25.09.07

Viskosität aus dem Durchströmen einer Kapilare
(Versuch 8)

Aufgabenstellung

1.) Überprüfen Sie das Gesetz von Hagen-Poiseuille durch Messung der Volumenstromstärke durch verschiedene Kapillaren als Funktion von deren Abmessungen

2.) Bestimmen Sie aus dem gemessenen Zusammenhang die Viskosität von Wasser unter Verwendung des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes

Physikalischer Hintergrund

Wir wollen zunächst das Gesetz von Hagen-Poiseuille herleiten. Dazu betrachten wir eine laminare Strömung in einem geraden zylindrischen Rohr mit Durchmesser $2R$ und Länge l.

Die Viskosität ist definiert durch: $F = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dx}$
(F = Kraft um zwei „Flüssigkeitsschichten" mit Kontaktfläche A und der Dicke dx und der Geschwindigkeitsdifferenz dv gegeneinander zu bewegen)

Angewandt auf einen „Flüssigkeitszylinder" mit Radius r, der durch das Rohr bewegt werden soll, erhalten wir:

$$F = \eta \cdot 2\pi \cdot r \cdot l \, \frac{dv}{dr}$$

Wirkt über dem Rohr eine Druckdifferenz Δp, so gilt

$$\Delta p \cdot \pi \cdot r^2 = \eta \cdot 2\pi r \, l \cdot \frac{dv}{dr}$$

$$\Rightarrow \quad dv = \frac{\Delta p}{2\eta l} \cdot r \, dr$$

$$\Rightarrow \quad v(r) = \int_r^R \frac{\Delta p}{2\eta l} r' \, dr' = \frac{\Delta p}{4\eta l} \left(R^2 - r^2\right)$$

Der Volumenstrom durch einen Kreisringquerschnitt mit Radius r und der Dicke dr ist damit:

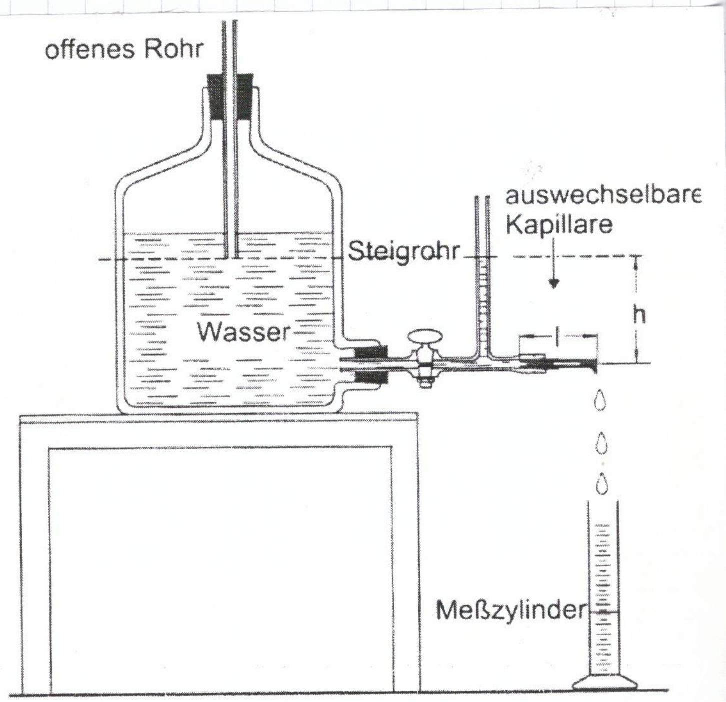
$$dI_V = \frac{dV}{t} = \frac{2\pi r \, dr \, v(r) \, t}{t} = \frac{\pi \cdot \Delta p}{2\eta l} \left(R^2 r - r^3\right) dr$$

Daraus folgt der Volumenstrom:

$$I_V = \int dI_V = \int_0^R \frac{\pi \cdot \Delta p}{2\eta l}(R^2 r - r^3)\,dr = \frac{\pi \Delta p}{2\eta l}\left(\frac{1}{2}R^4 - \frac{1}{4}R^4\right)$$

$$\Rightarrow I_V = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} R^4 \quad \text{(Gesetz von Hagen-Poiseuille)}$$

Versuchsaufbau und Durchführung



Das Steigrohr ermöglicht es, die Druckdifferenz Δp zu bestimmen. Das offene Rohr sorgt für einen konstanten Austrittsdruck.

Es wird durch den Einsatz verschiedener Kapillaren $\frac{R^4}{l}$ variiert und der Volumenstrom $\frac{V}{t}$ gemessen, um das Gesetz von Hagen-Poiseuille zu überprüfen. Anschließend soll aus diesen Daten die Viskosität von Wasser bestimmt werden.

Messdaten und Einstellparameter

Kapillare	Messung	d/mm	l/mm	M/g	t/s	(d^4/l)/ mm³	h_s'/mm	m_z/g
		0,85	80,8	364,52	380,17		90,5	286,9
		0,81	119,8	286,90	402,79	~~0,008201~~	90,5	239,48
		0,88	120,1	296,59	372,59		90,5	239,38
					~~402,79~~			
		0,90	80,0	323,99	379,36		90,5	239,59
		0,71	81,7	~~426,75~~ 168,76	426,75		89,0	129,08
		0,82	121,47	175,94	432,61		89,0	129,33

Fehler: ~~die~~ Waage: $s_W = 0,01$ g   Fehler beim Wiegen (2 Tropfen) $s_K = 0,03$ g

Zeitmessung: $s_t = 0,2$ s

Durchmesser der Kapillare: $s_d = 0,01$ mm
Länge der Kapillare:
$s_l = 0,01$ mm

Themperatur des Wassers: Anfang: $T_a = (20,0 \pm 0,2)$ °C   Ende: $T_E = (20,0 \pm 0,2)$

Messbehälter $m_z =$ ~~(55,23 ±) g~~ $(239,38 \pm 0,01)$ g

$h_s = h_s' + 30$ mm

$h_s' = 1$ mm

Was habt Ihr wie gemessen?

VT Sonntag
25.9.07

Auswertung

Es gilt: $$\Delta p = \frac{A_{Steigrohr} \cdot \rho_{Wasser} \cdot g \cdot h_s}{A_{Steigrohr}} = \rho_{Wasser} \cdot g \cdot h_s$$

Querschnittsfläche

$$s_{\Delta p} = \Delta p \sqrt{\left(\frac{s_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{s_{\rho_{Wasser}}}{\rho_{Wasser}}\right)^2 + \left(\frac{s_{h_s}}{h_s}\right)^2} \approx \Delta p \cdot \frac{s_{h_s}}{h_s}$$

Rest vernachlässigbar

Wir verwenden (~~Wikipedia~~ Tipler): $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$; $\rho_{Wasser} = 0{,}998 \frac{g}{cm^3}$ (bei 20°C)
$= 998 \frac{kg}{m^3}$

Wir tragen im Folgenden $\frac{V}{t} =: y$ gegen $\frac{\Delta p\, d^4}{\ell} =: x$ auf.

Für den Fehler gilt $s_x = x \sqrt{\left(\frac{s_{\Delta p}}{\Delta p}\right)^2 + \left(\frac{s_\ell}{\ell}\right)^2 + \left(4\frac{s_d}{d}\right)^2}$

Für das Volumen verwenden wir folgende Formel

$$V = \frac{m - m_z}{\rho_{Wasser}} \qquad s_V = \frac{1}{\rho_{Wasser}} \sqrt{s_m^2 + s_{m_z}^2} = \frac{1}{\rho_{Wasser}} \sqrt{s_k^2 + s_w^2}$$

Fehler in ρ vernachlässigbar (*)

(*): Wir könnten zum Massenstrom übergehen und so η ohne Kenntnis von ρ bestimmen, da sich ρ letztlich rauskürzt.

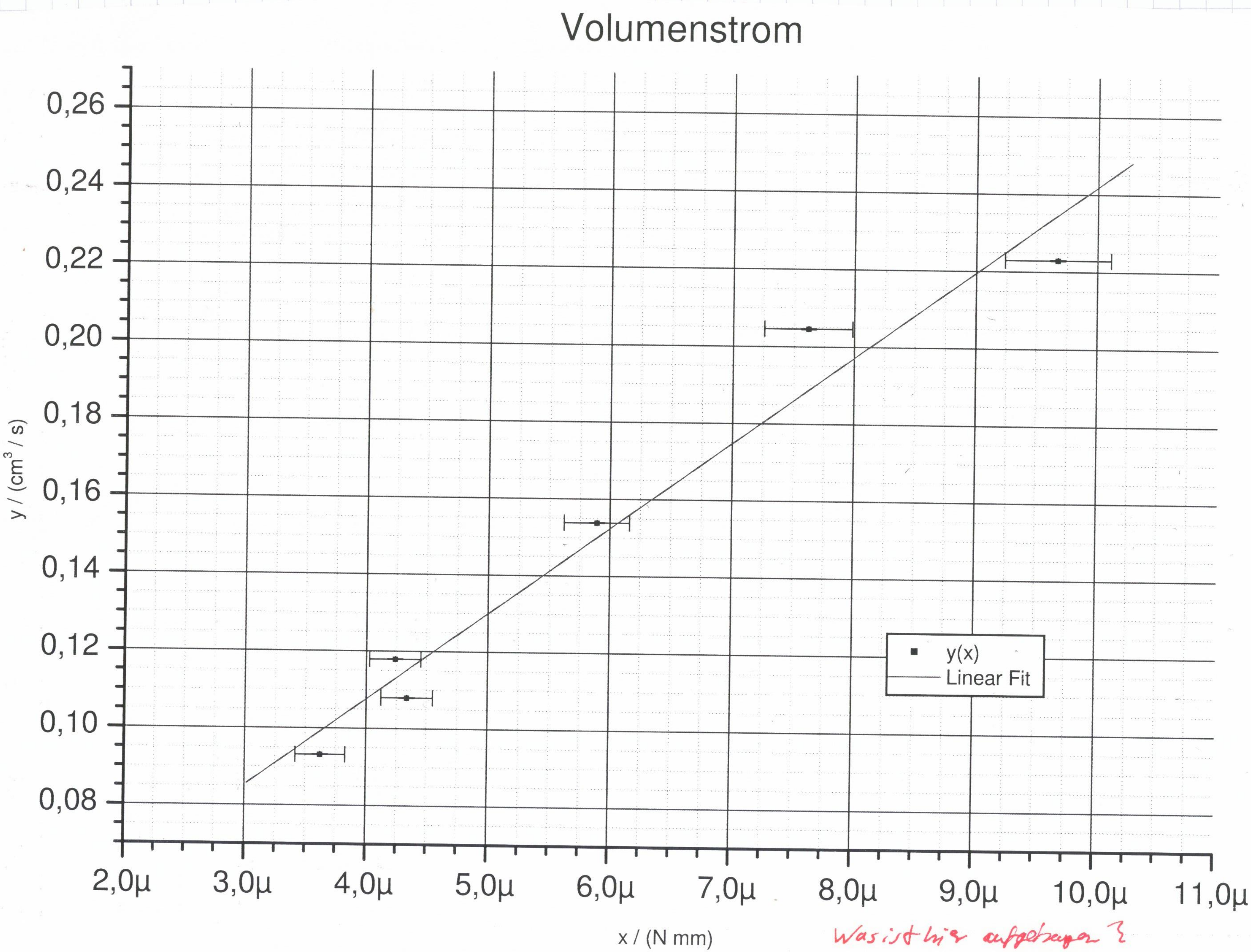
Außerdem gilt: $y = \frac{V}{t}$; $s_y = y \sqrt{\left(\frac{s_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{s_t}{t}\right)^2}$

Damit berechnen wir:

	d/mm	ℓ/mm	m/g	t(X1)/s	mz/g
1	0,88	120,1	296,59	372,59	239,38
2	0,81	119,8	286,9	402,79	239,48
3	0,85	80,8	364,52	380,17	286,9
4	0,9	80	323,99	379,36	239,59
5	0,71	81,7	168,76	426,75	129,08
6	0,82	121,47	175,94	432,61	129,33

hsstrich/mm	hs/mm	p/Pa	sp/Pa
90,5	120,5	1179,74079	9,79038
90,5	120,5	1179,74079	9,79038
90,5	120,5	1179,74079	9,79038
90,5	120,5	1179,74079	9,79038
89	119	1165,05522	9,79038
89	119	1165,05522	9,79038

x(X2)/Nmm	sx(xErr)/Nmm	V/cm³	sV/cm³	y(Y2)/ cm³/s	sy(yErr)/ cm³/s
5,8908E-6	2,7219E-7	57,32465	0,03169	0,15385	1,18545E-4
4,23906E-6	2,12272E-7	47,51503	0,03169	0,11796	9,80782E-5
7,62168E-6	3,64203E-7	77,77555	0,03169	0,20458	1,36125E-4
9,67535E-6	4,37449E-7	84,56914	0,03169	0,22293	1,44184E-4
3,62375E-6	2,06414E-7	39,75952	0,03169	0,09317	8,61371E-5
4,33644E-6	2,1465E-7	46,70341	0,03169	0,10796	8,86323E-5



Was ist hier aufgetragen?

Der vorangehende Plot beinhaltet Fehlerbalken für x und y. Offensichtlich haben wir unsere Fehler bei der Bestimmung von $\frac{V}{t}$ stark unterschätzt.

Da die Streuung der Werte um die Ausgleichsgerade eher gegen systematische Fehler spricht, werden wir diese im Folgenden zur Berechnung der Unsicherheit der Steigung verwenden.

Insbesondere erscheint es uns legitim, von einem linearen Zusammenh zu sprechen.

Durch lineare Regression (Origin) erhalten wir für die Steigung*:

$$a = (22374 \pm 2167) \frac{cm^3/s}{Nmm} \approx (22 \pm 2) \frac{m^2}{Ns}$$

Denkzettel

HIER könnte IHRE Note stehen!

Das Gesetz von Hagen-Poiseuille lautet hier:

$$y = \frac{V}{t} = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta p \left(\frac{d}{2}\right)^4}{l} = \underbrace{\frac{\pi}{144\eta}}_{=a} x$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\pi}{144a} \approx 991 \cdot 10^{-6} \underbrace{Ns/m^2}_{Pa \cdot s}$$

$$s_\eta = \eta \cdot \frac{s_a}{a} \approx 90 \cdot 10^{-6} \ Pa \cdot s$$

Schlussfolgerung / Zusammenhang

Wir konnten den vom Hagen-Poiseuill'schen Gesetz vorhergesagten linearen Zusammenhang zwischen I_V und $\frac{\Delta p \cdot d^4}{l}$ bestätigen. (Insbesondere erlauben es die x-Fehlerbalken die Punkte entsprechend „zurecht zurücken".)

Hinweise auf systematische Fehler können wir aufgrund der Streuung der Messwerte um die Ausgleichsgerade nicht feststellen.

Unter der Annahme, dass das Hagen Poiseuil'sche Gesetz stimmt berechnen wir die Viskosität von Wasser.

$$\eta = (990 \pm 90) \mu Pa \cdot s$$

Dies stimmt gut mit im Internet kursierenden Werten (z.B 1002 bei 20°C von www.wissenschaft-technik-ethik.de) überein.

*: Für den Achsenabschnitt (y) erhalten wir: $(0{,}018 \pm 0{,}019) \frac{cm^3}{s}$
Dieser Wert kann guten Gewissens, v.a. in Anbetracht des Größenordnungsunterschieds zu den Messwerten als 0 betrachtet werden.

T Sontag
28.9.07