

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
PHYSIKLABOR FÜR ANFÄNGER*INNEN, TEIL 1
SOMMERSEMESTER 2021

VERSUCH 6 AM 09.09.2021

Elastizitätsmodul

11.09.2021
Überarbeitet am 20.09.2021

Assistenten:

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuchs	2
2 Aufbau und Durchführung	2
3 Auswertung und Fehleranalyse	4
3.1 Zusammenhang zwischen Masse und Biegepeil	4
3.2 Berechnung verschiedener Elastizitätsmoduln	7
3.3 Zusammenhang zwischen Abstand der Auflagepunkte und Biegepeil	8
3.4 Untersuchung verschiedener Querschnittsprofile	9
4 Diskussion der Ergebnisse	12
4.1 Vergleich mit Literaturwert	12
4.2 Zusammenstellung der Endergebnisse	12
4.3 Fehlerdiskussion	13
4.4 Verbesserte Messmethoden	14
5 Literatur	15
6 Anhang	16
6.1 Tabellen und Grafiken	16
6.2 Laborbuch	26
6.3 Python-Code	31
6.4 Tabellenverzeichnis	42
6.5 Abbildungsverzeichnis	42

1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch sollen in erster Linie die Elastizitätsmoduln von vier verschiedenen Materialien, Stahl, Messing, Aluminium und Bambus, bestimmt und mit Literaturwerten verglichen werden. Außerdem soll in drei Versuchsreihen untersucht werden, wie sich der Biegefeil in Abhängigkeit von angehängter Masse, Material, Abstand der Auflagepunkte und Querschnittsprofil der Materialien verhält.

2 Aufbau und Durchführung

Um die aufgelisteten Ziele zu überprüfen, wird in drei Schritten wie folgt vorgegangen: Zunächst soll bestätigt werden, dass der Biegefeil s proportional zur wirkenden Kraft $F = mg$ ist, was durch das Hookesche Gesetz beschrieben wird. Diese Kraft wird durch eine, in der Mitte der verwendeten Stäbe angehängte, Masse m bewirkt. Hierbei sollen auch die Elastizitätsmoduln E der Materialien ermittelt werden.

In einem zweiten Schritt wird der Zusammenhang zwischen der Länge des Stabes d , der über die Positionen der Auflagepunkte x_1, x_3 bestimmt wird, und dem Biegefeil ermittelt.

Zuletzt untersuchen wir die Proportionalität der Biegesteifigkeit EI_y , wobei I_y das Flächenträgheitsmoment ist, und dem Biegefeil. Dabei soll zusätzlich das optimale Verhältnis von Querschnittsfläche A und Biegesteifigkeit ermittelt werden.

Der Versuchsaufbau ist hier in [Abbildung 1](#) skizziert. Die genaue Positionierung der Messuhr ist dort ebenfalls dargestellt.

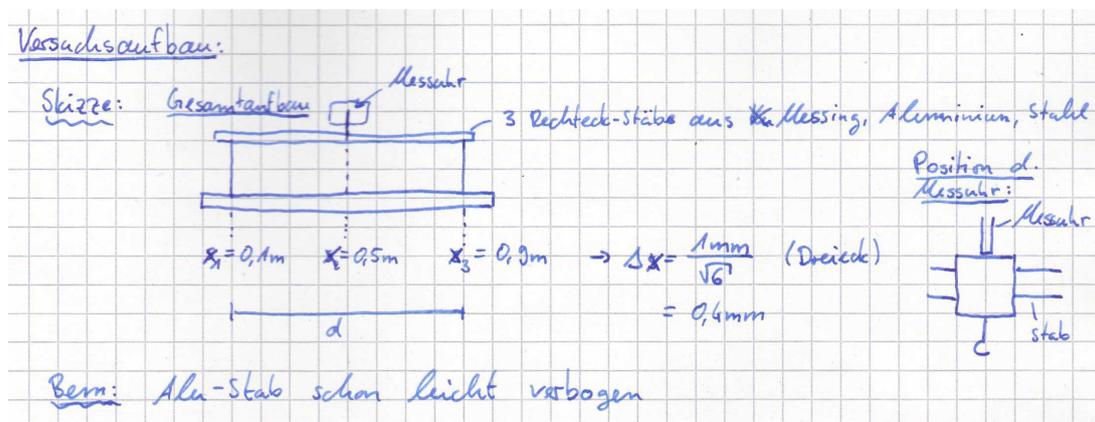


Abb. 1: Skizze aus dem Laborbuch ([Abbildung 15](#))

Anzumerken ist, dass der in der ersten Versuchsreihe verwendete Aluminiumstab bereits eine deutlich sichtbare Biegung aufweist. Der Aluminiumstab wird deshalb so positioniert, dass die Biegung nach unten durchhängt. Es stehen zwei verschiedene Auflagehalterungen zur Verfügung. Eine mit geradem Profil, die bei rechteckigen Stäben verwendet wird, und eine mit dreieckigem Profil, die bei allen runden Stäben zum Einsatz kommt. Die rechteckigen Stäbe liegen alle auf der breiten Seite auf.

Bei der Messung schätzen wir folgende Messunsicherheiten der Auflagepunkte x , der Länge d und des Biegefeils s :

$$\Delta x = \frac{10\text{ mm}}{\sqrt{6}} = 0,4\text{ mm} \quad (1)$$

$$\Delta d = \sqrt{2} \cdot \Delta x = 0,6\text{ mm} \quad (2)$$

$$\Delta s = \frac{10\text{ }\mu\text{m}}{\sqrt{3}} = 6\text{ }\mu\text{m} \quad (3)$$

Wir gehen davon aus, dass Δx dreiecks- und Δs rechtecksverteilt sind. Δd ergibt sich durch Fehlerfortpflanzung von Δx . Die Dreiecksverteilung ergibt sich durch das Ablesen einer Längenskala, während die Rechtecksverteilung beim Ablesen der digitalen Messskala der Messuhr angenommen wird. Bei der Masse sind keine Unsicherheiten bekannt.

3 Auswertung und Fehleranalyse

In drei Versuchen soll der aus theoretischen Überlegungen hergeleitete Zusammenhang zwischen Länge, Material, Form, Kraft und Durchbiegung bei der Dreipunktbiegung bestätigt werden [1]:

$$s = \frac{1}{48} \frac{Fd^3}{EI_y} = \frac{1}{48} \frac{mgd^3}{EI_y}. \quad (4)$$

Hierbei sind s der Biegepfail, $F = mg$ die Gravitationskraft, d die Länge des Stabes, E das Elastizitätsmodul und I_y das Flächenträgheitsmoment.

3.1 Zusammenhang zwischen Masse und Biegepfail

Zunächst soll der Zusammenhang zwischen Masse und Biegepfail untersucht werden. Es werden vier Versuchsreihen durchgeführt, bei denen für jede Materialart Gewichte zuerst angehängt und dann wieder abgenommen werden. Es ergeben sich die in [Abbildung 2](#) aufgetragenen Messwerte, bei denen die Fehlerbalken eingezeichnet sind. Diese sind allerdings aufgrund der Größenverhältnisse schwer erkennbar. Die Messwerte finden sich in [Tabelle 9](#) im Anhang:

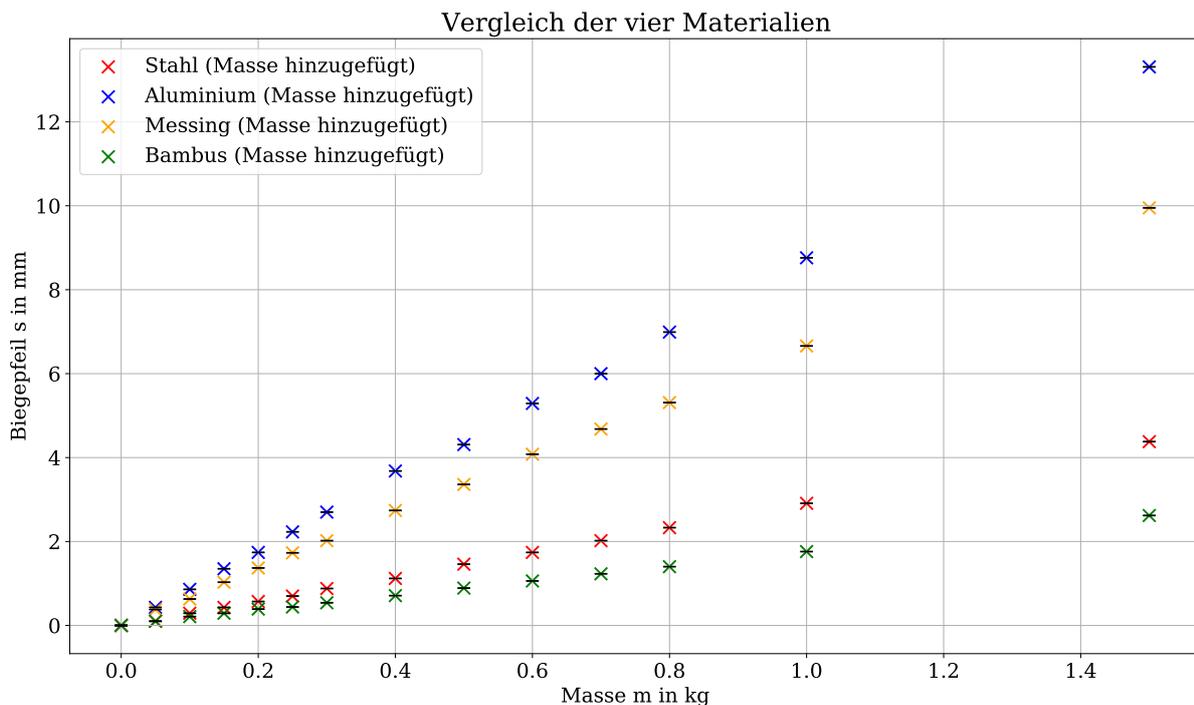


Abb. 2: Aufgetragen sind die Biegepfailen s gegen die Massen m , für die vier Materialien Stahl, Aluminium, Messing und Bambus. Dargestellt werden nur die Daten bei denen Masse hinzugefügt wurde.

Dieses Diagramm legt bereits einen linearen Zusammenhang zwischen Masse und Biegepfail nahe, den wir im folgenden durch lineare Regression bestätigen wollen. Aus [Gleichung 4](#) ergibt sich der folgende lineare Zusammenhang mit den optimalen Werten von a und b :

$$s = a + bm \quad \text{mit } a = 0 \text{ und } b = \frac{1}{48} \frac{gd^3}{EI_y}. \quad (5)$$

Da die Kalibrierung mit der Messuhr durchgeführt wird, hat auch der Startwert 0,00 mm eine Messunsicherheit von 6 μm . Da der y-Achsenabschnitt a diesem kalibrierten Startwert entsprechen sollte, wird bei a auch von einer Messunsicherheit von 6 μm ausgegangen.

Es wird exemplarisch die erste Messreihe betrachtet, bei der die Stahlstange verwendet wird: Aus der linearen Regression in [Abbildung 3](#) ergeben sich dann folgende Werte für a und b :

$$a = (-1,8 \pm 0,7) \cdot 10^{-5} \text{ m}, \quad (6)$$

$$b = (29,29 \pm 0,11) \cdot 10^{-4} \text{ m kg}^{-1}. \quad (7)$$

Die Standardunsicherheiten für a und b berechnen sich mit Hilfe der Formeln aus [\[2\]](#).

Aus dem Wert b wird das Elastizitätsmodul von Stahl berechnet.

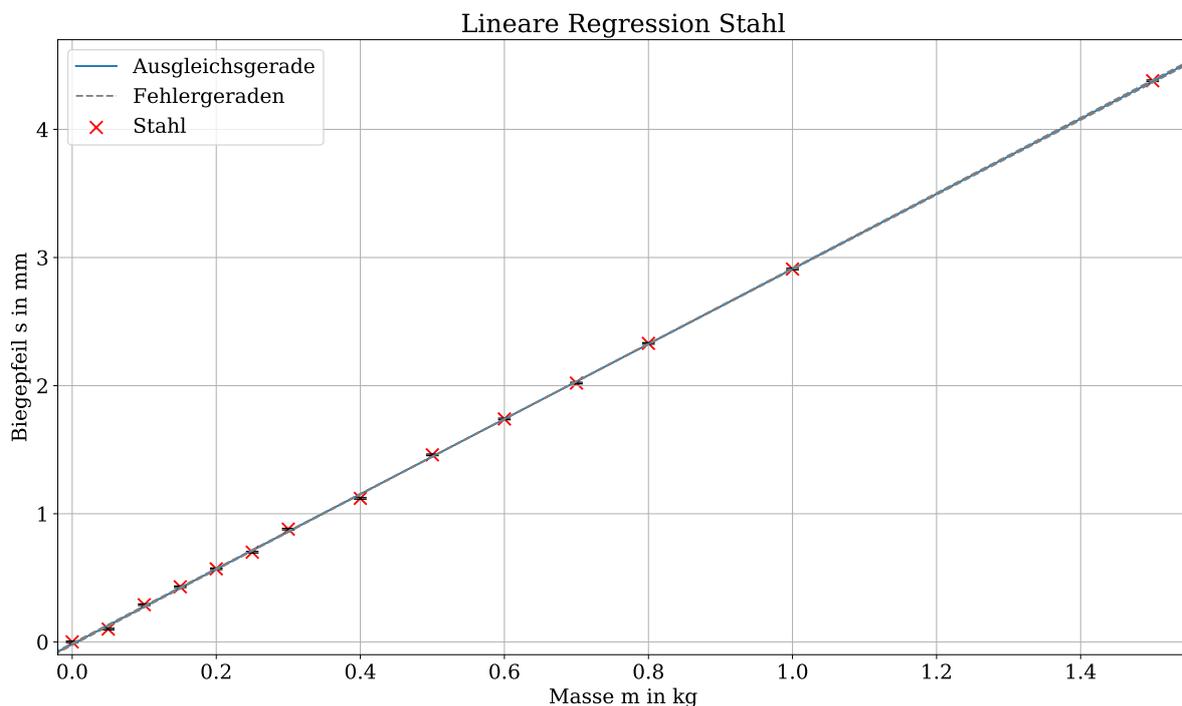


Abb. 3: Aufgetragen sind der Biegepeil s gegen die zusätzlich angehängte Masse m bei Stahl und die lineare Regression mit Fehler- und Ausgleichsgeraden.

Die Abbildungen zur linearen Regression der anderen Stäbe finden sich im Anhang in [Abbildung 8](#) bis [Abbildung 10](#). Die Werte für a und b sind in [Tabelle 1](#) zusammengestellt:

Material	a -Wert in 10^{-5} m	b -Wert in $10^{-4} \text{ m kg}^{-1}$
Stahl	$-1,8 \pm 0,7$	$29,29 \pm 0,11$
Messing	$3,9 \pm 1,5$	$66,2 \pm 0,2$
Aluminium	$-0,3 \pm 3,4$	$88,1 \pm 0,5$
Bambus	$2,0 \pm 0,5$	$17,33 \pm 0,08$

Tab. 1: Vergleich der a - und b -Werte der linearen Regression bei allen vier Materialien.

In [Abbildung 4](#) sind die Residuen der linearen Regression eingetragen, die Residuen zu den anderen Messreihen finden sich in [Abbildung 11](#) bis [Abbildung 13](#). Zusätzlich sind die Fehlergeraden und unsere geschätzte Unsicherheit aus [Gleichung 3](#) im Diagramm dargestellt. Man sieht, dass

unsere geschätzte Unsicherheit etwas zu gering ist, da nicht 68% der Residuen in diesem Bereich liegen.

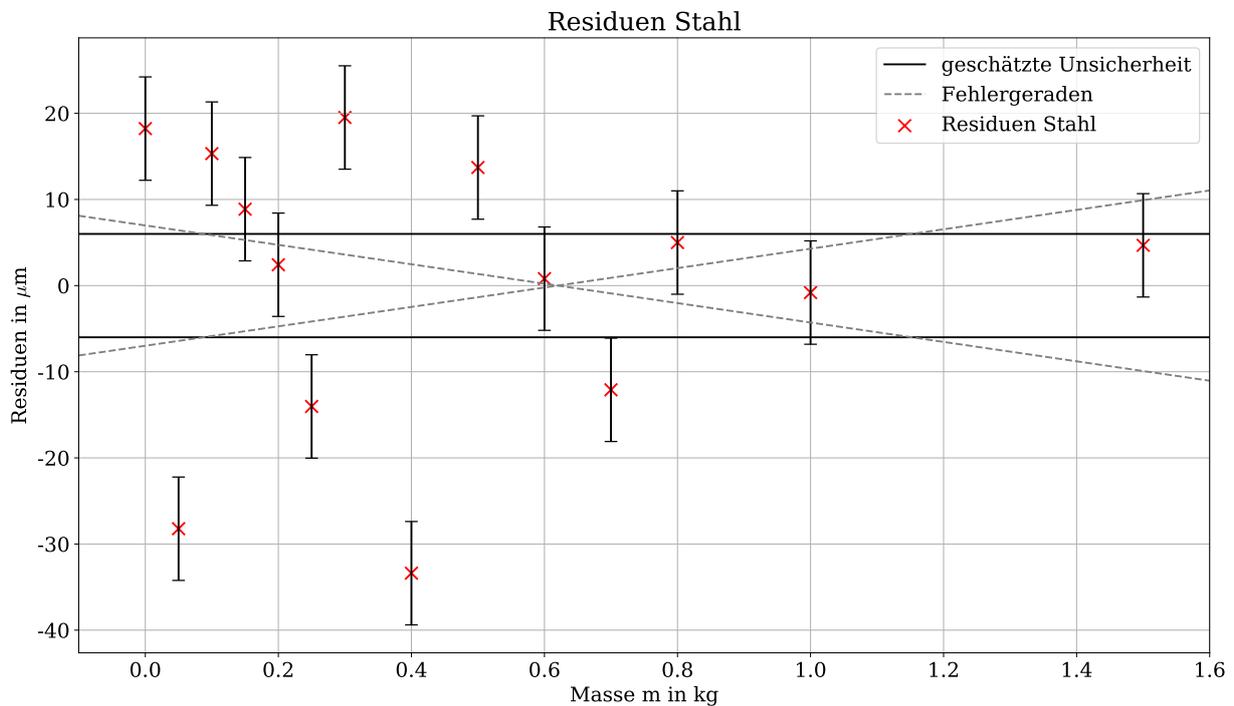


Abb. 4: Aufgetragen sind die Residuen der linearen Regression bei Stahl mit Fehlerbalken, Fehlergeraden und der geschätzten Unsicherheit.

Jetzt bleibt noch zu betrachten, ob die Biegung elastisch oder plastisch ist. Bereits die Messwerte in [Tabelle 9](#) bis [Tabelle 12](#) lassen erkennen, dass sich die Biegepeile von zu- und abnehmender Masse wenig unterscheiden und die Biegepeile bei 0 kg auf nahezu 0 m zurück gehen. In [Abbildung 5](#) sieht man außerdem die Unterschiede im Biegepeil bei zu- bzw. abnehmendem Gewicht aufgetragen. Dabei ist erkennbar, dass zwar Unterschiede bestehen, diese aber statistisch gestreut sind und somit auf statistische Fehler und nicht auf ein Verlassen des elastischen Bereichs hindeuten.

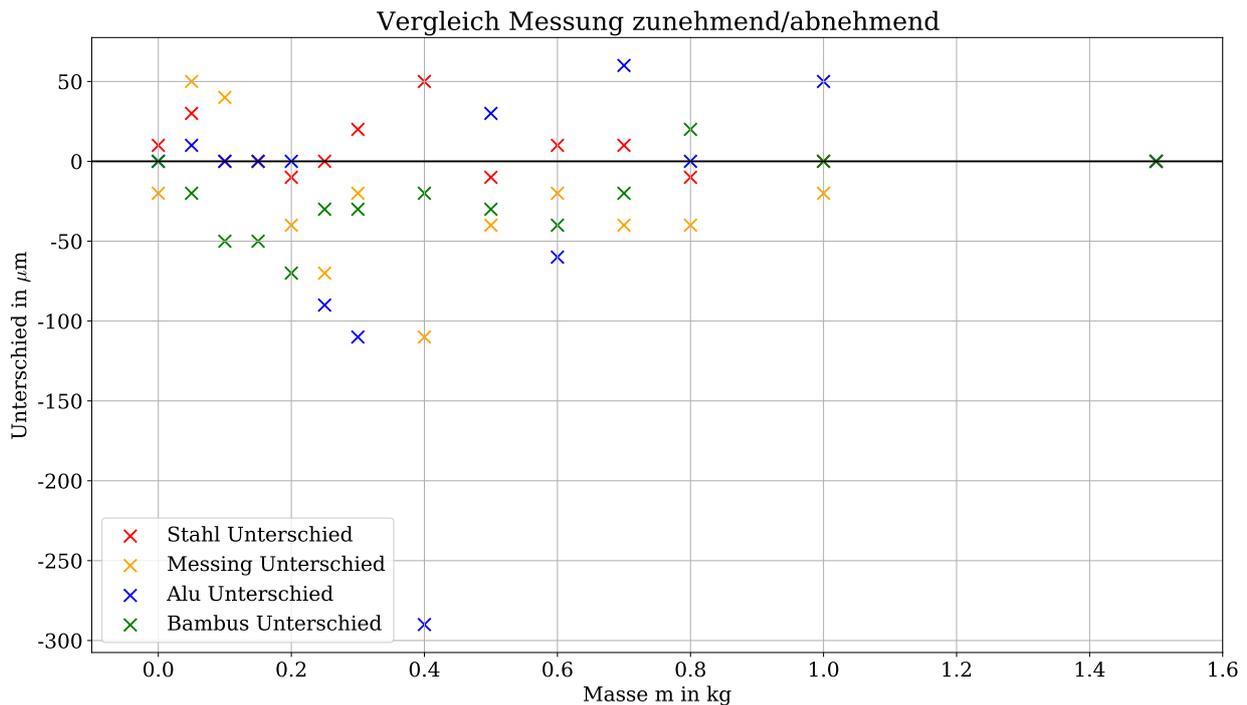


Abb. 5: Absolute Unterschiede zwischen den zunehmenden und abnehmenden Werten, aufgetragen sind die Unterschiede aller vier Materialien.

Mit diesen Messungen kann also die Geltung des Hookeschen Gesetzes bestätigt werden und die Biegungen waren somit im linearen, elastischen Bereich.

3.2 Berechnung verschiedener Elastizitätsmoduln

Die Elastizitätsmoduln berechnen wir aus der linearen Regression. Dazu benötigen wir die Formel für b aus Gleichung 5 und die Formeln für I_y aus [1]:

$$b = \frac{1}{48} \frac{gd^3}{EI_y} \quad (8)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{48} \frac{gd^3}{bI_y} \quad (9)$$

$$E_{\text{Metall}} = \frac{1}{4} \frac{gd^3}{bxy^3} \quad \text{Metalle, mit Fläche } A = x \cdot y \quad (10)$$

$$E_{\text{Bambus}} = \frac{1}{12} \frac{gd^3}{b\pi(R^4 - r^4)} \quad \text{Bambus, mit Fläche } A = \pi(R^2 - r^2). \quad (11)$$

Die Kantenlängen x und y , den Außenradius R und den Innenradius r der Stäbe haben wir mit einem Messschieber bestimmt und dabei folgende Werte gemessen, wobei die Unsicherheiten mit Dreiecksverteilung abgeschätzt werden:

Größe	Wert in cm
Knatenlänge x	$1,000 \pm 0,004$
Kantenlänge y	$0,600 \pm 0,004$
Außenradius R	$0,800 \pm 0,004$
Innenradius r	$0,200 \pm 0,004$

Tab. 2: Geometrische Eigenschaften der verwendeten Stäbe.

Mit diesen Werten lassen sich nun die Bestwerte für E bestimmen. Dabei werden die Werte für b und d von oben verwendet, die verwendete Erdbeschleunigung ist $g = 9,808 \text{ m s}^{-2}$ [6]. Um die Unsicherheit zu bestimmen, nutzen wir die Formel aus [2] zur Fehlerfortpflanzung, da wir fehlerbehaftete Größen b, d, x, y, R und r haben:

$$\Delta E_{\text{Metall}} = \sqrt{\left(\frac{3}{4} \frac{gd^2}{bxy^3} \Delta d\right)^2 + \left(-\frac{1}{4} \frac{gd^3}{b^2xy^3} \Delta b\right)^2 + \left(-\frac{1}{4} \frac{gd^3}{bx^2y^3} \Delta x\right)^2 + \left(-\frac{3}{4} \frac{gd^3}{bxy^4} \Delta y\right)^2} \quad (12)$$

Insgesamt ergeben sich folgende vier Elastizitätsmoduln, die in [Tabelle 3](#) zusammengestellt sind:

	Elastizitätsmoduln in GPa
E_{Stahl}	198 ± 4
E_{Messing}	$87,7 \pm 1,8$
$E_{\text{Aluminium}}$	$66,0 \pm 1,4$
E_{Bambus}	$18,8 \pm 0,4$

Tab. 3: Zusammenstellung der berechneten Elastizitätsmoduln und deren Unsicherheiten.

3.3 Zusammenhang zwischen Abstand der Auflagepunkte und Biegefeil

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, ob der Zusammenhang zwischen der Länge des Stabes d und dem Biegefeil in unserer Messreihe in [Tabelle 13](#) mit den Erwartungen aus [Gleichung 4](#) übereinstimmen.

$$s \sim d^3 \quad (13)$$

Um diesen Zusammenhang zu überprüfen, führen wir zwei Messreihen mit den Massen $m_1 = 0,5 \text{ kg}$ und $m_2 = 1,0 \text{ kg}$ durch. Verwendet wird der Messingstab aus Messung 1, wobei d variiert wird. Zur Auswertung bietet sich die Verwendung von doppelt logarithmischen Skalen an. Dabei ergibt sich folgende Gleichung:

$$s = cd^3 \quad \text{mit } c = \frac{1}{48} \frac{mg}{EI_y}, \quad (14)$$

$$\log s = \log c + 3 \cdot \log d. \quad (15)$$

Es sollte sich also ein linearer Zusammenhang mit Steigung 3 ergeben, wenn man $\log s$ nach $\log d$ aufträgt. Dieser kann in [Abbildung 6](#) beobachtet werden.

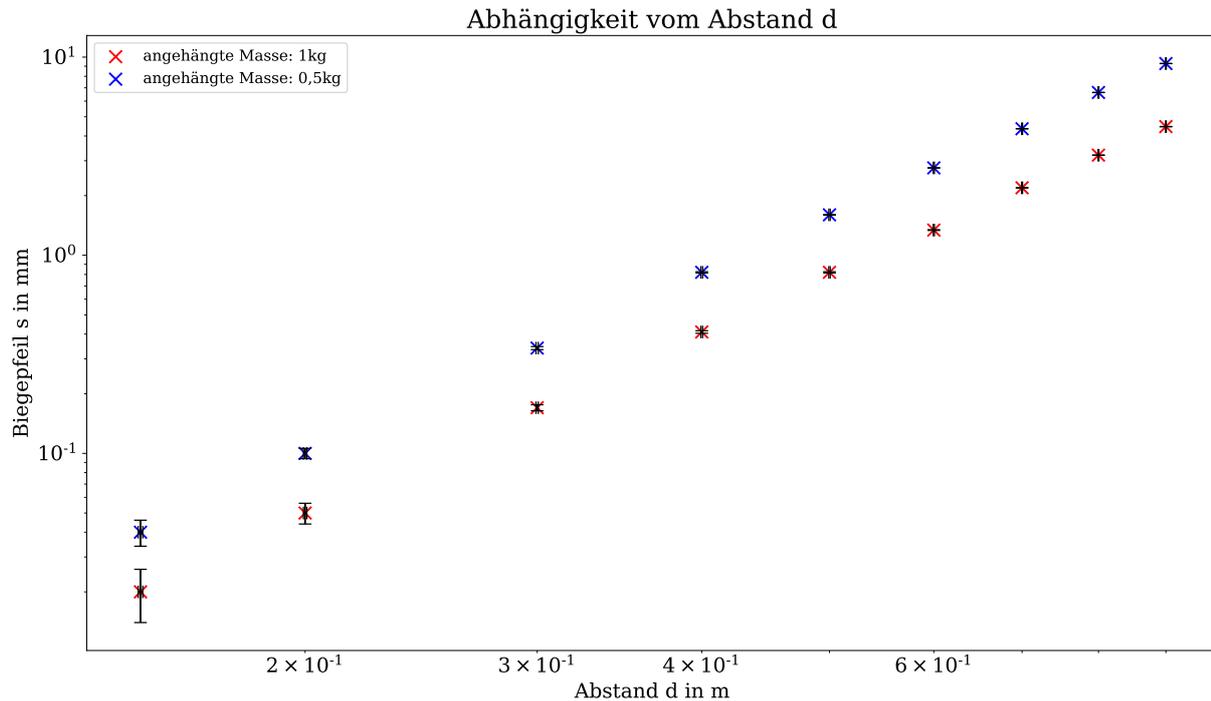


Abb. 6: Dargestellt ist der Biegepfel in Abhängigkeit der Stablänge bei an den Messingstab angehängten Massen 0,5 kg und 1 kg.

Um die Erwartung einer Steigung von 3 zu bestätigen, wird eine lineare Regression mit den logarithmierten Werte erstellt, die in [Abbildung 14](#) im Anhang zu finden ist. Es ergeben sich folgende Werte für die Steigung b :

$$b_{0,5\text{ kg}} = 3,016 \pm 0,016 \quad (16)$$

$$b_{1,0\text{ kg}} = 3,033 \pm 0,009 \quad (17)$$

Mit t -Werten:

$$t_{0,5\text{ kg}} = 1,0 \quad (18)$$

$$t_{1,0\text{ kg}} = 3,6 \quad (19)$$

Damit ist der erste Wert sehr gut verträglich und der Zusammenhang $t \sim d^3$ kann bestätigt werden. Die Unverträglichkeit des zweiten Wertes kommt vermutlich von systematischen Fehlern, die in der Diskussion aufgegriffen werden.

3.4 Untersuchung verschiedener Querschnittsprofile

Zuletzt wollen wir die Auswirkungen der Querschnittsprofile auf die Biegepfelle untersuchen. Um vergleichbare Werte zu erhalten verwenden wir Aluminium-Röhren mit variablem Innen- und Außenradius. Wir belasten die Voll- und Hohlzylinder mit einer Masse von $m = 1\text{ kg}$ bei einem Abstand von $d = (80,00 \pm 0,06)\text{ cm}$.

Wir wollen aus den gemessenen Biegepfellen die Biegesteifigkeit EI_y berechnen. Hierzu wird folgende Formel [1] verwendet:

$$EI_y = \frac{1}{48} \cdot \frac{mgd^3}{s}. \quad (20)$$

Um die Werte gut vergleichen zu können, berechnen wir außerdem die Flächen A mithilfe der folgenden Formel:

$$A = \pi(R^2 - r^2) \quad (21)$$

Die Unsicherheiten werden erneut durch Fehlerfortpflanzung [2] berechnet:

$$\Delta(EI_y) = \frac{1}{48} mg \sqrt{\left(3 \frac{d^2}{s} \Delta d\right)^2 + \left(-\frac{d^3}{s^2} \Delta s\right)^2} \quad (22)$$

$$\Delta A = 2\pi \sqrt{(R\Delta r)^2 + (r\Delta R)^2} \quad (23)$$

Die Messdaten befinden sich im Anhang in [Tabelle 14](#) und ergeben die Flächen und Biegesteifigkeiten aus [Tabelle 4](#):

Name vom Zylinder	Querschnittsfläche A in 10^{-5} m^2	Biegesteifigkeit EI_y in N m^2
großer Vollzylinder	$11,40 \pm 0,15$	$69,8 \pm 0,3$
Hohlzylinder mit kleinem Loch	$6,60 \pm 0,14$	$33,21 \pm 0,10$
Hohlzylinder mit mittlerem Loch	$4,11 \pm 0,15$	$25,90 \pm 0,07$
Hohlzylinder mit großem Loch	$2,99 \pm 0,16$	$21,22 \pm 0,05$
kleiner Vollzylinder	$7,62 \pm 0,12$	$31,14 \pm 0,09$
großer Hohlzylinder	$5,02 \pm 0,19$	$45,69 \pm 0,16$

Tab. 4: Es sind die Querschnittsflächen und die Biegesteifigkeit der verschieden geformten Alustäbe dargestellt.

Diese Werte sind auch im Diagramm in [Abbildung 7](#) dargestellt.

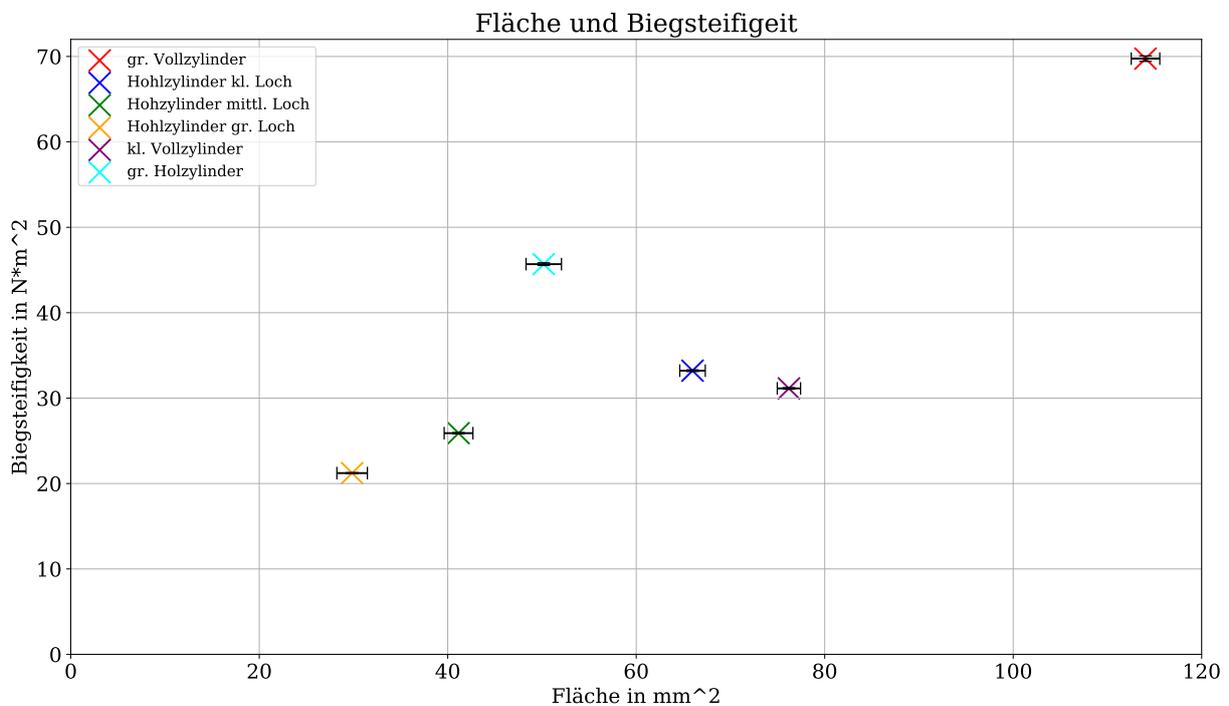


Abb. 7: Biegesteifigkeit aufgetragen gegen Fläche bei den Alustäben

Um zu bestätigen, dass die Messwerte mit der geometrischen Erwartung übereinstimmen, berechnen wir die Biegesteifigkeit zusätzlich aus dem in Versuchsreihe 1 bestimmten Elastizitätsmodul und den Innen- und Außenradien.

$$EI_y = E \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) \quad (24)$$

$$\Delta(EI_y) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)\Delta E\right)^2 + (\pi ER^3\Delta R)^2 + (-\pi Er^3\Delta r)^2} \quad (25)$$

Das liefert Ergebnisse, deren Fehler erneut durch Fehlerfortpflanzung bestimmt wird. Sie sind in [Tabelle 15](#) im Anhang dargestellt. Die Verträglichkeit der beiden Berechnungen liegt im Bereich von $t = 0.51$ bis $t = 2.09$. Bis auf einen Wert sind alle sehr gut verträglich.

Das Verhältnis von Biegesteifigkeit zu Fläche und damit indirekt auch zum Eigengewicht, findet sich im Diagramm in der Steigung einer, durch die Punkte zum Ursprung gedachten, Geraden wieder. Allein durch Betrachtung dieses Diagramms fällt auf, dass die beiden Hohlzylinder mit großem Loch ein großes Verhältnis haben, während insbesondere der kleine Vollzylinder ein sehr kleines Verhältnis hat. Zur besseren Vergleichbarkeit haben wir hier noch eine Tabelle mit den Verhältnissen, die genau diese Beobachtungen bestätigen:

Name vom Zylinder	EI_y/A in 10^5 N
großer Vollzylinder	$6,12 \pm 0,09$
Hohlzylinder mit kleinem Loch	$5,03 \pm 0,10$
Hohlzylinder mit mittlerem Loch	$6,3 \pm 0,2$
Hohlzylinder mit großem Loch	$7,1 \pm 0,4$
kleiner Vollzylinder	$4,09 \pm 0,07$
großer Hohlzylinder	$9,1 \pm 0,3$

Tab. 5: Verhältnis von Biegesteifigkeit und Fläche von verschiedenen Formen vom Alustab-

Damit kann es durchaus sinnvoll sein, Bauteile hohl zu gestalten, da diese Form zu einer vergleichsweise hohen Stabilität ($\sim EI_y$) bei kleinerer Masse ($\sim A$) führt.

4 Diskussion der Ergebnisse

4.1 Vergleich mit Literaturwert

Generell ist ein Vergleich mit den Literaturwerten schwierig, da viele äußere Faktoren, wie etwa die Temperatur, die Herstellung des Metalls oder welche Messing-Legierung vorliegt, eine große Rolle spielen. Bei Bambus ist es noch schwerer, da natürliche Faktoren wie beispielsweise das Wachstum, die Biegung und das Alter eine große Rolle spielen. Trotzdem haben wir einige Literaturwerte aus verschiedenen Quellen [4], [5] gefunden:

$$E_{\text{Stahl, Literatur}} = 180 \text{ GPa bis } 200 \text{ GPa} \quad (26)$$

$$E_{\text{Messing, Literatur}} = 102 \text{ GPa bis } 125 \text{ GPa} \quad (27)$$

$$E_{\text{Alu, Literatur}} = 69 \text{ GPa} \quad (28)$$

$$E_{\text{Bambus, Literatur}} = 20 \text{ GPa} \quad (29)$$

Der t -Wert von Aluminium im Vergleich zum Literaturwert liegt bei $t = 2,1$ und ist damit leicht unverträglich, wobei das verwendete Aluminium wie oben erläutert bereits gebogen war.

Vergleicht man den Wert von Bambus mit dem Literaturwert, erhält man einen t -Wert von $t = 3$. Dies liegt unter anderem daran, dass wir unsere Messunsicherheit zu klein gewählt haben und unser Modell vom Bambusrohr als Hohlzylinder nicht optimal ist. Weitaus wichtigere Fehlerquellen liegen allerdings in der organischen Natur des Bambus. Dabei spielen Faktoren wie die Feuchtigkeit oder die Wachstumsbedingungen eine wichtige Rolle.

Das Elastizitätsmodul von Stahl liegt im Bereich der Literaturwerte.

Das Elastizitätsmodul von Messing liegt außerhalb des angegebenen Literaturwerts, allerdings unterliegt der Wert von Messing starken Schwankungen, da es sich um eine Legierung handelt. In einer anderen Quelle [3] liegt allerdings unser errechneter Wert für Messing innerhalb des dort angegebenen Bereichs von $E_{\text{Messing, Literatur}} = 78 \text{ GPa bis } 123 \text{ GPa}$. Für eine bessere Vergleichbarkeit wäre es daher sinnvoll, die Legierung des Stabes zu kennen.

4.2 Zusammenstellung der Endergebnisse

Mit den durchgeführten Messungen wurden die gesetzten Ziele im Großen und Ganzen erreicht. Zwar sind einige Ergebnisse nicht mit den Erwartungen verträglich, aber die zu zeigenden Proportionalitäten sind erkennbar. Auf die Ursachen für die Unverträglichkeit gehen wir in der Fehlerdiskussion genauer ein.

Die erste Messreihe kann einen linearen Zusammenhang von Biegepeil s zu Masse m bestätigen. Außerdem zeigt der Vergleich von s bei zu- und abnehmender Masse, dass die Biegung elastisch ist. Insgesamt ist bei diesen Messungen also das Hookesche Gesetz gültig.

Die vier ermittelten Werte für die Elastizitätsmoduln der verschiedenen Materialien, deren Literaturwerte und Verträglichkeiten sind in [Tabelle 6](#) zusammengestellt:

Material	berechnete Elastizitätsmoduln in GPa	Literaturwerte in GPa	t-Werte
Stahl	198 ± 4	180 GPa bis 200 GPa	/
Aluminium	$66,0 \pm 1,4$	69 GPa	2,1
Messing	$87,7 \pm 1,8$	102 GPa bis 125 GPa	/
Bambus	$18,8 \pm 0,4$	20 GPa	3,0

Tab. 6: Zusammenstellung der berechneten Elastizitätsmoduln, deren Literaturwerte und Verträglichkeiten.

Die Proportionalität zwischen s und d^3 wird durch lineare Regression mit den folgenden Steigungen bestätigt:

$$b_{0,5\text{kg}} = 3,016 \pm 0,016 \quad (30)$$

$$b_{1,0\text{kg}} = 3,033 \pm 0,009 \quad (31)$$

Mit t -Werten:

$$t_{0,5\text{kg}} = 1,0 \quad (32)$$

$$t_{1,0\text{kg}} = 3,6 \quad (33)$$

Trotz der Unverträglichkeit des zweiten t -Wertes, ist der kubische Zusammenhang besser verträglich, als zum Beispiel ein quadratischer (b müsste 2 sein).

Abschließend untersuchen wir das günstigste Verhältnis zwischen Biegesteifigkeit und Querschnittsfläche. Die Ergebnisse sind hier absteigend zusammengestellt. Ein großer Wert bedeutet eine höhere Biegesteifigkeit bei gleicher Querschnittsfläche.

Name vom Zylinder	EI_y/A in 10^5 N
großer Hohlzylinder	$9,10 \pm 0,34$
Hohlzylinder mit großem Loch	$7,11 \pm 0,39$
Hohlzylinder mit mittlerem Loch	$6,29 \pm 0,23$
großer Vollzylinder	$6,12 \pm 0,09$
Hohlzylinder mit kleinem Loch	$5,03 \pm 0,10$
kleiner Vollzylinder	$4,09 \pm 0,07$

Tab. 7: Biegesteifigkeit pro Fläche der verschiedenen geformten Alustäbe

Da nun die optimale Form eines Stabes ermittelt ist, kann erklärt werden, warum Bambus in [Abbildung 2](#) die flachste Kurve hat, was auf eine hohe Biegesteifigkeit schließen lässt, obwohl Bambus das kleinste Elastizitätsmodul aufweist. Die gute Biegesteifigkeit kommt von der Rohrform des Bambus und ggf. einer größeren Fläche des Bambusstabes.

4.3 Fehlerdiskussion

Bei der Überprüfung des linearen Zusammenhangs zwischen s und m sind die a -Werte nicht alle mit der erwarteten 0 verträglich. Eine Zusammenstellung dieser Werte findet man in [Tabelle 8](#).

Material	a -Wert in 10^{-5} m	t -Wert	Verträglichkeit
Stahl	$-1,8 \pm 0,7$	2,0	gerade noch verträglich
Messing	$3,9 \pm 1,5$	2,4	nicht verträglich
Aluminium	$-0,3 \pm 3,4$	0,09	sehr gut verträglich
Bambus	$2,0 \pm 0,5$	2,5	nicht verträglich

Tab. 8: Vergleich der y -Achsenabschnitte a und deren Verträglichkeiten mit dem erwarteten Wert 0.

Eine Ursache vermuten wir in unserer Fehlerabschätzung der Messuhr. Diese liegt bei $\Delta s = 6 \mu\text{m}$. Während der Versuchsdurchführung ist uns außerdem aufgefallen, dass schon leichte Berührungen des Tisches Schwankungen von mehreren $10 \mu\text{m}$ verursachen. Unsere Messunsicherheit ist also möglicherweise zu gering geschätzt. Außerdem sind natürlich weitere systematische Fehler, wie etwa eine leicht schiefe Positionierung des Stabes auf der Halterung oder Abweichungen in den Gewichten, als Ursache möglich. Auch die Verteilung der Residuen, auf die wir als nächstes eingehen möchten, bestätigt die Vermutung, dass die Messuhr ungenauer ist. Der a -Wert von

Aluminium ist der mit 0 am besten verträgliche Wert, was unter anderem an dem hohen Fehler liegt.

Als erstes fällt auf, dass die Residuen in [Abbildung 4](#), sowie [Abbildung 11](#) bis [Abbildung 13](#) statistisch gestreut sind und sich nicht oberhalb oder unterhalb der linearen Regression häufen. Die Abweichungen sind also zufällig und deuten nicht auf einen nicht-linearen Verlauf hin. Eine Ausnahme bildet Aluminium, bei welchem die Abweichungen auffallend groß sind. Wir vermuten, dass diese Abweichungen mit der Tatsache zusammenhängen, dass der Stab bereits plastisch gebogen wurde.

Bei Bambus sind die Residuen zwar nicht überdurchschnittlich groß, aber die Annahme, dass der Bambusstab ein idealisierter, homogener Hohlzylinder ist, ist vermutlich eine zu große Vereinfachung. Außerdem kann der Bambusstab auf den Auflageflächen durch seine unregelmäßige Form leicht verrutschen. Hier liegt also eine potentiell große Fehlerquelle.

Die zweite Versuchsreihe mit variierten Abständen, ergibt bei Verwendung des 0,5 kg-Gewichtes eine gute Verträglichkeit, bei 1 kg allerdings nicht. Ein Grund könnte die schlechte Verträglichkeit sein, die Messing bereits in der ersten Versuchsreihe zeigt. Die Verwendung des Stahlstabes hätte die Verträglichkeit eventuell verbessert. Außerdem sind bei 1 kg mehr Schwankungen in der Masse der Gewichte möglich, da kein einzelnes, sondern mehrere Einzelgewichte, angehängt wird.

Die Ermittlung der Biegesteifigkeit auf zwei verschiedene Weisen (geometrisch und durch die Messung der Biegepeile) ergibt beim dritten Versuch sehr ähnliche Werte, die alle verträglich sind. Das deutet auf geringe Fehlerquellen, beziehungsweise eine richtige Einschätzung der Messunsicherheiten hin.

4.4 Verbesserte Messmethoden

Um die Messungen zu präzisieren, könnte man die Massen wiegen, damit auch hier Messunsicherheiten erkannt und in der Fehlerfortpflanzung berücksichtigt werden können. Ein Recherchieren des genauen Messfehlers der Messuhr würde eine realistischere Fehlerabschätzung erlauben. Um einem Verrutschen, einem Wegdrehen oder einer schrägen Platzierung der Stäbe vorzubeugen, könnten geeignete Fixierungsvorrichtungen sinnvoll sein. Die Verwendung eines geraderen Bambusstabs erleichtert außerdem sicherlich die Messung und unser Modell eines Hohlzylinders wird passender.

Literatur

- [1] Dr. Christof Bartels, Dr. Lukas Bruder, Dr. Thomas Pfohl: *Versuch 6 - Elastizitätsmodul, Versuchsbeschreibung des Physiklabors für Anfänger*innen*, (2021)
- [2] Dr. Christof Bartels, Dr. Lukas Bruder, Dr. Thomas Pfohl: *Datenanalyse - Skript zur Vorlesung am 06.09.2021*, (2021)
- [3] Prof. Dr.-Ing. Harald Meerkamm: *Technisches Taschenbuch, 2.Auflage*, (2014), S.216
- [4] Christoph Tönges: *Mechanische Eigenschaften von Bambus*, <https://bambus.rwth-aachen.de/de/Referate/mecheigBambus/referat.html> (10.09.2021)
- [5] *Young's modulus - Tensile and Yield Strength for some common Materials* https://www.engineeringtoolbox.com/young-modulus-d_417.html (aufgerufen am: 10.09.2021)
- [6] Dr. Dr. Jens Simon: *Normalschwereformel für Freiburg, Breitengrad 48°, Höhe 278 m, Physikalisch-Technische Bundesanstalt*, www.ptb.de, (aufgerufen am: 10.09.2021)

6 Anhang

6.1 Tabellen und Grafiken

Material	Gewicht in g	Biegepfeil s in mm (auflegen)	Biegepfeil s in mm (abnehmen)
Stahl	0	0,00	0,01
	50	0,10	0,13
	100	0,29	0,29
	150	0,43	0,43
	200	0,57	0,56
	250	0,70	0,70
	300	0,88	0,90
	400	1,12	1,17
	500	1,46	1,45
	600	1,74	1,75
	700	2,02	2,03
	800	2,33	2,32
	1000	2,91	2,91
	1500	4,38	-

Tab. 9: Messreihe Stahl mit den Maßen Länge: $(6,00 \pm 0,04)$ mm und Breite: $(10,00 \pm 0,04)$ mm. Die Messwerte des Biegepfeils s haben eine Unsicherheit von $\Delta s = 0,006$ mm.

Material	Gewicht in g	Biegepfeil s in mm (auflegen)	Biegepfeil s in mm (abnehmen)
Messing	0	0,00	-0,02
	50	0,38	0,43
	100	0,63	0,67
	150	1,03	1,03
	200	1,37	1,33
	250	1,73	1,66
	300	2,02	2,00
	400	2,74	2,63
	500	3,36	3,32
	600	4,08	4,06
	700	4,68	4,64
	800	5,31	5,27
	1000	6,66	6,64
	1500	9,95	-

Tab. 10: Messreihe Messing mit den Maßen Länge: $(6,00 \pm 0,04)$ mm und Breite: $(10,00 \pm 0,04)$ mm. Die Messwerte des Biegepfeils s haben eine Unsicherheit von $\Delta s = 0,006$ mm.

Material	Gewicht in g	Biegepfeil s in mm (auflegen)	Biegepfeil s in mm (abnehmen)
Aluminium	0	0,00	0,00
	50	0,43	0,44
	100	0,86	0,86
	150	1,35	1,35
	200	1,74	1,74
	250	2,23	2,14
	300	2,70	2,59
	400	3,68	3,39
	500	4,31	4,34
	600	5,29	5,23
	700	6,00	6,06
	800	6,99	6,99
	1000	8,76	8,81
	1500	13,31	-

Tab. 11: Messreihe Aluminium mit den Maßen Länge: $(6,00 \pm 0,04)$ mm und Breite: $(10,00 \pm 0,04)$ mm. Die Messwerte des Biegepfeils s haben eine Unsicherheit von $\Delta s = 0,006$ mm.

Material	Gewicht in g	Biegepfeil s in mm (auflegen)	Biegepfeil s in mm (abnehmen)
Bambus	0	0,00	0,00
	50	0,10	0,08
	100	0,21	0,16
	150	0,29	0,24
	200	0,39	0,32
	250	0,44	0,41
	300	0,54	0,51
	400	0,71	0,69
	500	0,89	0,86
	600	1,06	1,02
	700	1,23	1,21
	800	1,40	1,42
	1000	1,76	1,76
	1500	2,62	-

Tab. 12: Messreihe Bambus mit den Maßen Außenradius $(8,00 \pm 0,08)$ mm und Innenradius: $(2,00 \pm 0,08)$ mm. Die Messwerte des Biegepfeils s haben eine Unsicherheit von $\Delta s = 0,006$ mm.

Länge d in cm	Biegepeil s in mm bei 0,5kg	Biegepeil s in mm bei 1,0kg
15	0,02	0,04
20	0,05	0,10
30	0,17	0,34
40	0,41	0,82
50	0,82	1,60
60	1,34	2,76
70	2,19	4,35
80	3,20	6,63
90	4,46	9,28

Tab. 13: Biegepeil des Messingstabes bei varrierter Länge d bei angehängten Massen 0,5 kg und 1 kg. Die Messwerte des Biegepeils s haben eine Unsicherheit von $\Delta s = 0,006$ mm, die Länge d eine Unsicherheit von $\Delta d = 0,6$ mm.

Name vom Zylinder	Innendurchmesser d_i in cm	Außendurchmesser d_a in cm	Biegepeil s in mm
großer Vollzylinder	0	1,205	1,50
Hohlzylinder mit kleinem Loch	0,40	1,00	3,15
Hohlzylinder mit mittlerem Loch	0,69	1,00	4,04
Hohlzylinder mit großem Loch	0,80	1,01	4,93
kleiner Vollzylinder	0	0,985	3,36
großer Hohlzylinder	0,895	1,20	2,29

Tab. 14: Biegepeil des Aluminiums bei verschiedenen Formen. Die Durchmesser d_i und d_a besitzen eine Unsicherheit von 0,04 mm, die Messwerte des Biegepeils s haben eine Unsicherheit von $\Delta s = 0,006$ mm.

Name vom Zylinder	Biegesteifigkeit (berechnet) EI_y in N m^2	Biegesteifigkeit (geometrisch) EI_y in N m^2	t -Wert
großer Vollzylinder	$69,8 \pm 0,3$	69 ± 2	0,80
Hohlzylinder mit kleinem Loch	$33,21 \pm 0,10$	$31,6 \pm 0,8$	2,09
Hohlzylinder mit mittlerem Loch	$25,90 \pm 0,07$	$25,1 \pm 0,7$	1,30
Hohlzylinder mit großem Loch	$21,22 \pm 0,05$	$20,4 \pm 0,6$	1,34
kleiner Vollzylinder	$31,14 \pm 0,09$	$30,5 \pm 0,8$	0,85
großer Hohlzylinder	$45,69 \pm 0,16$	$46,4 \pm 1,4$	0,51

Tab. 15: Vergleich zwischen berechneter und aus geometrischen Eigenschaften bestimmter Biegesteifigkeit.

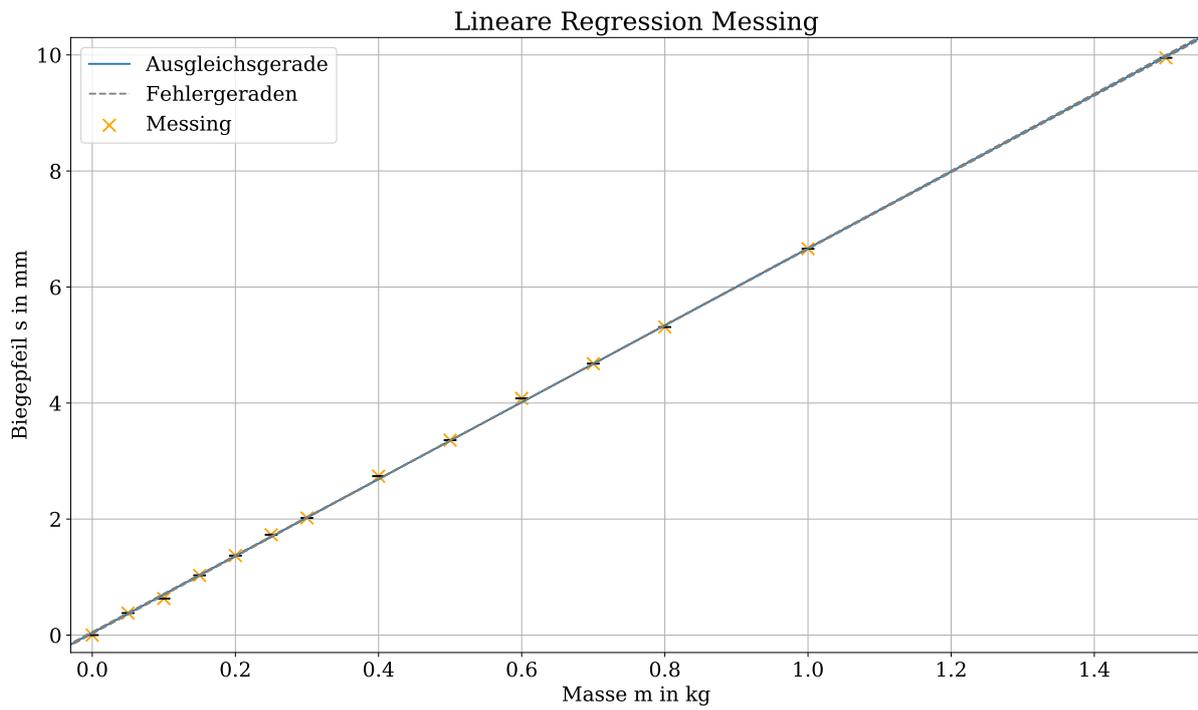


Abb. 8: Aufgetragen sind der Biegepfel s gegen die zusätzlich angehängte Masse m bei Messing und die lineare Regression mit Fehler- und Ausgleichsgeraden.

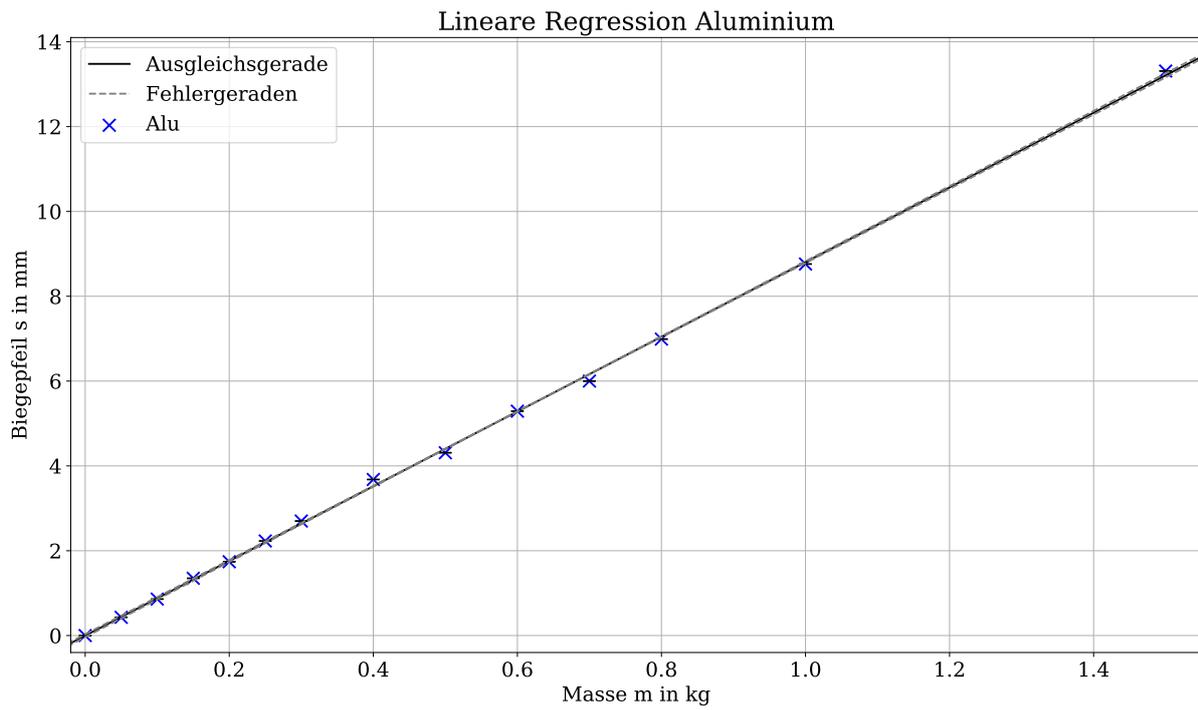


Abb. 9: Aufgetragen sind der Biegepfeil s gegen die zusätzlich angehängte Masse m bei Aluminium und die lineare Regression mit Fehler- und Ausgleichsgeraden.

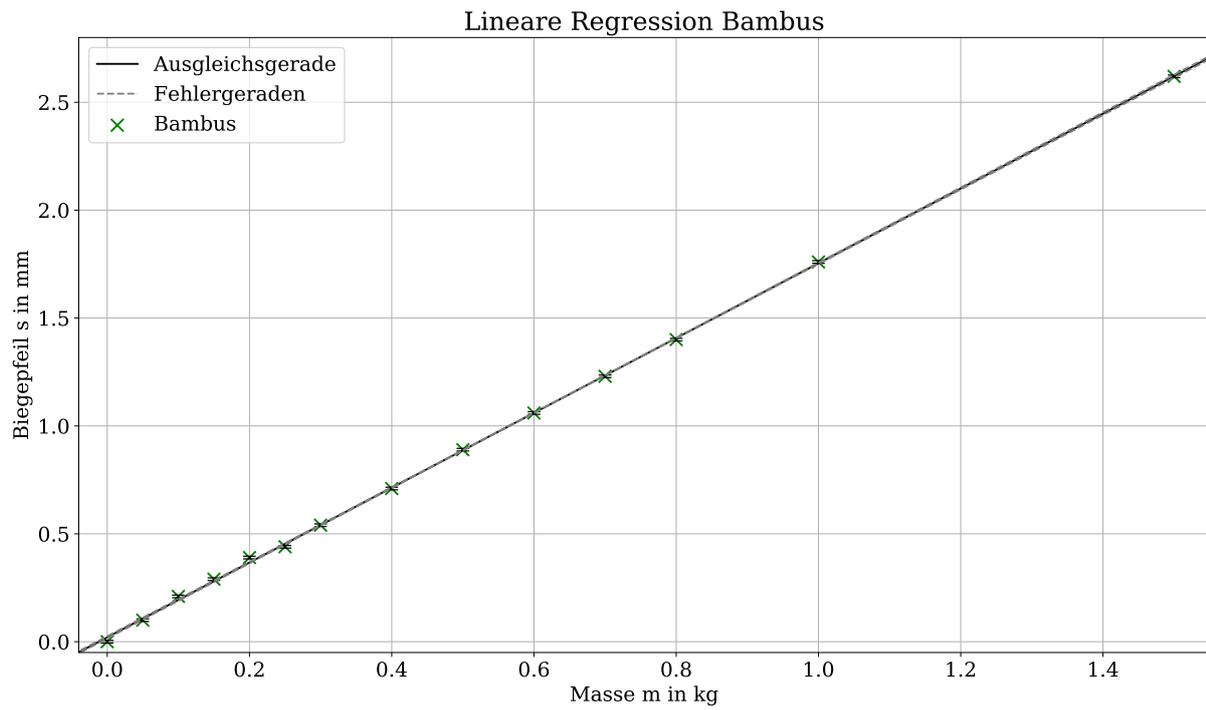


Abb. 10: Aufgetragen sind der Biegepfeil s gegen die zusätzlich angehängte Masse m bei Bambus und die lineare Regression mit Fehler- und Ausgleichsgeraden.

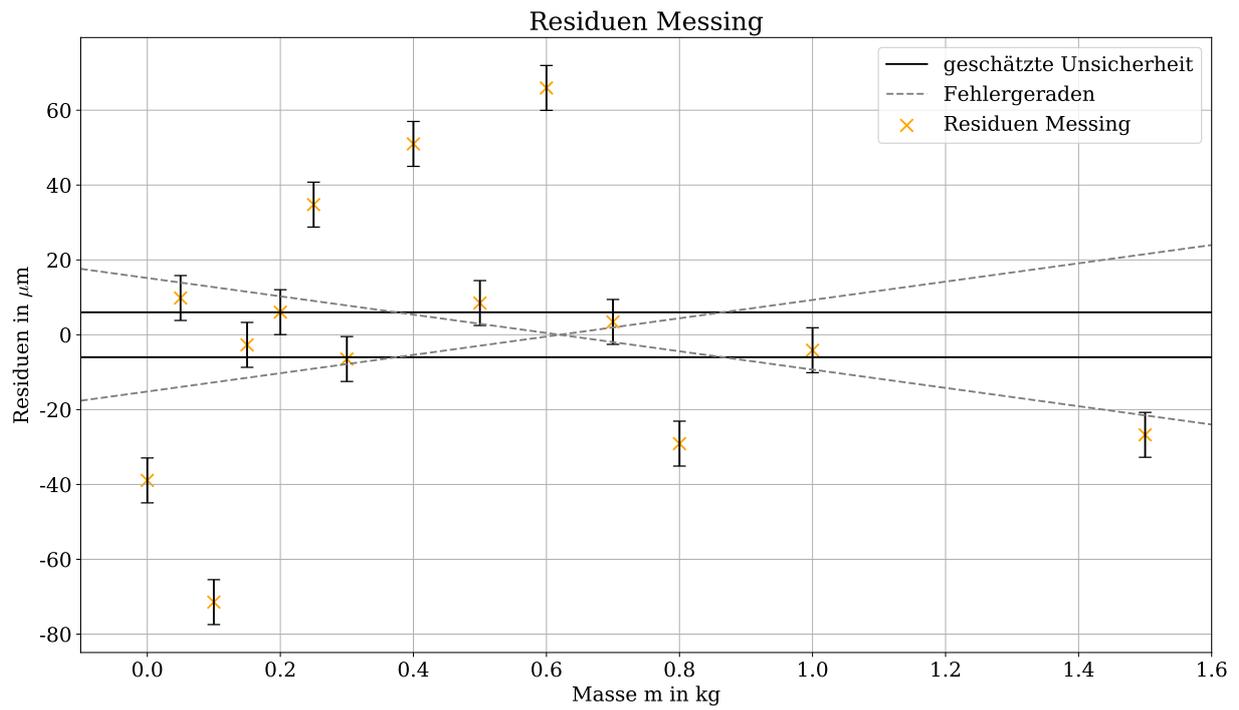


Abb. 11: Aufgetragen sind die Residuen der linearen Regression bei Messing mit Fehlerbalken, Fehlergeraden und der geschätzten Unsicherheit.

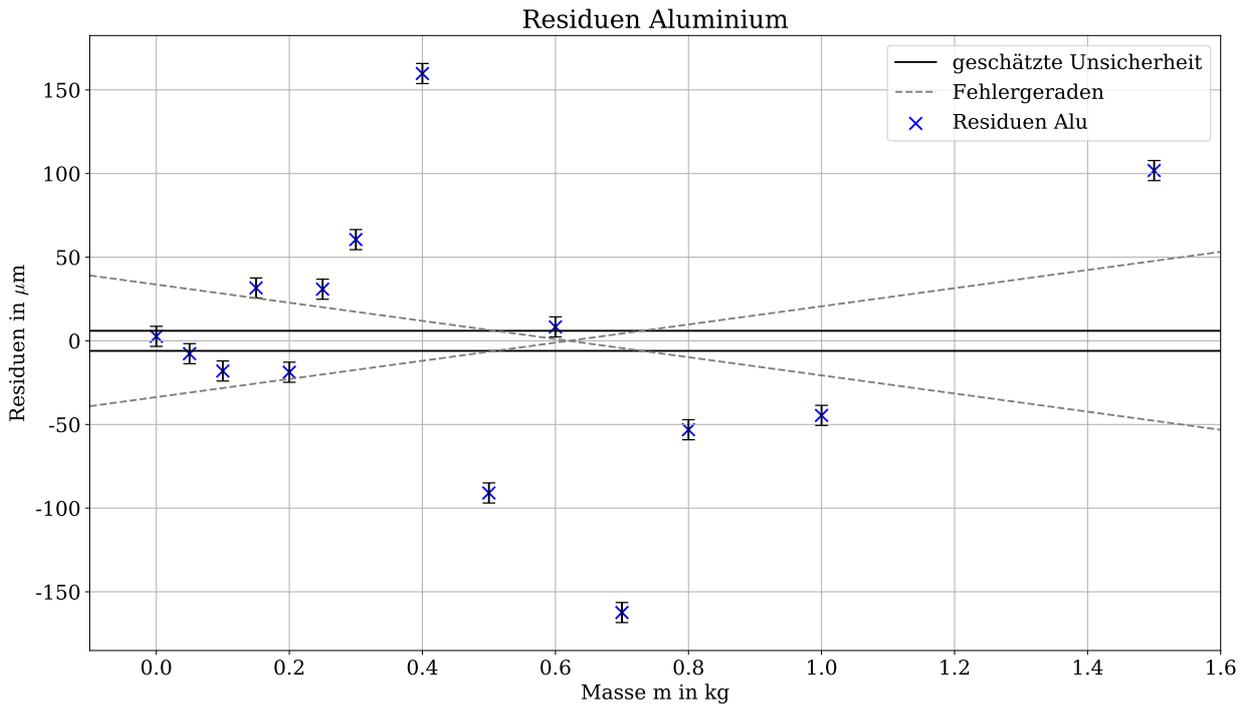


Abb. 12: Aufgetragen sind die Residuen der linearen Regression bei Aluminium mit Fehlerbalken, Fehlergeraden und der geschätzten Unsicherheit.

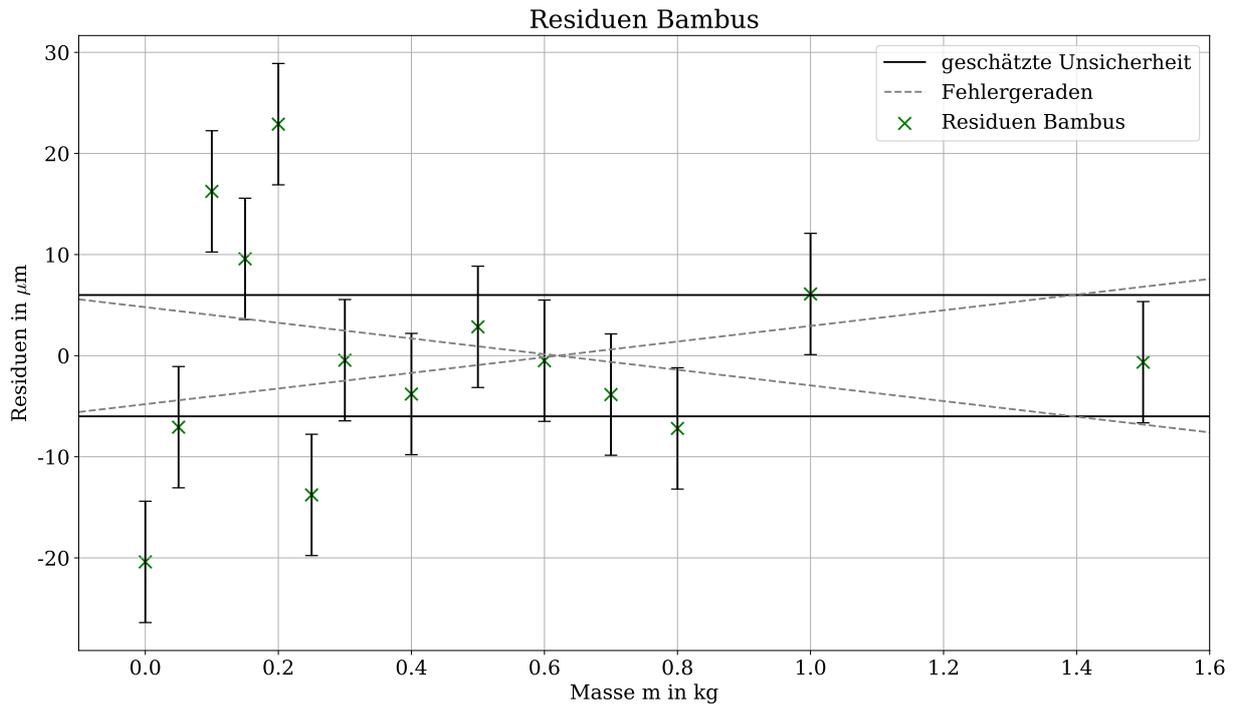


Abb. 13: Aufgetragen sind die Residuen der linearen Regression bei Bambus mit Fehlerbalken, Fehlergeraden und der geschätzten Unsicherheit.

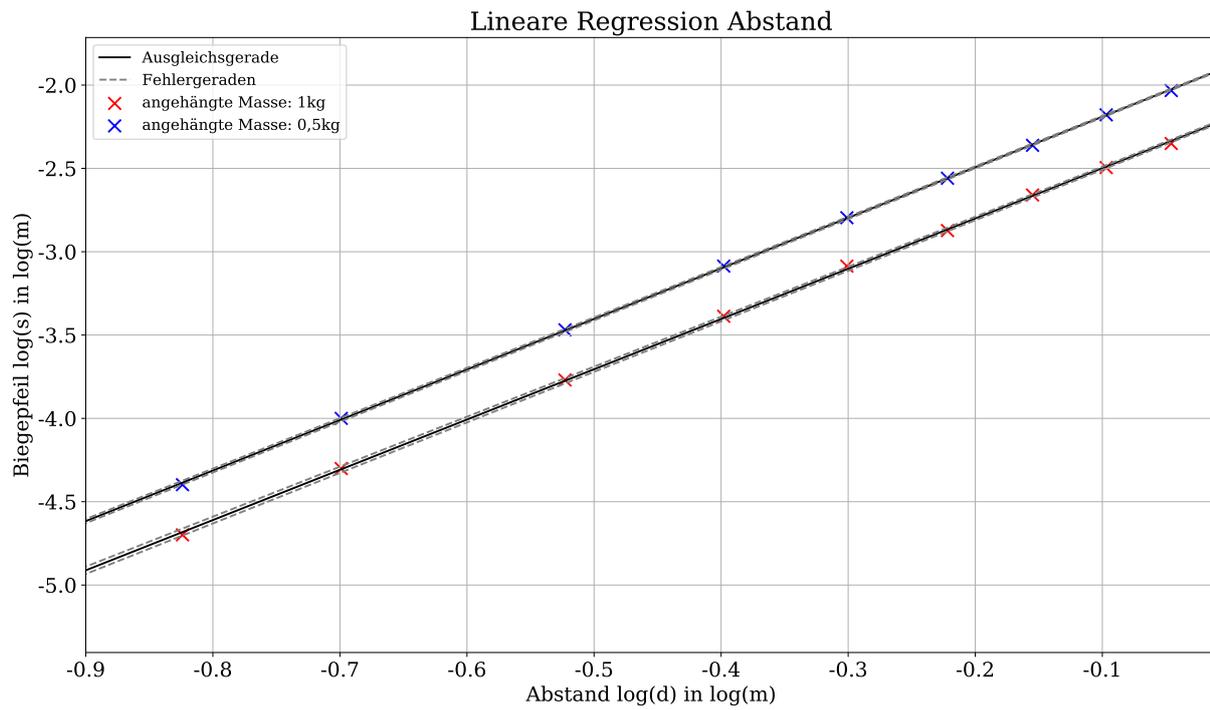


Abb. 14: Lineare Regression der logarithmischen Abstandsabhängigkeit bei Messing, aufgetragen ist der Logarithmus des Biegefeils s gegen den Logarithmus des Abstandes d .

6.2 Laborbuch

Versuch 6 - Elastizitätsmodul 09.09.21

Versuchsreihe 6.1

Versuchsaufbau:

Skizze: Gesamtaufbau

3 Rechteck-Stäbe aus Messing, Aluminium, Stahl

Position d. Messuhr:

Messuhr

Stab

$x_1 = 0,1m$ $x_2 = 0,5m$ $x_3 = 0,9m \rightarrow \Delta x = \frac{1mm}{\sqrt{6}}$ (Dreieck)
 $= 0,4mm$

Bem: Alu-Stab schon leicht verbogen

Versuchsdurchführung: In der Mitte des Stabes werden zu- und abnehmend Gewichte angehängt. Die Stäbe liegen auf der breiteren Seite auf.

Messunsicherheiten: $\Delta d = 2 \cdot \Delta x = 0,8mm$
 $\Delta s = \frac{10\mu m}{\sqrt{3}} \approx 6\mu m$

Messung: $d = 1,8cm$ auflegen

Material	Gewicht m in g	Biegefls s in mm	abnehmen Gewicht m in g	s in mm
Stahl (0,6 cm x 1cm)	50	0,10	0	0,01
	100	0,29	50	0,13
	150	0,43	100	0,29
	200	0,57	150	0,43
	250	0,70	200	0,56
	300	0,88	250	0,70
	400	1,12	300	0,90
	500	1,46	400	1,17
	600	1,74	500	1,45
	700	2,02	600	1,75
	800	2,33	700	2,03
	1000	2,91	800	2,32
			1000	2,91

Abb. 15: Laborbuch, Seite 1

Material	Gewicht (auflegen) m in g	Biegeflach s in mm	Gewicht (abnehmen) m ing	s in mm
Stahl	1500	4,38	/	/
Messing (0,6cm x 1cm)	50	0,38	0	-0,02
	100	0,63	50	0,43
	150	1,03	100	0,67
	200	1,37	150	1,03
	250	201 1,73	200	1,33
	300	250 2,02	250	1,66
	400	300 2,74	300	2,00
	500	400 3,36	400	2,63
	600	500 4,08	500	3,32
	700	600 4,68	600	4,06
	800	700 5,31	700	4,64
	1000	800 6,66	800	5,27
	1500	9,95	1000	6,64
Aluminium Aluminium (Biegung nach unten)  (0,6cm x 1cm)	50	0,43	0	0,00
	100	0,86	50	0,44
	150	1,35	100	0,86
	200	1,74	150	1,35
	250	2,23	200	1,74
	300	2,70	250	2,14
	400	3,68	300	2,59
	500	4,31	400	3,39
	600	5,29	500	4,34
	700	6,00	600	5,23
	800	6,99	700	6,06
	1000	8,76	800	6,99
	1500	13,31	1000	8,81

Abb. 16: Laborbuch, Seite 2

Messung:

Gewicht: 0,5 kg		Gewicht: 1 kg	
Länge d in cm	Biegefläch s in mm	d in cm	s in mm
15	0,02	15	0,04
20	0,05	20	0,10
30	0,17	30	0,34
40	0,41	40	0,82
50	0,82	50	1,60
60	1,34	60	2,76
70	2,19	70	4,35
80	3,20	80	6,63
90	4,46	90	9,28

Versuch 6.3

Versuchsaufbau: siehe 6.1 (~~Alu-Stab jetzt nicht mehr verbogen~~)

Versuchsdurchführung:

- konstante Länge $d = 80 \text{ cm}$
- verschiedene Formen:
 - Vollzylinder: $\bigcirc \text{ } | 1 \text{ cm}$, Alu
 - Hohlzylinder: $\odot 20,8 \text{ cm} \text{ } | 1,2 \text{ cm}$, Alu
 - Rechteck ~~flache~~ ^{breite} Seite: \square
 - Rechteck schmale Seite: \square

Messunsicherheit: siehe 6.3

Durchmesser: $\Delta r = \frac{1 \text{ mm}}{\sqrt{6}} = 0,4 \text{ mm}$

$\Delta(d_n) = \frac{0,016 \text{ cm}}{\sqrt{6}} = 0,0066 \text{ cm} = i, a$

Abb. 18: Laborbuch, Seite 4

Messung

Versuchs durchführung: - Hohlzylinder: ①
 - Hohlzylinder: ②
 - " " : ③
 - " " : ④
 - " " : ⑤

Messung: $m = 1 \text{ kg}$ $d = 80 \text{ cm}$

Innendurchmesser in cm	Außendurchmesser in cm	Biegezeit s in mm
0,45	0,6	2,32
0	0,5	3,24
0,2	0,5	3,15
0,3	0,6	1,51
0,2	0,5	3,20
0,5	0,6	2,64
0	0,6 1,205	1,53

(Radius statt Durchmesser \rightarrow nochmal gemessen)

$m = 1 \text{ kg}$ $x_1 = 0,4 \text{ m}$ $x_2 = 0,9 \text{ m}$

Innendurchm. d_1 in cm	Außendurchm. d_2 in cm	Biegezeit s in mm
0	1,205	1,50
0,40	1,00	3,15
0,69	1,00	4,04
0,80	1,01	4,93
0	0,985	3,36
0,895	1,20	2,29
	1,20	

30.09.21
M. C. / M.

Abb. 19: Laborbuch, Seite 5

6.3 Python-Code

Versuch_6_Python

September 11, 2021

```
[ ]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def mittel(l: list) -> float:
    return sum(l)/len(l)

def staw(daten: list) -> float:
    mittelw = mittel(daten)
    standard = 0
    for mess in daten:
        standard += (mess-mittelw)**2
    standard = standard/(len(daten)-1)
    standard = standard**(1/2)
    return standard

def stawm(daten: list) -> float:
    return staw(daten)/(len(daten)**(1/2))

def gerade(x,b,a):
    return b*x+a

def b_linreg(x,y):
    if len(x) != len(y):
        print("Error, Listen nicht gleich lang!")
    xy = [i*j for i,j in zip(x,y)]
    xx = [i*i for i in x]
    zaehler = len(x)*sum(xy)-sum(x)*sum(y)
    nenner = len(x)*sum(xx)-sum(x)**2
    return zaehler/nenner

def a_linreg(x,y):
    if len(x) != len(y):
        print("Error, Listen nicht gleich lang!")
    xy = [i*j for i,j in zip(x,y)]
    xx = [i*i for i in x]
    zaehler = sum(xx)*sum(y)-sum(x)*sum(xy)
    nenner = len(x)*sum(xx)-sum(x)**2
```

1

Abb. 20: Python-Code, Seite 1

```

return zaehler/nenner

def streumass(x,y):
    b = b_linreg(x,y)
    a = a_linreg(x,y)
    summe = sum([(j-(b*i+a))**2 for i,j in zip(x,y)])
    s = ((1/(len(x)-2))*summe)**(1/2)
    return s

def s_a_linreg(x,y):
    s = streumass(x,y)
    xx = [i*i for i in x]
    a = s*((sum(xx)/(len(x)*sum(xx)-(sum(x)**2))**(1/2))
    return a

def s_b_linreg(x,y):
    s = streumass(x,y)
    xx = [i*i for i in x]
    b = s*((len(x)/(len(x)*sum(xx)-(sum(x)**2))**(1/2))
    return b

```

```

[ ]: #wir lesen die Werte in SI Einheiten ein

Gewicht = [0, 0.050,0.100,0.150,0.200,0.250,0.300,0.400,0.500,0.600,0.700,0.
↳800,1.000,1.500] #in kg

s_Stahl_zu = [0,0.10,0.29,0.43,0.57,0.70,0.88,1.12,1.46,1.74,2.02,2.33,2.91,4.
↳38] #in mm
s_Stahl_zu = [i*0.001 for i in s_Stahl_zu] #in m
s_Stahl_ab = [0.01,0.13,0.29,0.43,0.56,0.70,0.90,1.17,1.45,1.75,2.03,2.32,2.
↳91,4.38] #in mm
s_Stahl_ab = [i*0.001 for i in s_Stahl_ab] #in m

s_Messing_zu = [0,0.38,0.63,1.03,1.37,1.73,2.02,2.74,3.36,4.08,4.68,5.31,6.66,9.
↳95] #in mm
s_Messing_zu = [i*0.001 for i in s_Messing_zu] #in m
s_Messing_ab = [-0.02, 0.43,0.67,1.03,1.33,1.66,2.00,2.63,3.32,4.06,4.64,5.27,6.
↳64,9.95] #in mm
s_Messing_ab = [i*0.001 for i in s_Messing_ab] #in m

s_Al_u_zu = [0,0.43,0.86,1.35,1.74,2.23,2.70,3.68,4.31,5.29,6.00,6.99,8.76,13.
↳31] #in mm
s_Al_u_zu = [i*0.001 for i in s_Al_u_zu] #in m
s_Al_u_ab = [0.00,0.44,0.86,1.35,1.74,2.14,2.59,3.39,4.34,5.23,6.06,6.99,8.81,13.
↳31] #in mm
s_Al_u_ab = [i*0.001 for i in s_Al_u_ab] #in m

```

Abb. 21: Python-Code, Seite 2

```

s_Bambus_zu = [0,0.10,0.21,0.29,0.39,0.44,0.54,0.71,0.89,1.06,1.23,1.40,1.76,2.
↳62] #in mm
s_Bambus_zu = [i*0.001 for i in s_Bambus_zu] #in m
s_Bambus_ab = [0.00,0.08,0.16,0.24,0.32,0.41,0.51,0.69,0.86,1.02,1.21,1.42,1.
↳76,2.62] #in mm
s_Bambus_ab = [i*0.001 for i in s_Bambus_ab] #in m

[ ]: #Die Flächenträgheitsmomente bestimmen wir aus den Maßen, a = 1cm und b = 0,6cm
↳ (Unsicherheit von 0,004cm, Messschieber)
#Bambus Maße: r_innen = 0,2cm, r_außen = 0,8cm (Unsicherheit von 0,004cm,
↳ Messschieber)
#Formeln aus der Versuchsbeschreibung

I_Metall = (1/12)*0.01*(0.006**3) #in m^4
I_Bambus = (np.pi/4)*(0.008**4-0.002**4)

[ ]: plt.subplots(figsize=(16,9)) #zur besseren Visualisierung alle Biegepeile in
↳ mm, deshalb *1000
plt.scatter(Gewicht, [i*1000 for i in s_Stahl_zu], color="red", s=100,
↳ marker="x", label="Stahl")
plt.scatter(Gewicht, [i*1000 for i in s_Al_u_zu], color="blue", s=100,
↳ marker="x", label="Aluminium")
plt.scatter(Gewicht, [i*1000 for i in s_Messing_zu], color="orange", s=100,
↳ marker="x", label="Messing")
plt.scatter(Gewicht, [i*1000 for i in s_Bambus_zu], color="green", s=100,
↳ marker="x", label="Bambus")
plt.errorbar(Gewicht, [i*1000 for i in s_Stahl_zu], yerr=0.006, fmt="none",
↳ color="black", capsize=5)
plt.errorbar(Gewicht, [i*1000 for i in s_Al_u_zu], yerr=0.006, fmt="none",
↳ color="black", capsize=5)
plt.errorbar(Gewicht, [i*1000 for i in s_Messing_zu], yerr=0.006, fmt="none",
↳ color="black", capsize=5)
plt.errorbar(Gewicht, [i*1000 for i in s_Bambus_zu], yerr=0.006, fmt="none",
↳ color="black", capsize=5)

plt.legend(fontsize=12)
plt.grid()
plt.title("Vergleich der vier Materialien", size=20)
plt.xlabel("Masse m in kg")
plt.ylabel("Biegepeil s in mm")
plt.show()

[ ]: Stahl_Unterschied = [i-j for i,j in zip(s_Stahl_ab,s_Stahl_zu)]
Alu_Unterschied = [i-j for i,j in zip(s_Al_u_ab,s_Al_u_zu)]
Messing_Unterschied = [i-j for i,j in zip(s_Messing_ab,s_Messing_zu)]

```

Abb. 22: Python-Code, Seite 3

```

Bambus_Unterschied = [i-j for i,j in zip(s_Bambus_ab,s_Bambus_zu)]

plt.subplots(figsize=(16,9)) #zur besseren Visualisierung alle Biegepeile in
↳mm, deshalb *1000
plt.scatter(Gewicht, [i*1000 for i in Stahl_Unterschied], color="red",s=100,
↳marker="x", label="Stahl Unterschied")
plt.scatter(Gewicht, [i*1000 for i in Messing_Unterschied],
↳color="orange",s=100, marker="x", label="Messing Unterschied")
plt.scatter(Gewicht, [i*1000 for i in Alu_Unterschied], color="blue",s=100,
↳marker="x", label="Alu Unterschied")
plt.scatter(Gewicht, [i*1000 for i in Bambus_Unterschied], color="green",s=100,
↳marker="x", label="Bambus Unterschied")
plt.plot([-0.5,2],[0,0],color="black")

plt.legend(fontsize=12)
plt.grid()
plt.xlim(-0.1,1.6)
plt.title("Vergleich Messung zunehmend/abnehmend", size=20)
plt.xlabel("Masse m in kg")
plt.ylabel("Unterschied in mm")
plt.show()

```

```

[ ]: #Lineare Regression Stahl
a_Stahl=a_linreg(Gewicht, s_Stahl_zu)
b_Stahl=b_linreg(Gewicht, s_Stahl_zu)
s_a_Stahl=s_a_linreg(Gewicht, s_Stahl_zu)
s_b_Stahl=s_b_linreg(Gewicht, s_Stahl_zu)

geradenX = np.linspace(-0.1,1.6,5)
geradenY = [gerade(x,b_Stahl,a_Stahl) for x in geradenX]

#Fehlergeraden
geradenY_1 = [gerade(x,b_Stahl+s_b_Stahl, a_Stahl-s_a_Stahl) for x in geradenX]
geradenY_2 = [gerade(x,b_Stahl-s_b_Stahl, a_Stahl+s_a_Stahl) for x in geradenX]

plt.subplots(figsize=(16,9))
plt.scatter(Gewicht, s_Stahl_zu, color="red", s=100, marker="x", label="Stahl")
plt.errorbar(Gewicht, s_Stahl_zu, yerr=0.000006, fmt="none", color="black",
↳capsize=5)

plt.plot(geradenX, geradenY, label="Ausgleichsgerade")
plt.plot(geradenX, geradenY_1, linestyle="dashed", color="grey",
↳label="Fehlergeraden")
plt.plot(geradenX, geradenY_2, linestyle="dashed", color="grey")

```

Abb. 23: Python-Code, Seite 4

```

plt.legend(fontsize=12)
plt.grid()
plt.xlim(-0.05,1.55)
plt.xlabel("Masse m in kg")
plt.ylabel("Biegepfeil s in m")
plt.title("Lineare Regression Stahl", size=20)
plt.show()

[ ]: Residuen_Stahl= [i-gerade(j, b_Stahl, a_Stahl) for i,j in zip(s_Stahl_zu,
↳Gewicht)]
Fehlergerade1= [i-j for i,j in zip(geradenY_1, geradenY)]
Fehlergerade2= [i-j for i,j in zip(geradenY_2, geradenY)]

plt.subplots(figsize=(16,9))
plt.scatter(Gewicht, Residuen_Stahl, color="red",s=100, marker="x",
↳label="Residuen Stahl")
plt.plot([-0.5,2],[0.000006,0.000006],color="black", label='geschätzte
↳Unsicherheit')
plt.plot([-0.5,2],[-0.000006,-0.000006],color="black")
plt.plot(geradenX, Fehlergerade1, linestyle="dashed", color="grey",
↳label="Fehlergeraden")
plt.plot(geradenX, Fehlergerade2, linestyle="dashed", color="grey")

plt.legend(fontsize=12)
plt.grid()
plt.xlim(-0.1,1.6)
plt.title("Residuen Stahl", size=20)
plt.xlabel("Masse m in kg")
plt.ylabel("Residuen in m")
plt.show()

[ ]: #lineare Regression Messing
a_Messing=a_linreg(Gewicht, s_Messing_zu)
b_Messing=b_linreg(Gewicht, s_Messing_zu)
s_a_Messing=s_a_linreg(Gewicht, s_Messing_zu)
s_b_Messing=s_b_linreg(Gewicht, s_Messing_zu)

geradenX = np.linspace(-0.1,1.6,5)
geradenY = [gerade(x,b_Messing,a_Messing) for x in geradenX]

#Fehlergeraden
geradenY_1 = [gerade(x,b_Messing+s_b_Messing, a_Messing-s_a_Messing) for x in
↳geradenX]
↳geradenX]
geradenY_2 = [gerade(x,b_Messing-s_b_Messing, a_Messing+s_a_Messing) for x in
↳geradenX]
↳geradenX]

```

```

plt.subplots(figsize=(16,9))
plt.scatter(Gewicht, s_Messing_zu, color="orange", s=100, marker="x",
↳label="Messing")
plt.errorbar(Gewicht, s_Messing_zu, yerr=0.000006, fmt="none", color="black",
↳capsize=5)

plt.plot(geradenX, geradenY, label="Ausgleichsgerade")
plt.plot(geradenX, geradenY_1, linestyle="dashed", color="grey",
↳label="Fehlergeraden")
plt.plot(geradenX, geradenY_2, linestyle="dashed", color="grey")

plt.legend(fontsize=12)
plt.grid()
plt.xlim(-0.05,1.55)
plt.xlabel("Masse m in kg")
plt.ylabel("Biegepeil s in m")
plt.title("Lineare Regression Messing", size=20)
plt.show()

[ ]: Residuen_Messing= [i-gerade(j, b_Messing, a_Messing) for i,j in
↳zip(s_Messing_zu, Gewicht)]
Fehlergerade1= [i-j for i,j in zip(geradenY_1, geradenY)]
Fehlergerade2= [i-j for i,j in zip(geradenY_2, geradenY)]

plt.subplots(figsize=(16,9))
plt.scatter(Gewicht, Residuen_Messing, color="orange",s=100, marker="x",
↳label="Residuen Messing")
plt.plot([-0.5,2],[0.000006,0.000006],color="black", label='geschätzte
↳Unsicherheit')
plt.plot([-0.5,2],[-0.000006,-0.000006],color="black")
plt.plot(geradenX, Fehlergerade1, linestyle="dashed", color="grey",
↳label="Fehlergeraden")
plt.plot(geradenX, Fehlergerade2, linestyle="dashed", color="grey")

plt.legend(fontsize=12)
plt.grid()
plt.xlim(-0.1,1.6)
plt.title("Residuen Messing", size=20)
plt.xlabel("Masse m in kg")
plt.ylabel("Residuen in m")
plt.show()

[ ]: #lineare Regression Alu
a_Alus=a_linreg(Gewicht, s_Alus_zu)
b_Alus=b_linreg(Gewicht, s_Alus_zu)
s_a_Alus=s_a_linreg(Gewicht, s_Alus_zu)

```

Abb. 25: Python-Code, Seite 6

```

s_b_Alus=s_b_linreg(Gewicht, s_Alus_zu)

geradenX = np.linspace(-0.1,1.6,5)
geradenY = [gerade(x,b_Alus,a_Alus) for x in geradenX]

#Fehlergeraden
geradenY_1 = [gerade(x,b_Alus+s_b_Alus, a_Alus-s_a_Alus) for x in geradenX]
geradenY_2 = [gerade(x,b_Alus-s_b_Alus, a_Alus+s_a_Alus) for x in geradenX]

plt.subplots(figsize=(16,9))
plt.scatter(Gewicht, s_Alus_zu, color="blue", s=100, marker="x", label="Alus")
plt.errorbar(Gewicht, s_Alus_zu, yerr=0.000006, fmt="none", color="black",
             ↵ capsize=5)

plt.plot(geradenX, geradenY, color='black', label="Ausgleichsgerade")
plt.plot(geradenX, geradenY_1, linestyle="dashed", color="grey",
         ↵ label="Fehlergeraden")
plt.plot(geradenX, geradenY_2, linestyle="dashed", color="grey")

plt.legend(fontsize=12)
plt.grid()
plt.xlim(-0.05,1.55)
plt.xlabel("Masse m in kg")
plt.ylabel("Biegepfeil s in m")
plt.title("Lineare Regression Alus", size=20)
plt.show()

[ ]: Residuen_Alus= [i-gerade(j, b_Alus, a_Alus) for i,j in zip(s_Alus_zu, Gewicht)]
Fehlergerade1= [i-j for i,j in zip(geradenY_1, geradenY)]
Fehlergerade2= [i-j for i,j in zip(geradenY_2, geradenY)]

plt.subplots(figsize=(16,9))
plt.scatter(Gewicht, Residuen_Alus, color="blue",s=100, marker="x",
           ↵ label="Residuen Alus")
plt.plot([-0.5,2],[0.000006,0.000006],color="black", label='geschätzte
           ↵ Unsicherheit')
plt.plot([-0.5,2],[-0.000006,-0.000006],color="black")
plt.plot(geradenX, Fehlergerade1, linestyle="dashed", color="grey",
         ↵ label="Fehlergeraden")
plt.plot(geradenX, Fehlergerade2, linestyle="dashed", color="grey")

plt.legend(fontsize=12)
plt.grid()
plt.xlim(-0.1,1.6)
plt.title("Residuen Alus", size=20)
plt.xlabel("Masse m in kg")

```

Abb. 26: Python-Code, Seite 7

```

plt.ylabel("Residuen in m")
plt.show()

[ ]: #Lineare Regression Bambus
a_Bambus=a_linreg(Gewicht, s_Bambus_zu)
b_Bambus=b_linreg(Gewicht, s_Bambus_zu)
s_a_Bambus=s_a_linreg(Gewicht, s_Bambus_zu)
s_b_Bambus=s_b_linreg(Gewicht, s_Bambus_zu)

geradenX = np.linspace(-0.1,1.6,5)
geradenY = [gerade(x,b_Bambus,a_Bambus) for x in geradenX]

#Fehlergeraden
geradenY_1 = [gerade(x,b_Bambus+s_b_Bambus, a_Bambus-s_a_Bambus) for x in geradenX]
geradenY_2 = [gerade(x,b_Bambus-s_b_Bambus, a_Bambus+s_a_Bambus) for x in geradenX]

plt.subplots(figsize=(16,9))
plt.scatter(Gewicht, s_Bambus_zu, color="green", s=100, marker="x",
            label="Bambus")
plt.errorbar(Gewicht, s_Bambus_zu, yerr=0.000006, fmt="none", color="black",
            capsize=5)

plt.plot(geradenX, geradenY, color='black', label="Ausgleichsgerade")
plt.plot(geradenX, geradenY_1, linestyle="dashed", color="grey",
            label="Fehlergeraden")
plt.plot(geradenX, geradenY_2, linestyle="dashed", color="grey")

plt.legend(fontsize=12)
plt.grid()
plt.xlim(-0.05,1.55)
plt.xlabel("Masse m in kg")
plt.ylabel("Biegepfeil s in m")
plt.title("Lineare Regression Bambus", size=20)
plt.show()

[ ]: Residuen_Bambus= [i-gerade(j, b_Bambus, a_Bambus) for i,j in zip(s_Bambus_zu,
            Gewicht)]
Fehlergerade1= [i-j for i,j in zip(geradenY_1, geradenY)]
Fehlergerade2= [i-j for i,j in zip(geradenY_2, geradenY)]

plt.subplots(figsize=(16,9))
plt.scatter(Gewicht, Residuen_Bambus, color="green",s=100, marker="x",
            label="Residuen Bambus")

```

```

plt.plot([-0.5,2],[0.000006,0.000006],color="black", label='geschätzte
↳Unsicherheit')
plt.plot([-0.5,2],[-0.000006,-0.000006],color="black")
plt.plot(geradenX, Fehlergerade1, linestyle="dashed", color="grey",↳
↳label="Fehlergeraden")
plt.plot(geradenX, Fehlergerade2, linestyle="dashed", color="grey")

plt.legend(fontsize=12)
plt.grid()
plt.xlim(-0.1,1.6)
plt.title("Residuen Bambus", size=20)
plt.xlabel("Masse m in kg")
plt.ylabel("Residuen in m")
plt.show()

[ ]: np.sqrt(((3/4)*9.808*(0.8**2)*0.0006/(b*0.01*0.006**3))**2+((1/4)*9.808*(0.
↳8**3)*db/(b**2*0.01*0.006**3))**2+((1/4)*9.808*(0.8**3)*0.0004/(b*0.01**2*0.
↳006**3))**2+((3/4)*9.808*(0.8**3)*0.0004/(b*0.01*0.006**4))**2)↳
↳#Fehlerfortpflanzung Metalle
np.sqrt(((1/4)*9.808*(0.8**2)*0.0006/(0.001733*(0.008**4-0.002**4))*np.
↳pi)**2+((1/12)*9.808*(0.8**3)*0.00008/(0.001733**2*(0.008**4-0.002**4))*np.
↳pi)**2+((1/3)*9.808*(0.8**3)*0.008**3*0.0004/(0.001733*(0.008**4-0.
↳002**4)**2*np.pi)**2+((1/3)*9.808*(0.8**3)*0.002**3*0.0004*(0.001733*(0.
↳008**4-0.002**4)**2*np.pi)**2) #Fehlerfortpflanzung Bambus

[ ]: d=[0.15,0.20,0.30,0.40,0.50,0.60,0.70,0.80,0.90]
s_5=[0.02,0.05,0.17,0.41,0.82,1.34,2.19,3.20,4.46]
s_5=[i*0.001 for i in s_5]
s_10=[0.04,0.10,0.34,0.82,1.60, 2.76,4.35,6.63,9.28]
s_10=[i*0.001 for i in s_10]

plt.subplots(figsize=(16,9))
plt.loglog()
plt.scatter(d, [i*1000 for i in s_5], color="red", s=100, marker="x",↳
↳label="angehängte Masse: 0,5kg")
plt.scatter(d, [i*1000 for i in s_10], color="blue", s=100, marker="x",↳
↳label="angehängte Masse: 1kg")
plt.errorbar(d, [i*1000 for i in s_5], xerr=0.0006 , yerr=0.006, fmt="none",↳
↳color="black", capsize=5)
plt.errorbar(d, [i*1000 for i in s_10], xerr=0.0006 , yerr=0.006, fmt="none",↳
↳color="black", capsize=5)

plt.legend(fontsize=12)
plt.grid()
plt.title("Abhängigkeit vom Abstand d", size=20)
plt.xlabel("Abstand d in m")

```

Abb. 28: Python-Code, Seite 9

```

plt.ylabel("Biegepfeil s in mm")
plt.show()

[ ]: #Lineare Regression Abstand
dlog = [np.log10(i) for i in d]
s_5log = [np.log10(i) for i in s_5]
s_10log = [np.log10(i) for i in s_10]

a_Abst5=a_linreg(dlog, s_5log)
a_Abst10=a_linreg(dlog, s_10log)
b_Abst5=b_linreg(dlog, s_5log)
b_Abst10=b_linreg(dlog, s_10log)
s_a_Abst5=s_a_linreg(dlog, s_5log)
s_a_Abst10=s_a_linreg(dlog, s_10log)
s_b_Abst5=s_b_linreg(dlog, s_5log)
s_b_Abst10=s_b_linreg(dlog, s_10log)

[ ]: geradenX = np.linspace(-1,0,5)
geradenY5 = [gerade(x,b_Abst5,a_Abst5) for x in geradenX]
geradenY10 = [gerade(x,b_Abst10,a_Abst10) for x in geradenX]

#Fehlergeraden
geradenY5_1 = [gerade(x,b_Abst5+s_b_Abst5, a_Abst5-s_a_Abst5) for x in geradenX]
geradenY5_2 = [gerade(x,b_Abst5-s_b_Abst5, a_Abst5+s_a_Abst5) for x in geradenX]
geradenY10_1 = [gerade(x,b_Abst10+s_b_Abst10, a_Abst10-s_a_Abst10) for x in
↳geradenX]
geradenY10_2 = [gerade(x,b_Abst10-s_b_Abst10, a_Abst10+s_a_Abst10) for x in
↳geradenX]

plt.subplots(figsize=(16,9))
plt.scatter(dlog, s_5log, color="red", s=100, marker="x", label="angehängte
↳Masse: 0,5kg")
plt.scatter(dlog, s_10log, color="blue", s=100, marker="x", label="angehängte
↳Masse: 1kg")
plt.errorbar(dlog, s_5log, fmt="none", color="black", capsize=5)
plt.errorbar(dlog, s_10log, fmt="none", color="black", capsize=5)

plt.plot(geradenX, geradenY5, color="black", label="Ausgleichsgerade")
plt.plot(geradenX, geradenY5_1, linestyle="dashed", color="grey",
↳label="Fehlergeraden")
plt.plot(geradenX, geradenY5_2, linestyle="dashed", color="grey")

plt.plot(geradenX, geradenY10, color="black")
plt.plot(geradenX, geradenY10_1, linestyle="dashed", color="grey")
plt.plot(geradenX, geradenY10_2, linestyle="dashed", color="grey")

plt.legend(fontsize=12)

```

Abb. 29: Python-Code, Seite 10

```

plt.grid()
plt.xlabel("Abstand log(d) in log(m)")
plt.ylabel("Biegepfeil log(s) in log(m)")
plt.title("Lineare Regression Abstand", size=20)
plt.show()

[ ]: s_Formen=[1.50,3.15,4.04,4.93,3.36,2.29]
s_Formen=[0.001*i for i in s_Formen]
d_innen=[0,0.004,0.0069,0.0080,0,0.00895]
d_aussen=[0.01205,0.0100,0.0100,0.0101,0.00985,0.0120]
r_innen=[0.5*i for i in d_innen]
r_aussen=[0.5*i for i in d_aussen]

A=[np.pi*(i**2-j**2) for i, j in zip(r_aussen, r_innen)]
dA=[np.pi*0.00004*2*np.sqrt(i**2+j**2) for i, j in zip(r_aussen, r_innen)]

EI=[1/48*1*9.808*0.8**3/(i) for i in s_Formen]
dEI=[1/48*1*9.808*np.sqrt((3*0.8**2/i*0.0006)**2+(0.8**3/(i**2)*0.000006)**2)
↳for i in s_Formen]

[ ]: Farbe=['red', 'blue', 'green', 'orange', 'purple', 'cyan']
Legende=['gr. Vollzylinder', 'Hohlzylinder kl. Loch', 'Hohlzylinder mittl.
↳Loch', 'Hohlzylinder gr. Loch', 'kl. Vollzylinder', 'gr. Hohlzylinder']
plt.subplots(figsize=(16,9))
for i in range(0, len(Farbe)):
    plt.scatter(A[i], EI[i], color=Farbe[i], s=300, marker="x",
↳label=Legende[i])
plt.errorbar(A, EI,xerr=dA, yerr=dEI, fmt="none", color="black", capsize=5)

plt.legend(fontsize=12)
plt.grid()
plt.title("Fläche und Biegsteifigkeit", size=20)
plt.xlabel("Fläche in m^2")
plt.ylabel("Biegsteifigkeit in N*m^2")
plt.xlim(0,0.00012)
plt.ylim(0,72)
plt.show()

[ ]: Verhaeltnis=[i/j for i, j in zip(EI,A)]
dVerhaeltnis=[np.sqrt((k/j)**2+(i/(j**2)*1)**2) for i, j, k, l in zip (EI, A,
↳dEI, dA)]

```

Tabellenverzeichnis

1	<i>a</i> - und <i>b</i> -Werte der linearen Regression	5
2	Geometrie der Stäbe	8
3	Elastizitätsmodul	8
4	Biegesteifigkeit von verschiedenen Formen vom Alustab	10
5	Biegesteifigkeit pro Fläche von verschiedenen Formen vom Alustab	11
6	Zusammenstellung der Ergebnisse	12
7	Biegesteifigkeit pro Fläche von verschiedenen Formen vom Alustab	13
8	Vergleich der <i>a</i> -Werte der linearen Regression	13
9	Messreihe Stahl	16
10	Messreihe Messing	16
11	Messreihe Aluminium	17
12	Messreihe Bambus	17
13	Messingstab bei variablem <i>d</i>	18
14	Verschiedene Formen vom Alustab	18
15	Aus geometrischen Eigenschaften berechnete Biegesteifigkeit	18

Abbildungsverzeichnis

1	Versuchsaufbau	2
2	Vergleich der vier Materialien	4
3	Lineare Regression Stahl	5
4	Residuen bei Stahl	6
5	Absolute Unterschiede zwischen den zunehmenden und abnehmenden Werten	7
6	Biegepfeil in Abhängigkeit der Stablänge	9
7	Biegesteifigkeit aufgetragen gegen Fläche bei den Alustäben	10
8	Lineare Regression Messing	19
9	Lineare Regression Aluminium	20
10	Lineare Regression Bambus	21
11	Residuen bei Messing	22
12	Residuen bei Aluminium	23
13	Residuen bei Bambus	24
14	Lineare Regression der Abstandsabhängigkeit bei Messing	25
15	Laborbuch, Seite 1	26
16	Laborbuch, Seite 2	27
17	Laborbuch, Seite 3	28
18	Laborbuch, Seite 4	29
19	Laborbuch, Seite 5	30
20	Python-Code, Seite 1	31
21	Python-Code, Seite 2	32
22	Python-Code, Seite 3	33
23	Python-Code, Seite 4	34
24	Python-Code, Seite 5	35
25	Python-Code, Seite 6	36
26	Python-Code, Seite 7	37
27	Python-Code, Seite 8	38
28	Python-Code, Seite 9	39
29	Python-Code, Seite 10	40
30	Python-Code, Seite 11	41