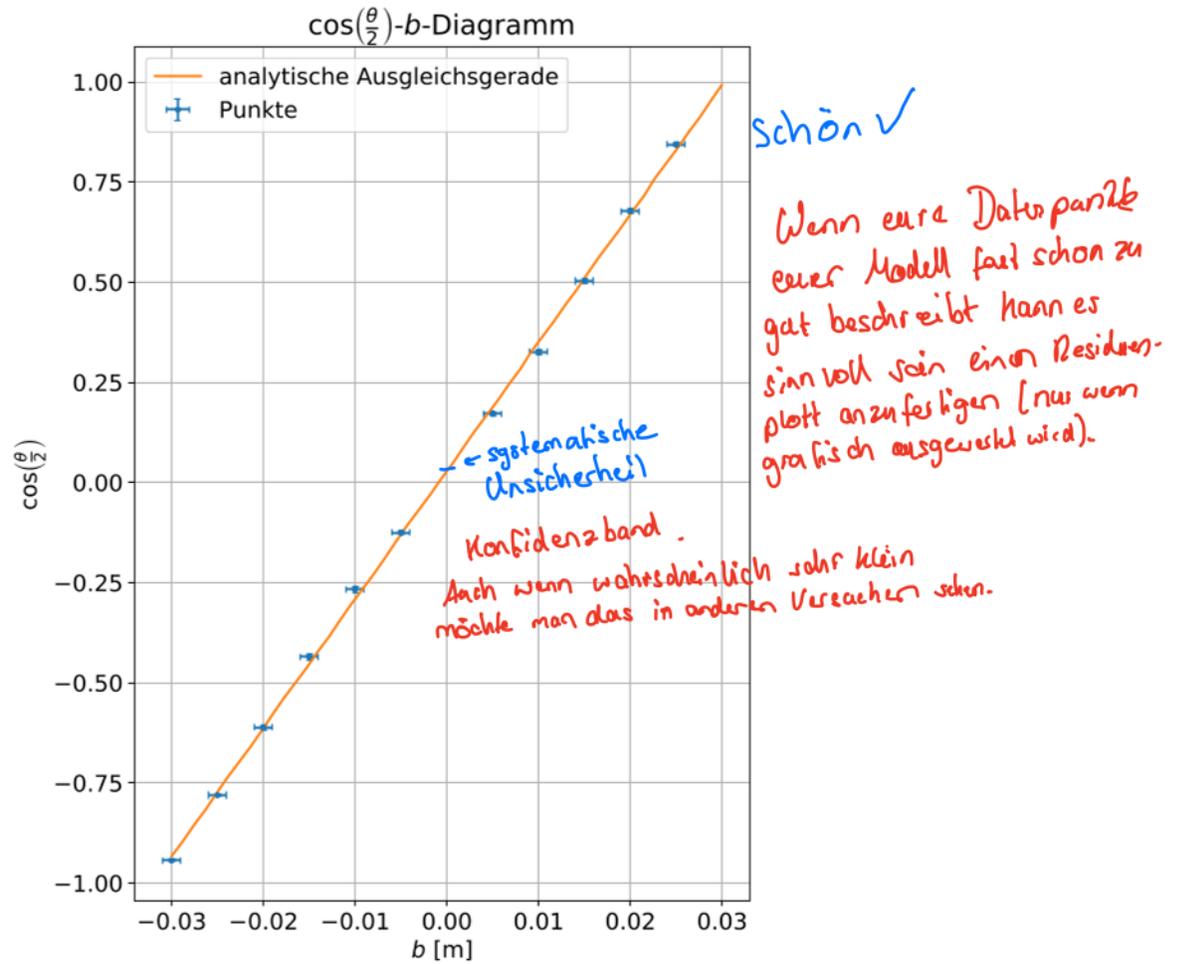


Abbildung 4:  $\cos(\frac{\theta}{2})$ -b-Diagramm, analytisch

Wir können also die Steigung der Ausgleichsgeraden auch ausdrücken durch

$$m = \frac{1}{r_1 + r_2} \quad (5)$$

Stellt man Gleichung (5) nun nach  $r_2$  um, erhält man für den Bestwert  $\hat{r}_2 = \frac{\hat{d}_1}{2}$ :

$$\hat{r}_2 = \frac{1}{\hat{m}} - \hat{r}_1 = 58.1 \text{ mm}$$

Auch hier ermitteln wir die Unsicherheit über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung und erhalten:

$$\Delta r_2 = \sqrt{\left(-\frac{1}{\hat{m}^2} \Delta m\right)^2 + (-\Delta r_1)^2} = 0.3 \text{ mm}$$

Für den Radius des Targets ergibt sich also

$$r_2 = (58.1 \pm 0.3) \text{ mm}$$

mit einer relativen Unsicherheit von

$$\frac{\Delta r_2}{\hat{r}_2} = 0.5\%$$

## 4 Diskussion

### 4.1 Form Target

Wie in Abb. 2 erkennbar, war unser Target näherungsweise zylinderförmig, wir haben so auf das Target geschossen, dass die runde Seite eine Streuung parallel zum Tisch (in x-Richtung) erzeugt.

Diese Form spiegelt sich auch in unseren Messergebnissen wieder: Zum Einen ist klar erkennbar, dass in jeder Messreihe für ein festes  $b$  die Streuung in  $x$ -Richtung wesentlich größer ist als in  $y$ -Richtung und die Auftreffpunkte sich auf etwa der Höhe befinden, auf der die Kugeln abgeschossen werden (Abb. 5). Dies kommt daher, dass der Zylinder in  $y$ -Richtung keine Wölbung aufweist, bei z.B. einer Kugel würden die Werte auch in  $y$ -Richtung gestreut werden. Außerdem konnten wir bei einer Auftragung von  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$  auf  $b$  einen proportionalen Zusammenhang feststellen, der darauf schließen lässt, dass die Gleichung (4), die in der Versuchsanleitung für den elastischen Stoß zweier Kugeln hergeleitet wurde auf unser Target zutrifft. Dies bestätigt die runde Wölbung des Zylinders in dem Bereich, in dem die Stahlkugeln auf das Target treffen. Über die von der Einschussvorrichtung wegweisende Seite des Targets lässt sich durch die Messung allerdings keine Aussage treffen. *genau*

Schon vor der Auswertung war es zudem möglich den Radius des Targets in positive  $b$  Richtung einzugrenzen, da die Kugeln bei  $b = 3 \text{ cm}$  an dem Target vorbeischießen, in negative  $b$ -Richtung konnten wir dies allerdings nicht tun, da die Einschussvorrichtung sich maximal  $-3 \text{ cm}$  verschieben lässt und hier das Target noch getroffen wird.

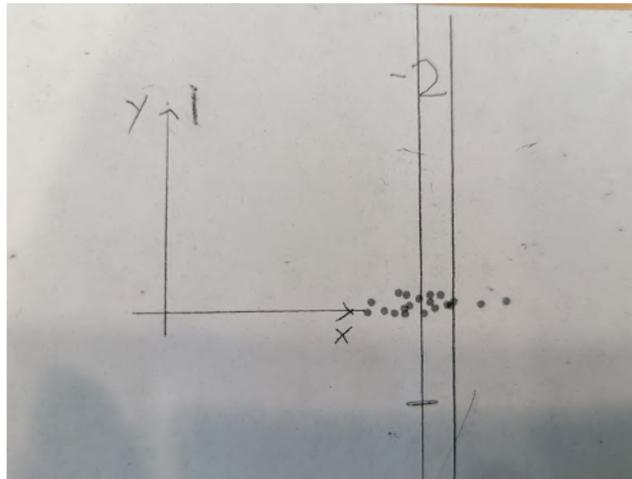


Abbildung 5: Beispiel einer Streuung der Auftreffpunkte für ein festes  $b$  und Definition von  $x$ - und  $y$ - Richtung.

#### 4.2 Achsenabschnitt $a$

Entgegen der Erwartung durch Gleichung (4) ist der Achsenabschnitt  $a$  der Geraden in Abb. 4 nicht im Ursprung. Dies lässt sich dadurch erklären, dass wir den Wert für  $b = 0$  selbst abgeschätzt und festgelegt haben. Wenn wir über

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = a = 0.029$$

auf  $\theta(0)$  schließen erhalten wir somit auch nicht den erwarteten Wert  $\theta = 180^\circ$  (die Stahlkugel wird nicht abgelenkt und fliegt auf der selben Bahn zurück wie sie hingeschossen wurde) sondern  $\theta(0) = 177^\circ$ . Ermitteln wir über

$$0 = \frac{b}{r_1 + r_2} + a$$

den x-Achsenabschnitt der Ausgleichsgeraden und somit den Wert für  $b$ , an dem die Einschussvorrichtung tatsächlich senkrecht auf das Target geschossen hätte, erhalten wir  $b = -1$  mm.

✓ Macht das Sinn das im nachhinein zu bereinigen?  
Die Unsicherheit ist ja systematisch

#### 4.3 Vergleich ermittelter und gemessener Wert für Targetradius

Um unser Ergebnis für den Targetradius überprüfen zu können, haben wir mit einem Maßband den Targetradius  $r_{2m} = 2.9$  cm mit einer geschätzten Ungenauigkeit von  $\Delta r_{2m} = 0.5$  mm. Wir machen einen t-Test um die Verträglichkeit

von  $r_2$  mit  $r_{2m}$  zu überprüfen:

$$t = \frac{|r_{2m} - r_2|}{\sqrt{(\Delta r_{2m})^2 + (\Delta r_2)^2}} = 0.09 \quad \checkmark$$

Da  $t \ll 2$  schließen wir darauf, dass der Wert  $r_2$ , der sich aus der Streuung der Stahlkugeln ergibt sehr verträglich ist mit dem, den wir mit dem Maßband gemessen haben.

Wirklich ein sehr gutes Ergebnis  
→ Auch wenn man bemerkt dass eure Unsicherheiten  
sehr klein sind.

- Diskussion statistische Unsicherheiten ..
- Was eure  $\Theta$ -Skala Eichung perfekt  $\Rightarrow$  systematische Unsicherheit
- Verbesserungsvorschläge für die Durchführung des Versuchs.

## Abbildungsverzeichnis

1	Versuchsaufbau . . . . .	2
2	Target . . . . .	3
3	Skizze Winkelberechnung . . . . .	4
4	$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ - $b$ -Diagramm, analytisch . . . . .	7
5	Streuung Auftreffpunkte . . . . .	9
6	$\theta$ - $b$ -Diagramm . . . . .	12
7	$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ - $b$ -Diagramm, zeichnerisch . . . . .	13

## Tabellenverzeichnis

1	Messwerte $b_i$ und $x_i$ . . . . .	4
2	Werte für Winkel $\theta_i$ . . . . .	5
3	Werte für $\cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)$ . . . . .	6

## A Diagramme

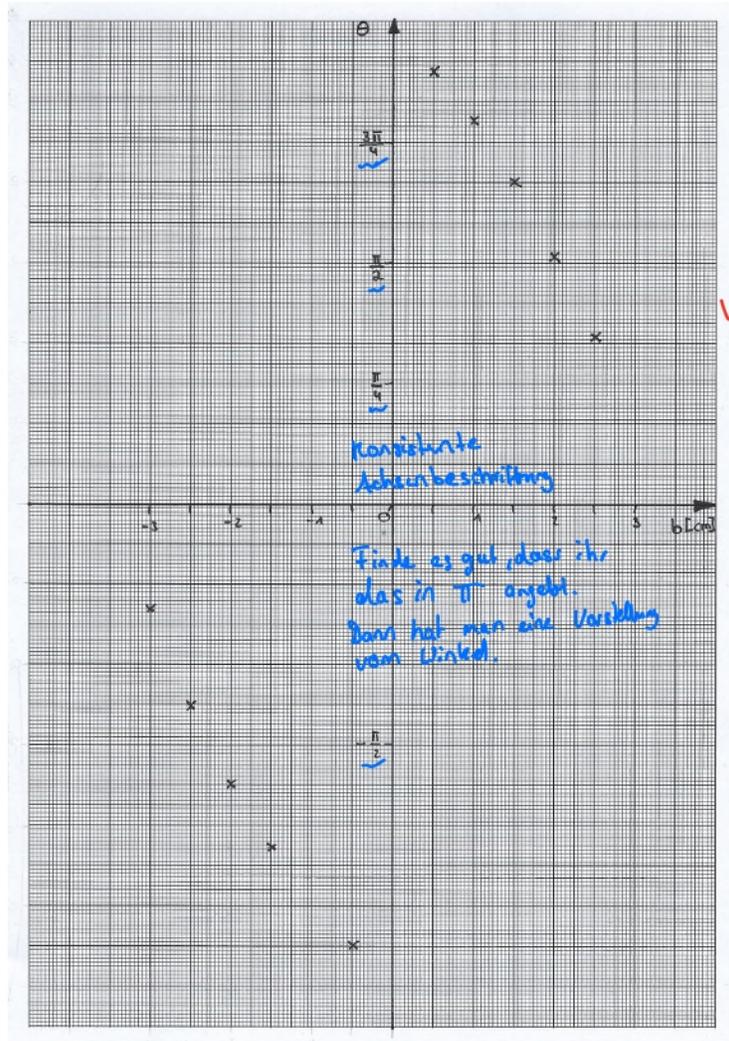


Abbildung 6:  $\theta$ - $b$ -Diagramm

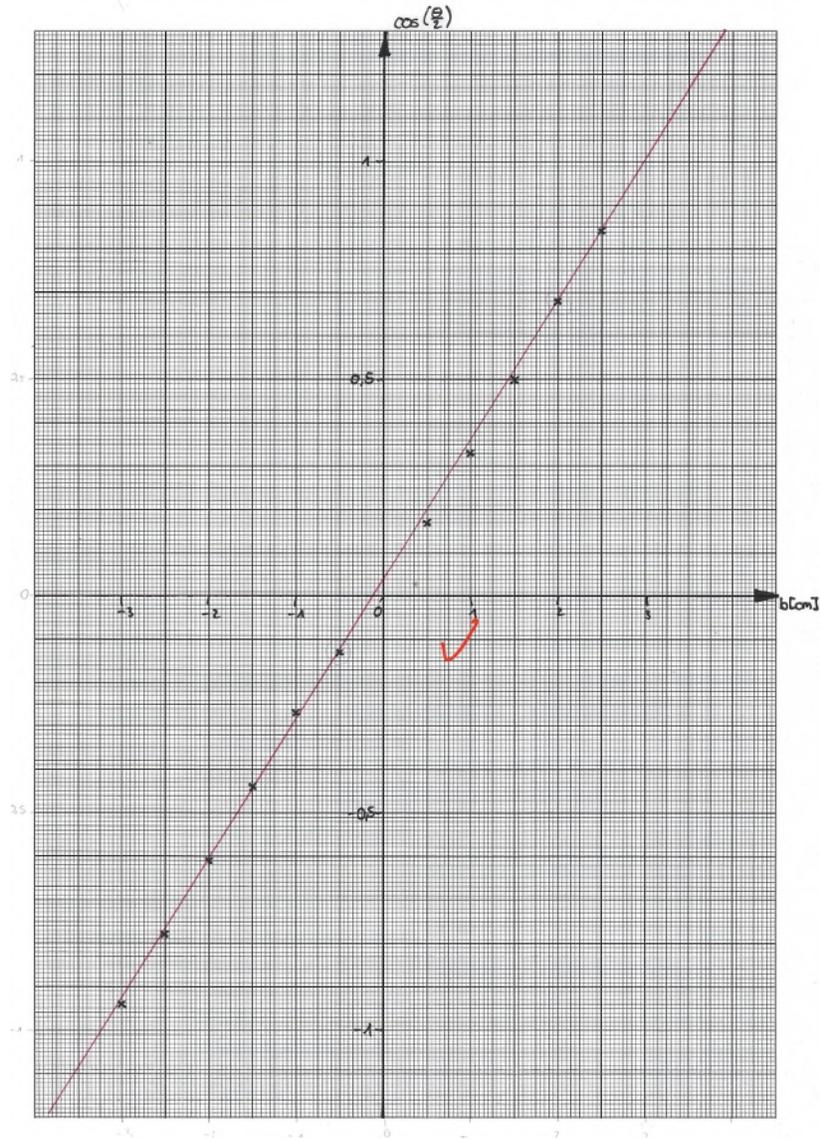
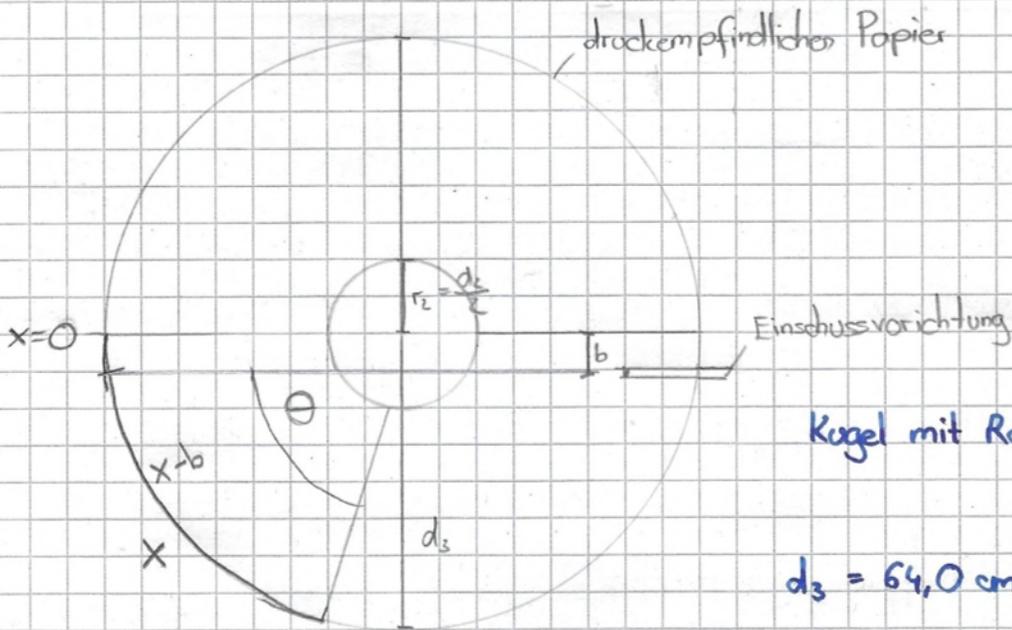


Abbildung 7:  $\cos(\frac{\theta}{2})$ - $b$ -Diagramm, zeichnerisch

## B Laborbucheintrag



Kugel mit Radius  $r_1 = \frac{d_1}{2}$

$d_3 = 64,0 \text{ cm}$      $\Delta d_3 = 0,1 \text{ cm}$

Messungen

$d_1 = 0,84 \text{ mm}$   
 $0,424 \text{ cm}$

$\Delta d_1 = 0,005 \text{ cm}$

Setze Skala bei Einschussvorrichtung 50cm als Nullpunkt  
(Ungenauigkeiten, systematische Fehler bei Auswertung betrachten)

$d_2 = 58 \text{ mm}$

$\Delta d_2 = 1 \text{ mm}$

1. Fortzet b

$b = + 2 \text{ cm}$

$\Delta b = 0,1 \text{ cm}$

1	9	17
2	10	18
3	11	19
4	12	20
5	13	21
6	14	
7	15	
8	16	

4. verschiedene b, jeweils 20 Schüsse

b (cm)	Distanz x (cm) $\Delta z = 7 \text{ mm}$	Stellung $\Delta x$ (cm)
+ 0,5	90,0	0,20
+ 1	<del>83,0</del> 80,3	0,40
+ 1,5	68,3	0,49
+ 2	54,9	0,55
+ 2,5	38,7	0,50
- 0,5	93,0	0,29
<del>2,5</del> -1	84,2	0,40
3 - 1,5	trifft Target nicht <sup>73,2</sup>	0,51
- 0,5 - 2	60,4	0,41
<del>1,5</del> - 2,5	45,7	0,45
3	trifft Target nicht	
- 3	24,5	0,60
<del>- 3,5</del>		

Weitere Unsicherheiten  $\Delta z$  von  $\Delta x$  werden vernachlässigt, da diese im Vergleich zu  $\Delta x$  sehr klein sind und weitere Werte nicht signifikant beeinflussen

positive b : Skala auf Einschussvorrichtung in positive Richtung (51cm, ...)  
 negative b : Skala auf Einschussvorrichtung in negative Richtung (49cm, ...)

