Inhaltsverzeichnis

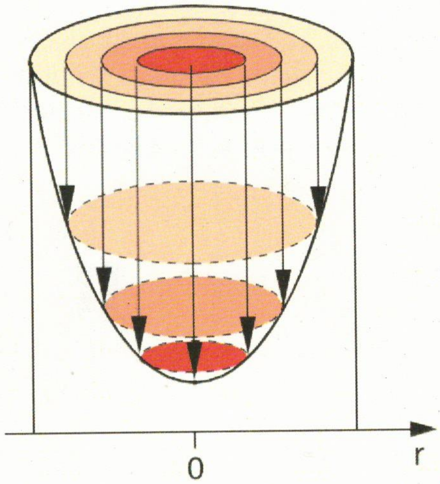
1 Versuchsbeschreibung

1.1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch soll erst das Gesetz von Hagen-Poiseuille überprüft werden. Anschließend soll die Viskosität von Wasser bestimmt werden, indem man dieses durch Kapillaren mit bekanntem Durchmesser, Druck und Länge leitet, und den Volumenstrom misst.

1.2 Physikalische Zusammenhänge

Bei strömenden Flüssigkeiten unterscheidet man zwischen turbulenten und laminaren Strömungen. Ob eine Strömung laminar oder turbulent ist, hängt hauptsächlich von geometrischen Abmessungen der Anordnung, Stömungsgeschwindigkeit, Dichte und Viskosität der Flüssigkeit ab. Sind die Abmessungen recht klein und die Strömungsgeschwindigkeit niedrig, dann ist die Strömung meist laminar.
Ist eine Strömung in einem Rohr laminar, so bewegt sich die Flüssigkeit in zylindrischen Schichten durch das Rohr, wobei sich die äußeren Schichten langsamer bewegen als die Inneren. Es bildet sich also ein parabelförmiges Strömungsprofil (siehe Abb. 1).



[1]

Abbildung 1: Modell einer laminaren Strömung in einem zylindrischen Rohr

Dabei ist die Viskosität der Flüssigkeit über die Reibungskraft definiert, welche benötigt wird um zwei Flüssigkeitsschichten aneinander vorbei zu bewegen. Diese Kraft ergibt sich aus der Formel

$$F_R = \eta \cdot A_{\text{Hülle}} \cdot \frac{dv}{dx} \quad . \tag{1.1}$$

Dabei ist F_R die Reiburngskraft zwischen zwei Flüssigkeitsschichten mit der Fläche $A_{\text{Hülle}}$ und dv die Geschwindigkeitsdifferenz der Schichten und dx der Abstand dieser Schichten. Im allgemeinen sinkt die Viskosität von Flüssigkeiten und Gase bei höherer Temperatur.
Durch Gleichsetzen dieser Kraft mit der Treibkraft, welche durch Druckdifferenz Δp entsteht, der Schichten und integrieren, erhält man die Gleichung

$$v(x) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right) \tag{1.2}$$

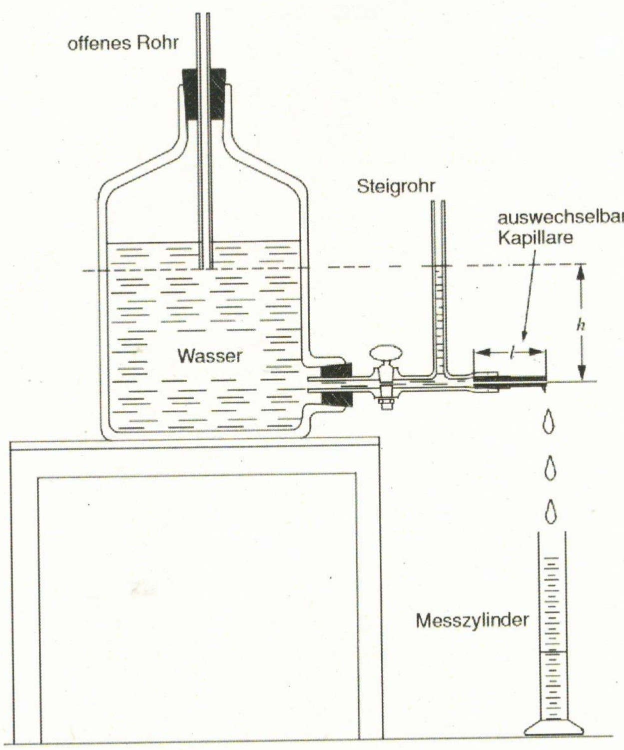
für die Geschwindigkeit der Schichten in Abhängigkeit des Radius r, Radius des Rohrs R, des Druckunterschieds $(p_1 - p_2)$ und der Viskosität η. Dies ist das quadratische Strömungsprofil. Durch integrieren erhalten wir dann

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R v(x) \cdot x \cdot dx \cdot d\varphi = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta l} R^4 \quad . \tag{1.3}$$

Die Druckdifferenz $(p_1 - p_2)$ ist hier durch den hydrostatischen Druck gegeben und lässt sich durch die Formel $\varrho g h$ berechnen. Dies ist das Hagen-Poiseuille'sche Gesetzt. Können wir die anderen Größen entsprechend genau bestimmen, so können wir daraus die Viskosität η bestimmen.

1.3 Versuchsaufbau

Zunächst dient der Aufbau dazu einen Druckunterschied zwischen zwei Enden einer Kapillare zu erzeugen. Hierzu nimmt man eine Flasche, die im inneren einen hydrostatischen druck erzeugt. Sie verfügt am unteren Ende über einen Ausfluss, an den über ein Ventil ein Rohr angeschlossen ist. Am Ende dieses Rohres wird die Kapillare angeschlossen.
Um den Druck vor der Kapillare zu kennen ist an diesem Rohr noch ein senkrechtes Steigrohr angebracht. Um den Druck konstant zu halten ist die Flasche oben verschlossen und ein Rohr durch den Stopfen geführt, sodass es ins Wasser eintaucht. Nun wird der Druck von der Wassersäule, die vom Ende dieses Rohres ausgeht und bis zu Höhe des Ventils reicht, erzeugt und bleibt konstant solange der Wasserstand nicht unter das Ende des Rohres fällt. Eine Voraussetzung dafür ist natürlich, dass der Verschluss der Flasche luftdicht ist. Unter die Kapillare wird ein Messzylinder gestellt um das Durchflussvolumen durch die Kapillare zu bestimmen. Weiterhin benötigen wir eine Stoppuhr um die Zeit, die das Wasser zum durchfließen benötigt zu messen.



[2]

Abbildung 2: Skizze des Versuchsaufbaus

1.4 Durchführung

Zuerst müssen wir mit dem Stopfen, der das Rohr in der Mitte hat, die große Flasche abdichten. Bevor wir beginnen können, müssen wir aber noch dafür sorgen, dass das Rohr, welches durch den stopfen verläuft, nicht mit Wasser gefüllt ist. Andernfalls würde sich der Wasserstand und damit der hydrostatische Druck, mit der Zeit ändern. Wir öffnen also das Ventil und lassen solange Wasser abfließen, bis in der besagten Röhre kein Wasser mehr steht. Danach können wir das Ventil wieder schließen.
Nun müssen wir die Höhe des Wasserstandes im Steigrohr messen, um später den Druck bestimmen zu können. Außerdem müssen wir das Gefäß, in welchem wir das Wasser wieder auffangen, wiegen, um sein Leergewicht zu erfahren. Zusätzlich müssen wir den Durchmesser der Kapillare messen. Haben wir das erledigt, so müssen wir noch die Temperatur des Wassers messen.
Jetzt können wir mit der Messung selbst beginnen. Dazu öffnen wir das Ventil und warten eine kurze Zeit, bis sich der Volumenstrom bei einem Wert eingestellt hat. Dann können wir den Messzylinder unter das Ende der Kapillare stellen und das Volumen der durchfließenden Flüssigkeit messen. Gleichzeitig fangen wir an die Zeit zu messen. Nach einer bestimmten Zeit entfernen wir das Gefäß wieder. Erst danach wird das Ventil wieder geschlossen.
Jetzt messen wir die Temperatur noch einmal, um zu überprüfen ob sie sich geändert hat. Dann können wir den vollen Messzylinder wiegen und aus der Differenz des Gewichts das Volumen des aufgefangenen Wassers bestimmen.
Wir notieren also die Zeit, das Volumen, den Durchmesser, die Höhe das Wasserstandes und die Temperatur bei diesem Versuch.

Dieser Versuch wird mit fünf verschiedenen Kapillaren durchgeführt und bei jeder Kapillare wird fünf mal der Volumenstrom gemessen. Es soll darauf geachtet werden, dass sich die Durchmesser der jeweiligen Kapillaren nach Möglichkeit deutlich unterscheiden.

2 Messwerte

2.1 Kapillare 1

Die erste Kapillare hat einen Durchmesser und eine Länge von:

$$d = (0{,}74 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm} \qquad l = (81{,}50 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm} \quad . \tag{2.1}$$

Während der Messreihe hatte das Wasser im Steigrohr eine Höhe auf der Skala von:

$$h = (74 \pm 2)\,\mathrm{mm} \quad , \tag{2.2}$$

und die Wassertemperatur Lag bei:

$$T = (21{,}0 \pm 0{,}5)\,^\circ\mathrm{C} \quad . \tag{2.3}$$

Unter diesen Bedienungen ergaben sich die Werte für die Startmasse des Glaskolben m_1 und die Masse nach der Messung m_2, sowie die Dazwischen Vergangene Zeit t.

Tabelle 1: Messergebnisse zur 1. Kapillare

Nr	m_1/g	m_2/g	t/s
1	55,92	62,67	89,78
2	56,05	61,29	71,84
3	55,94	61,58	77,62
4	70,57	75,88	72,5
5	55,99	61,8	80,15

2.2 Kapillare 2

Die oben erläuterten Parameter (Kap.2.1) sind:

$$d = (0{,}99 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm} \qquad l = (87{,}70 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm} \qquad h = (73 \pm 2)\,\mathrm{mm} \qquad T = (20{,}7 \pm 0{,}5)\,^\circ\mathrm{C} \quad . \tag{2.4}$$

Die dazugehörigen Messwerte lauten:

Tabelle 2: Messergebnisse zur 2. Kapillare

Nr	m_1/g	m_2/g	t/s
1	70,28	93,15	80,34
2	55,97	73,66	62,71
3	70,56	93,01	79,34
4	56,15	72,82	59,18
5	70,44	95,93	90,12

2.3 Kapillare 3

Die oben erläuterten Parameter (Kap.2.1) sind:

$$d = (0{,}90 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm} \qquad l = (80{,}00 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm} \qquad h = (70 \pm 2)\,\mathrm{mm} \qquad T = (20{,}7 \pm 0{,}5)\,^\circ\mathrm{C} \quad . \tag{2.5}$$

Die dazugehörigen Messwerte lauten:

Tabelle 3: Messergebnisse zur 3. Kapillare

Nr	m_1/g	m_2/g	t/s
1	56,01	73,86	102,9
2	70,32	87,29	97,46
3	56,08	69,53	77,28
4	70,73	87	93,56
5	56,1	68,79	73,12

2.4 Kapillare 4

Die oben erläuterten Parameter (Kap.2.1) sind:

$$d = (0{,}81 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm} \qquad l = (79{,}80 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm} \qquad h = (70 \pm 2)\,\mathrm{mm} \qquad T = (21{,}0 \pm 0{,}5)\,^\circ\mathrm{C} \quad . \tag{2.6}$$

Die dazugehörigen Messwerte lauten:

Tabelle 4: Messergebnisse zur 4. Kapillare

Nr	m_1/g	m_2/g	t/s
1	56,02	66,16	82,12
2	70,57	92,44	177,96
3	55,99	65,38	76,53
4	70,28	80,93	87,46
5	56	68,73	103,96

→ für 10g Wasser hast ihr einmal 82, 87, 76 s. D.h der Fehler kann nicht nicht sichtbar sein!!

2.5 Kapillare 5

Die oben erläuterten Parameter (Kap.2.1) sind:

$$d = (0{,}88 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm} \qquad l = (120{,}10 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm} \qquad h = (70 \pm 2)\,\mathrm{mm} \qquad T = (21{,}0 \pm 0{,}5)\,^\circ\mathrm{C} \quad . \tag{2.7}$$

Die dazugehörigen Messwerte lauten:

Tabelle 5: Messergebnisse zur 5. Kapillare

Nr	m_1/g	m_2/g	t/s
1	55,99	66,03	87,9
2	70,28	86,92	146,21
3	56,02	64,11	71,43
4	70,63	79,69	80,5
5	55,94	64,84	79,18

3 Auswertung

Wir haben fünf Messreihen mit je fünf Werten. Bei jeder Messung haben wir die Ausflussmasse und die Zeit notiert. Daraus berechnen wir den Volumenstrom mit der Formel

$$I = \frac{m/\varrho}{t} \quad , \tag{3.1}$$

wobei m die Masse, ϱ die dichte von destilliertem Wasser und t die Zeit ist, in welcher die Flüssigkeit raus geflossen ist.
Für jede Messreihe bilden wir das gewichtete Mittel für die Messwerte. Den Fehler s_I erhalten wir mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung mit der Formel:

$$s_I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial m}\right)^2 s_m^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)^2 s_t^2} \tag{3.2}$$

und dann das gewichtete Mittel mit der Formel

$$\bar{I} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(I_i/s_{I_i}^2)}{\sum_{i=1}^{5}(1/s_{I_i}^2)} \quad . \tag{3.3}$$

Wir erhalten also je einen Mittelwert für den Volumenstrom. Den Fehler darauf erhalten wir entsprechend mit der Formel:

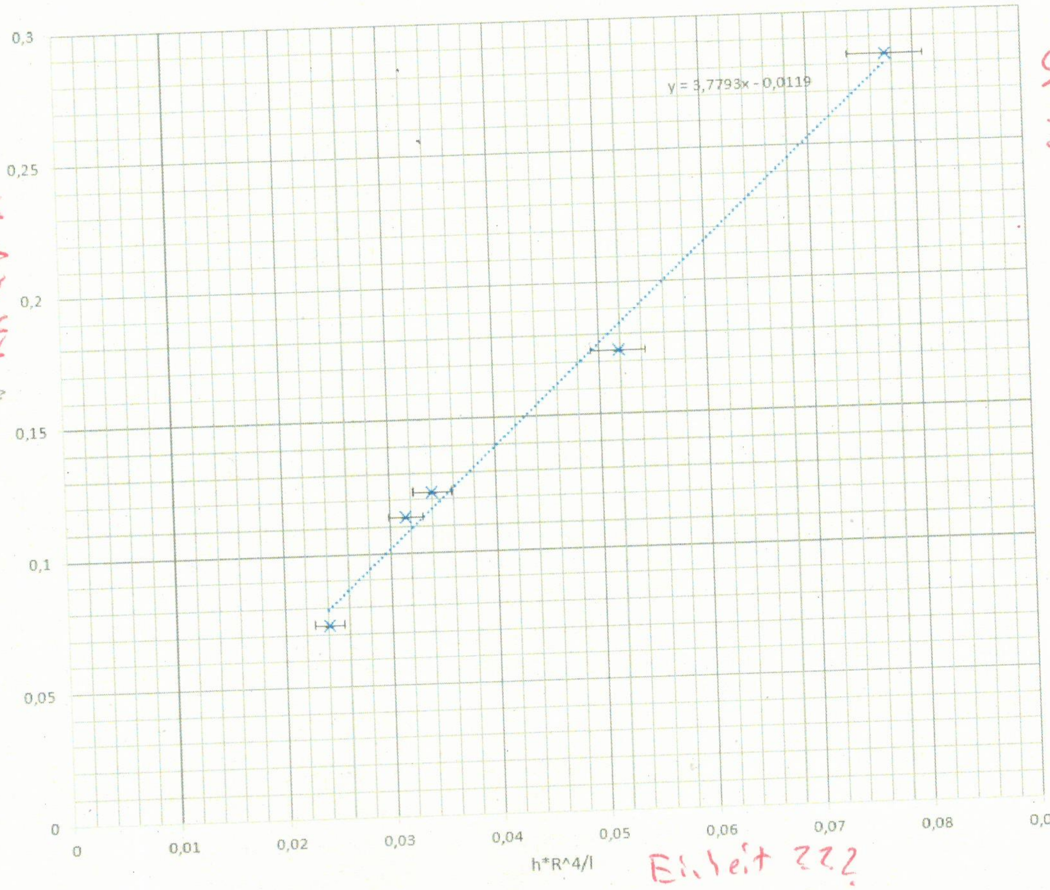
$$s_{\bar{I}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(1/s_{I_i}^2)}} \quad . \tag{3.4}$$

Nun wollen wir den Volumenstrom I als Funktion von $x := \frac{h \cdot R^4}{l}$ auftragen. Davor müssen wir aber noch den Fehler von x berechnen, um Fehlerbalken eintragen zu können. Da die Variablen von x innerhalb einer Messreihe konstant sind, müssen wir den Fehler über die Gaußsche Fehlerfortpflanmzung berechnen. Dies geschieht mit der Formel

$$s_x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial h}\right)^2 s_h^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial R}\right)^2 s_R^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 s_l^2} \quad . \tag{3.5}$$

Als Fehler Für die Höhe h haben wir dabei 2 mm und für die Genauigkeit der Länge und des Radius der Kapillaren jeweils die letzte signifikante Stelle der Angaben, also 0,01 mm, gewählt. ok
Um nun I als Funktion von $\frac{h \cdot R^4}{l}$ auf zu tragen, nutzen wir eine Lineare Regression. Wir erhalten die Gerade aus Abb. 3.

wo stehen die Werte für $\bar{I}_V$
und $s_{\bar{I}_V}$??
Gehören dazu!



Einheit ?!

Einheit ???

Sind die Fehler auf Ir wirklich so klein oder nicht eingezeichnet? Ich kann sie nicht finden

[2]

Abbildung 3: I als Funktion von $\frac{h \cdot R^4}{l}$

Hier können wir erkennen, dass der Zusammenhang zwischen I und $\frac{h \cdot R^4}{l}$ linear ist. Somit ist also I prortional zu R^4, sowie zu l und h.
Aus der Linearen Regression erhalten wir die Steigung unserer Geraden

$$b = \frac{I}{\frac{h \cdot R^4}{l}} = (3,8 \pm 0,2) \frac{1}{\mathrm{mm\,s}} \tag{3.6}$$

und den Fehler der selben.
Durch umformen der Formel 1.3 erhalten wir dann die gesuchte Viskosität aus der Gleichung

$$\eta = \frac{\pi \cdot \varrho \cdot g}{8b} = (1,02 \pm 0,05) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa\,s} \quad , \tag{3.7}$$

wobei $\varrho = 0,9982 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ [3] die Dichte von destilliertem Wasser ist, $g = 9,80665 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ [4] der Ortsfaktor ist und b die bestimmte Steigung ist.

4 Fehleranalyse und Diskussion

4.1 Analyse der Fehler

In diesem Versuch gibt es eine viele Fehlerquellen. Einige von ihnen kommen durch Materialeigenschaften zustande. Wenn die Verschlussstopfen nicht dicht sind, die Kapillaren verstopft sind oder es große Druckschwankungen in der Steigröhre gibt, ändert sich der Volumenstrom. Allerdings wurde darauf geachtet, dass alle Stopfen dicht sind. Die Druckschwankungen lassen sich nie ganz eliminieren.
Die Dicke der Kapillaren ist durch Herstellerangaben gegeben. Da der Radius der Kapillaren in der vierten Potenz in die Berechnung der Viskosität eingeht, kommen hier wahrscheinlich die größten Fehler zustande.

Ein weiteres Problem ist die Tatsache, dass die Viskosität von Flüssigkeiten Temperatur abhängig ist. Sollte sich diese also während der Messungen ändern, so werden die Ergebnisse verfälscht. Aus diesem Grund wurde die Temperatur bei jeder Kapillare vor den Messungen gemessen.
Wenn man das Ventil öffnet, dann ist der maximale Druck durch die Steigröhre erst nach kurzer Zeit erreicht. Genauso fällt der Druck nach Schließen des Ventils langsam ab. Dadurch kann eine Abweichung in den Messergebnissen entstehen. Aus diesem Grund wurde der Messzylinder bei nur bei kontinuierlichem Tropfen unter den Ausfluss geschiben und wieder weg genommen. Dadurch wird dieser systematische Fehler vermieden.

Die Menge des ausgeflossenen Volumens wurde über die Masse des selben bestimmt. Dazu wurde das Gefäß vor und nach Ausfließen der Flüssigkeit gewogen. Dabei wurde sorgfältig darauf geachtet, dass außen am Gefäß keine Wassertropfen hängen, wodurch die Ungenauigkeit im wesentlichen durch die niedrige Ungenauigkeit der Waage bestimmt wird.
Die Messung der Höhe des Wasserstandes in der Steigröhre bringt ebenfalls Unsicherheit mit sich. Das liegt zum einen daran, dass der unterste Teil der Röhre keine Skala hat und man diesen mit einem Maßband von Hand messen muss. Zum anderen liegt das daran, dass der Wasserstand in der Steigröhre ständig hoch und runter schwingt und deshalb nicht so einfach abgelesen werden kann.

4.2 Diskussion der Ergebnisse

Der Fehler des jeweiligen Volumenstroms kommt von der seiner Masse und der Zeit, in der diese durch die Kapillare geflossen ist. Die Masse wurde mittels einer digitalen Waage sehr genau bestimmt, also ist der relative Fehler recht klein. Die Zeit wurde mit einer Stoppuhr bestimmt. Da die gemessenen Zeitabstände in der Regel deutlich größer als der Fehler waren, ist der relative Fehler auch hier recht klein.
Die Fehler für I sind im allgemeinen also recht klein. Dies erkennt man auch in der Grafik (siehe Abb. 3), da die Fehlerbalken für I recht klein sind. Glaub ich nicht

Für den jeweiligen x-Wert der Punkte ist der Fehler Deutlich größer. das liegt zum einen an der Höhe h des Wasserstands in der Steigröhre und der Länge l der Kapillare. Vor allem liegt es allerdings daran, dass R in der vierten Potenz in die Gleichung eingeht. Deshalb potenziert sich jeder Fehler schnell und eine kleine Abweichung von etwa 0,01 mm (Fehler auf R) kann zu großen Veränderungen des jeweiligen x-Wertes führen.
Die Folge ist, dass alle Messwerte einer Messreihe neben der Geraden liegen können. Es ist also innerhalb einer Messreihe ein systematischer Fehler. Dieser Fehler wird aber zum Teil wieder ausgeglichen, indem fünf verschiedene Kapillaren gewählt werden.

Die Viskosität ist zwar Temperaturabhängig, jedoch wurde diese oft gemessen, und festgestellt, dass sie sich nicht verändert hatte. Der Einfluss der Temperatur wird deshalb vernachlässigt.

5 Zusammenfassung

Wir haben gezeigt, dass sich die Durchflussmenge durch eine Kapillare wie im dem Hagen-Poiseuille'schen Gesetz verhält.
Wir haben die Messwerte zusammengetragen und aus den Mittelwerten der verschiedenen Volumenströme als Funktion von $\frac{hR^4}{l}$ aufgetragen und mittles einer Linearen Regression eine Gerade gebildet. Diese hatte die Steigung

$$\boxed{b = \frac{I}{\frac{h \cdot R^4}{l}} = (3,8 \pm 0,2)\frac{1}{\mathrm{mm\,s}}} \quad . \tag{5.1}$$

Mit der Steigung haben wir den Wert

$$\boxed{\eta = (1,02 \pm 0,05) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa\,s}} \tag{5.2}$$

als Viskosität von Wasser bestimmt.

6 Literatur

[1] *Experimentalphysik 1, Wofgang Demtröder, Springer Spektrum, 7. Auflage, Seite 222, Abbildung* 8.20 b

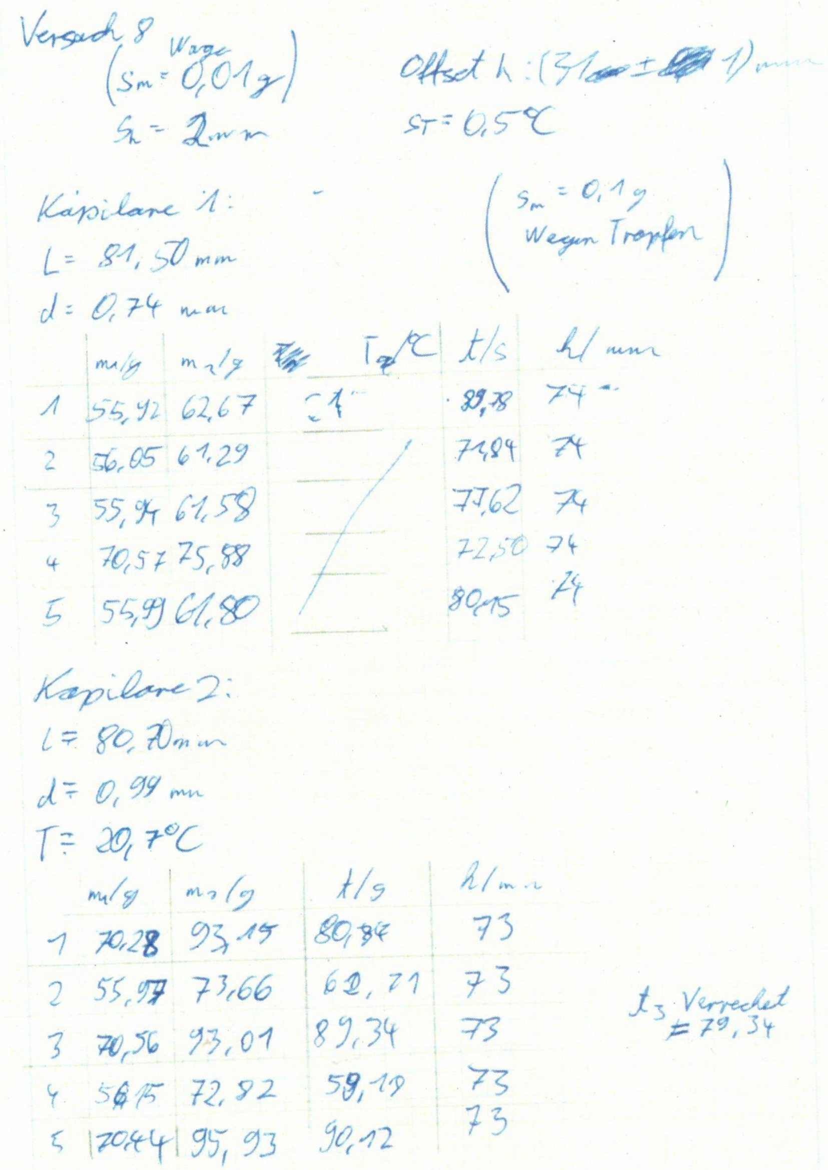
[2] *Handbuch Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 1, Teil A: Hinweise und Versuchsanleitungen, Stand 04/2017, Seite 71, Abbildung* 2.6

[3] Dichte von Wasser
Taschenbuch der Physik, Horst Kuchling, Hanser Verlag, Auflage 21, Seite 616, Tabelle 1b

[4] Erdbeschleunigung
Taschenbuch der Physik, Horst Kuchling, Hanser Verlag, Auflage 21, Seite 100

7 Anhang

7.1 Orginalmessungen



Versuch 8

Waage ($s_m = 0{,}01\,g$) Offset h: (31 ± 1) mm

$s_h = 2\,mm$ $s_T = 0{,}5\,°C$

Kapilare 1: ($s_m = 0{,}1\,g$ Wegen Tropfen)

L = 81,50 mm

d = 0,74 mm

	m_1/g	m_2/g	T/°C	t/s	h/mm
1	55,92	62,67	21	89,78	74
2	56,05	61,29		71,84	74
3	55,94	61,58		77,62	74
4	70,57	75,88		72,50	74
5	55,99	61,80		80,15	74

Kapilare 2:

L = 80,70 mm

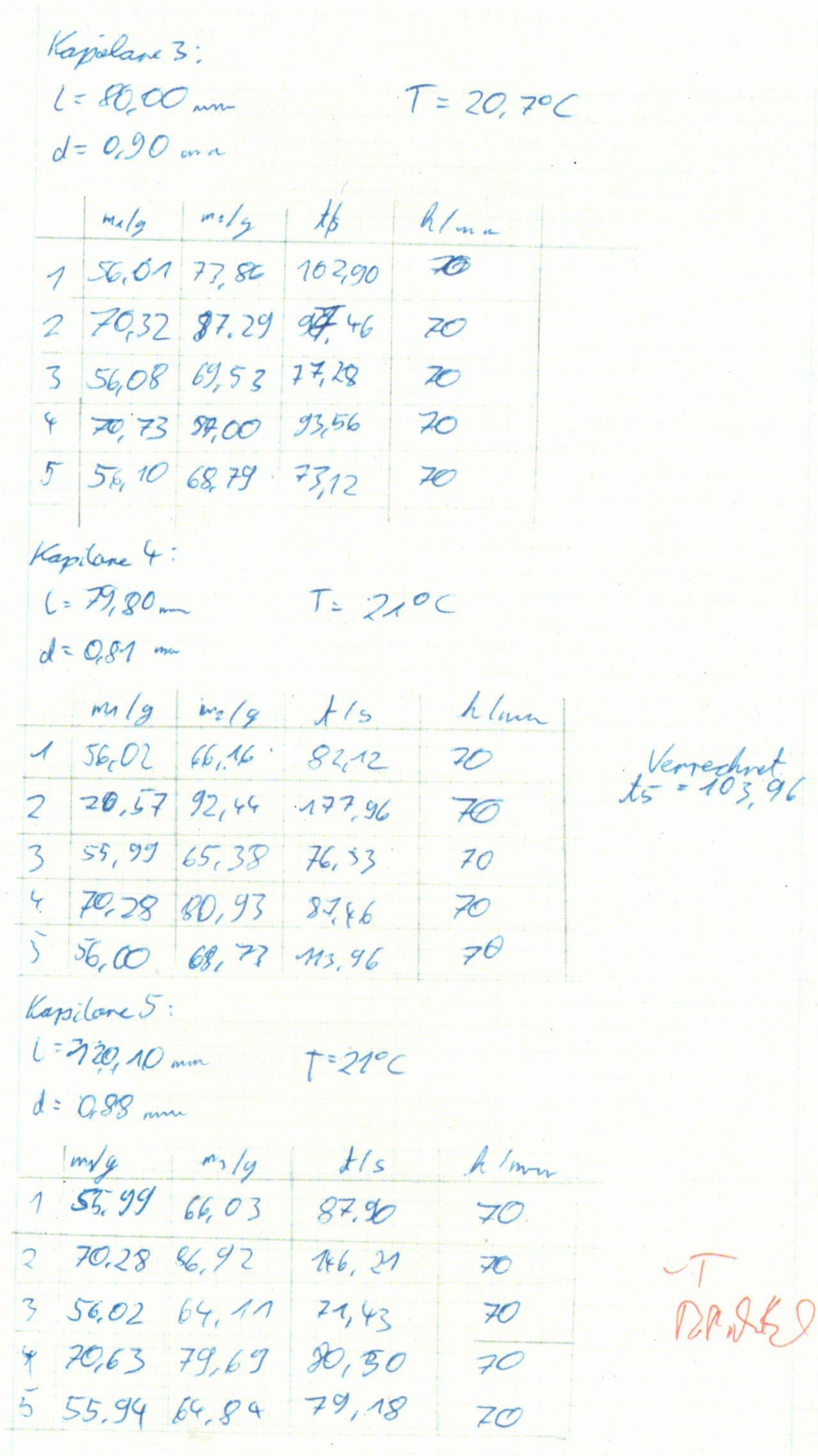
d = 0,99 mm

T = 20,7°C

	m_1/g	m_2/g	t/s	h/mm
1	70,28	93,15	80,84	73
2	55,97	73,66	62,71	73
3	70,56	93,01	89,34	73
4	56,15	72,82	59,19	73
5	70,44	95,93	90,12	73

t_3 Verrechet ≙ 79,34

Abbildung 4: 1. Seite aus Laborheft



Kapilare 3:

l = 80,00 mm   T = 20,7°C

d = 0,90 mm

	m_1/g	m_2/g	t/s	h/mm
1	56,01	77,86	102,90	70
2	70,32	87.29	97,46	70
3	56,08	69,53	77,28	70
4	70,73	87,00	93,56	70
5	56,10	68,79	73,12	70

Kapilare 4:

l = 79,80 mm   T = 21°C

d = 0,81 mm

	m_1/g	m_2/g	t/s	h/mm
1	56,02	66,16	82,12	70
2	70,57	92,44	177,96	70
3	55,99	65,38	76,33	70
4	70,28	80,93	87,46	70
5	56,00	68,77	113,96	70

Verrechnet
t_5 = 103,96

Kapilare 5:

l = 120,10 mm   T = 21°C

d = 0,88 mm

	m_1/g	m_2/g	t/s	h/mm
1	55,99	66,03	87,90	70
2	70,28	86,92	146,21	70
3	56,02	64,11	71,43	70
4	70,63	79,69	80,30	70
5	55,94	64,84	79,18	70

T

Abbildung 5: 2. Seite aus Laborheft