

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuchs	3
2 Theorie	3
2.1 Herleitung physikalischer Zusammenhänge	3
2.2 Flächenträgheitsmomente	6
3 Durchführung	8
4 Messungen	8
4.1 Stababmessungen	8
4.2 Materialabhängigkeit	9
4.3 Orientierungsabhängigkeit	10
4.4 Längenabhängigkeit	10
4.5 Reproduzierbarkeitsmessung	10
5 Auswertung	10
5.1 Stababmessungen	11
5.2 Materialabhängigkeit	12
5.3 Orientierungsabhängigkeit	14
5.4 Längenabhängigkeit	16
5.5 Reproduzierbarkeitsmessung	16
6 Diskussion	17
6.1 Materialabhängigkeit	17
6.2 Orientierungsabhängigkeit	18
6.3 Längenabhängigkeit	18
6.4 Reproduzierbarkeitsmessung	19
6.5 Übersicht	19
6.6 Fehlerdiskussion	20
I Anhang	22

Tabelle 1 ist eine Übersicht aller in diesem Protokoll benutzten Symbole.

Größensymbol	Bedeutung
ℓ	Länge des Stabs
b	Breite des Stabs
h	Höhe des Stabs
ζ	Abstand zur neutralen Faser
σ	Spannung
I_y	Flächenträgheitsmoment in y -Richtung
M	Drehmoment
s	Elongation der Stabmitte
m	Masse
E	Elastizitätsmodul
g	Erdbeschleunigung
A	Fläche
p_i	Stativpositionen
u_x	Unsicherheit der Größe x

Tabelle 1: Symbole, die in diesem Versuchsprotokoll verwendet werden.

Variablen

↑ gut, aber dann passt mit dem Ziel auf. eher neuere Stufe an

1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch ist das Elastizitätsmodul von Stäben verschiedener Materialien zu bestimmen, indem diese kontrolliert gebogen werden. Insbesondere soll dabei neben der Materialabhängigkeit auch die Abhängigkeit von der Orientierung des Stabes sowie die Abhängigkeit von der Durchbiegungslänge überprüft werden. In einer besonders genauen Messreihe sollte dann auch noch der Hookesche Bereich eines Materials näher ausgemessen werden.

2 Theorie

2.1 Herleitung physikalischer Zusammenhänge

Wirkt auf einen Körper eine Kraft F senkrecht zu seiner Oberfläche A , dehnt sich der Körper in diese Richtung um $\Delta\ell$. Ist die wirkende Kraft nicht zu hoch und liegt im sogenannten Hookeschen Bereich, lässt sich die relative Längenänderung mit dem Elastizitätsmodul E , einer Materialkonstante, berechnen:

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{E} \frac{F}{A} = \frac{\sigma}{E} \quad (1)$$

σ bezeichnet dabei die Zugspannung.

In unserem Versuch betrachten wir die Biegung eines Stabes mit rechteckiger Grundfläche, dessen rechte Hälfte in Abbildung 1 abgebildet ist. Die Koordinate ζ gibt den Abstand von der *neutralen Faser*, einer spannungsfreien Schicht im Stab (siehe Abb.), an. Die Spannung $\sigma(x)$ an einer Stelle x beträgt

$$\sigma(x, \zeta) = \frac{\zeta}{\zeta_0} \sigma_0(x), \quad (2)$$

wobei $\sigma_0 = \sigma(x, \zeta_0)$ und $\zeta_0 = h/2$. Der Belastung von außen, die ein Dreh-

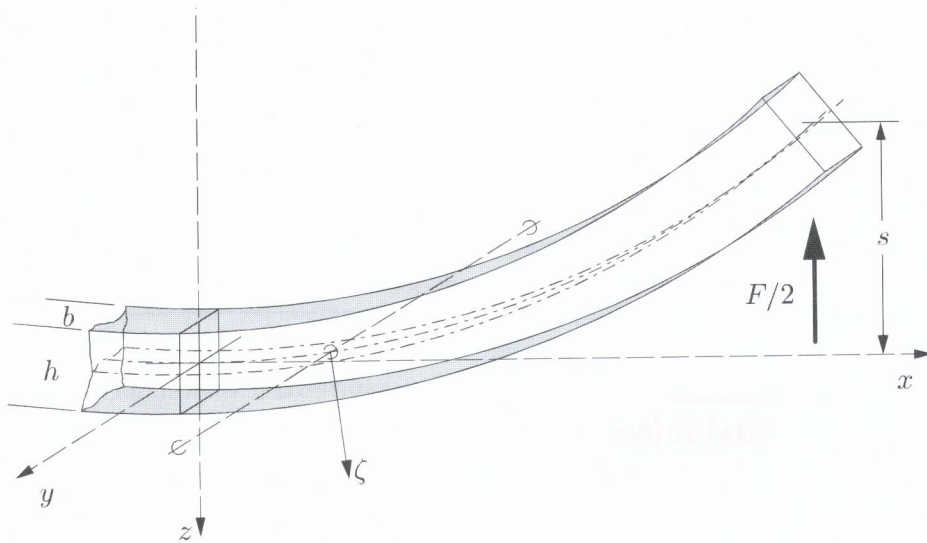


Abbildung 1: Rechte Hälfte eines belasteten Stabes mit rechteckigem Querschnitt *Quelle!*

moment erzeugt, wirken innere Kräfte entgegen, die ebenfalls ein dem Belastungsdrehmoment entgegengesetztes Drehmoment erzeugen:

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_{-\zeta_0}^{\zeta_0} \int_{-y_0}^{y_0} \zeta \cdot \sigma(x, \zeta) dy d\zeta \\ &= \frac{\sigma_0(x)}{\zeta_0} I_y \\ &= \frac{\sigma_0(x)}{\zeta_0} \cdot \frac{bh^3}{12} \end{aligned} \quad (3)$$

I_y ist das Flächenträgheitsmoment des Stabes bezüglich der y -Achse in Abb. 1. Das obige, durch innere Kräfte erzeugtes Drehmoment, kompensiert das Drehmoment, das durch äußere Belastung entsteht. Mit $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ und der durch die Halterung hervorgerufene Kraft $F/2$ gilt für das äußere Drehmoment betragsweise:

$$M(x) = \frac{F}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) \quad (4)$$

unnötig,
gewollt war
nur
Hochziehen
& Biegeversuch
S=...

Quelle! *Quelle!*

Bevor beide Drehmomente gleichgesetzt werden, muss die Spannung des Stabes näher betrachtet werden. Betrachten wir dafür ein kleines Stück verbogenen Stab mit Länge Δx , das in Abbildung 2 dargestellt ist. Oberhalb der neutralen Faser wird Δx kleiner, unterhalb größer. Die relative Längenänderung $\Delta(\Delta x)/\Delta x$ ist dabei gegeben durch Gleichung (1):

$$\frac{\Delta(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\sigma(x, \zeta)}{E} = \frac{1}{E} \frac{\zeta \cdot \sigma_0(x)}{\zeta_0} \quad (5)$$

Die kleine Längenänderung $\Delta(\Delta x)$ können wir in Abhängigkeit der Win-

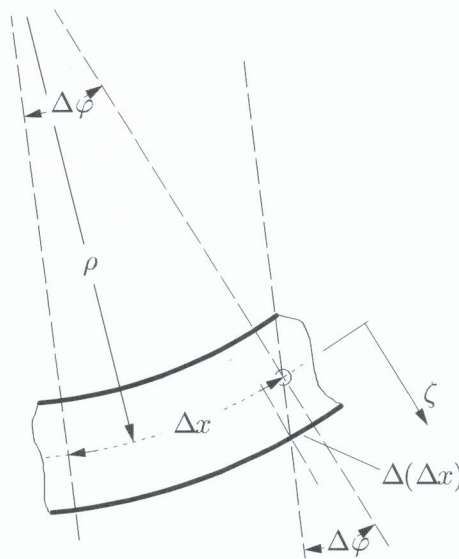


Abbildung 2: Kleiner Ausschnitt Δx des belasteten Stabs.

Quelle?

keländerung $\Delta\varphi$ schreiben, wie es aus der Abbildung ersichtlich ist:

$$\frac{\Delta(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\zeta \cdot \Delta\varphi}{\Delta x} \iff \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{1}{E} \frac{\sigma_0(x)}{\zeta_0} \quad (6)$$

Den Ausdruck $\frac{d\varphi}{dx} = \rho^{-1}$ kennen wir auch als Krümmung, die wir näherungsweise über die zweite Ableitung des Kurvenverlaufs $z(x)$ schreiben können:

$$\frac{1}{E} \frac{\sigma_0(x)}{\zeta_0} = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2 z}{dx^2} \quad (7)$$

Nun sind noch die Drehmomente in Gleichungen (3) und (4) gleichzusetzen

$$\frac{F}{2} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) = \frac{\sigma_0(x) b h^3}{\zeta_0 12}, \quad (8)$$

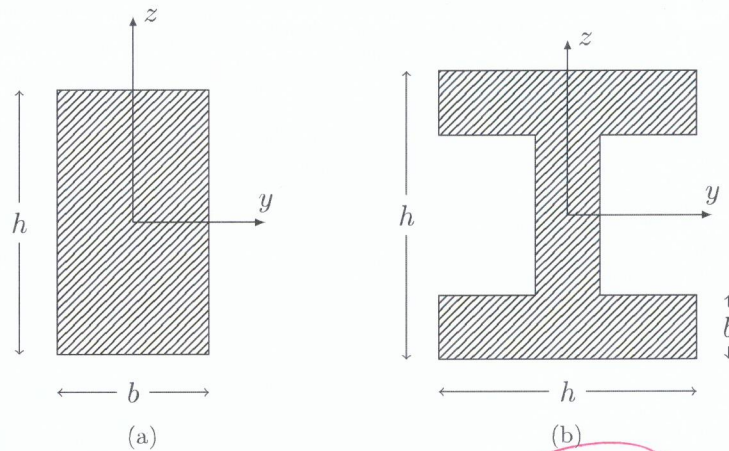


Abbildung 3: (a) Rechteckprofil (b) Doppel-T-Profil

inwiefern ist das für Versuch relevant?

und nach $\sigma_0(x)$ umzustellen und in Gleichung (7) einzusetzen:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{E} \frac{F}{2} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \frac{12}{bh^3} \quad (9)$$

Zweifache Integration und Evaluation an $x = \ell/2$ gibt uns den *Biegungspfeil*, der ein Maß für die Gesamtkrümmung ist:

$$s := z(x = \ell/2) = \frac{1}{E} \frac{\ell^3}{4h^3 b} F \quad (10)$$

In unserer Versuchsdurchführung betrachten wir als belastende Kraft die Gewichtskraft einer Gesamtmasse m , die in die Mitte des Stabes gehängt wird. Mit $F_G = m \cdot g$ wird aus der obigen Gleichung gerade:

$$s(m) = \frac{g\ell^3}{4Eh^3 b} \cdot m. \quad \checkmark \quad (11)$$

2.2 Flächenträgheitsmomente

Als weiterführende Fragen sollten zusätzlich Flächenträgheitsmomente von einem Rechteckprofil der Breite b und Höhe h (siehe Abb. 3a) und eines Doppel-T-Profils berechnet werden. Wir beginnen mit dem Rechteckprofil, indem wir die quadratischen Abstände von der y -Achse aufsummieren, um das Flächenträgheitsmoment in y -Richtung zu erhalten:

$$I_y = \iint_A z^2 dA \quad (12)$$

Mit $dA = dy dz$, wobei $y \in [-b/2, b/2]$, $z \in [-h/2, h/2]$, ergibt sich für das

Integral:

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-h/2}^{h/2} dz z^2 \\
 &= \int_{-b/2}^{b/2} dy \frac{h^3}{12} \\
 &= \frac{bh^3}{12}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Mit $A = bh$ und $\varepsilon = b/h$ ergibt sich:

$$I_y = \frac{1}{12} \frac{A^2}{\varepsilon} \tag{14}$$

Das Flächenträgheitsmoment skaliert somit bei gegebener Querschnittsfläche invers zum Verhältnis $\varepsilon = b/h$.

Nun ist das Flächenträgheitsmoment des Doppel-T-Profiles zu berechnen. Dieses ist in Abbildung 3b abgebildet¹ und kann als Quadrat mit Seitenlänge h betrachtet werden, wobei links und rechts ein rechteckiges Loch mit Seitenlängen $\frac{h-b}{2}$, $h-2b$ fehlen. Um das Flächenträgheitsmoment des gesamten Doppel-T-Profiles zu berechnen, subtrahieren wir vom Trägheitsmoment eines Quadrats der Seitenlänge h das Flächenträgheitsmoment eines Rechtecks mit o. g. Seitenflächen zweimal. Da der Schwerpunkt beider abzuziehenden Rechtecke auf der y -Achse liegen, muss der Satz von Steiner nicht angewandt werden. Es folgt:

$$\begin{aligned}
 I_y &= \frac{h^4}{12} - 2I'_y \\
 &= \frac{h^4}{12} - \frac{1}{12} [(h-b)^3(h-2b)] \\
 &= \frac{1}{12} [5bh^3 - 9b^2h^2 + 7b^3h - 2b^4] \\
 &\stackrel{b \ll h}{\approx} \frac{5bh^3 - 9b^2h^2}{12}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Mit der Gesamtfläche von

$$A = 2bh + (h-2b)b = 2bh + bh - 2b^2 \approx 3bh \tag{16}$$

ergibt sich aus Gleichung (15) mit $\varepsilon = b/h$:

$$I_y = \frac{1}{12} \left[\frac{5b^2h^2}{\varepsilon} - A^2 \right] = A^2 \left[\frac{5}{108\varepsilon} - 1 \right] \tag{17}$$

Auch dieses Flächenträgheitsmoment skaliert mit invers zum Verhältnis ε , jedoch viel stärker.

¹Obwohl die Beschreibung in [2, Seite 28] nicht allzu eindeutig ist, wurde versucht, die Längen korrekt einzuzeichnen.

3 Durchführung

Der Versuchsaufbau bestand aus Stäben verschiedener Materialien (Aluminium, Messing und Stahl), die auf zwei Stativen gelegt werden konnten, wobei darauf zu achten war, dass der Überstand auf beiden Seiten in etwa gleich groß ist. In der Mitte des gerade in der Messung verwendeten Stabs befand sich eine Haltevorrichtung, an die verschiedene Gewichtsstücke gehängt werden konnten. Über der Haltevorrichtung war ein Messinstrument, das die Auslenkung der Stabmitte von einer festgelegten Nulllage in z -Richtung messen konnte. ✓

Insgesamt war der Versuch in fünf Teile unterteilt: Im ersten Teil waren die Abmaße – das heißt, die Breite b und die Höhe h – der Stäbe mit einer Mikrometerschraube an mehreren, von einander äquidistanten Stellen zu bestimmen. Da die betrachtete Länge durch die Position der Stative in jeweiligen Versuchsteil gegeben war, wurde diese nicht gemessen. Dieser Teil der Messung verlief weitgehend ereignislos.

Im zweiten Versuchsteil war die Materialabhängigkeit des Elastizitätsmoduls zu bestimmen: Dafür sollte für alle drei Stäbe die gleiche Länge durch Einstellung der Stative gewählt werden. Daraufhin waren die drei Stäbe mit Gewichtsstücken drei verschiedener Arten, deren Masse noch zu bestimmen war, belastet und die Elongation pro Belastungsschritt notiert. Wurden alle Gewichtsstücke geplant aufgelegt, waren diese schrittweise zu entfernen und die Elongation erneut zu notieren. Alle drei Stäbe sollten möglichst in der gleichen Orientierung auf die Stative gelegt werden.

Eine Variation der Staborientierung war im dritten Versuchsteil durchzuführen: Für eine Länge und ein Material – wir wählten Stahl – sollte eine Belastungsmessreihe in gleicher Weise für zwei verschiedene Orientierungen – horizontal und vertikal – wie oben durchgeführt werden.

Im vierten Versuchsteil sollte die Längenabhängigkeit eines Materials, wofür wir Aluminium wählten, in einer bestimmten Orientierung gemessen werden. Dabei variierten wir die Stativposition auf drei verschiedene Weisen und führten pro Länge die gleiche Messreihe durch.

Schließlich sollte der letzte Versuchsteil für die Reproduzierbarkeit der Ermittlung des Elastizitätsmodul genutzt werden: Dabei sollte ein Material genauer ausgemessen werden und dieselbe Messreihe unter den gleichen Bedingungen wiederholt werden. Als Material wählten wir dabei Aluminium.

1. Seite Versuchsaufbau

4 Messungen

4.1 Stababmessungen

Wir begannen mit der Ausmessung der jeweiligen Stäbe. In Tabelle 2 sind die Messwerte für jeden Stab ausgeführt, wobei der Stab derart orientiert war, dass die Breite b die längere und die Höhe h die kürzere Seite des Stabes

*+ Linearität
Hooke*

beschreibt. Da wir eine Mikrometerschraube verwendeten, die auf zwanzigstel Millimeter feinjustiert werden konnte, wählten wir als Unsicherheit der Breite und der Höhe $u_b = u_h = 0,05$ mm. Schließlich waren noch die Massen

Messung	Aluminium		Stahl		Messing	
	b/mm	h/mm	b/mm	h/mm	b/mm	h/mm
1	9,95	5,99	9,97	5,99	9,95	5,97
2	9,96	5,99	9,96	5,99	9,95	5,97
3	9,96	5,99	9,96	5,99	9,96	5,97
4	9,96	6,02	9,96	5,99	9,96	5,97
5	9,96	5,99	9,98	5,99	9,95	5,96
6	9,97	5,99	9,96	5,99	9,96	5,97
7	9,96	5,98	9,96	5,99	9,95	5,96
8	9,95	5,99	9,96	5,99	9,95	5,96

Tabelle 2: Abmaße der verwendeten Stäbe.

der Gewichtsstücke zu messen. Da es drei Arten von Gewichtsstücken gab, maßen wir nur einen Vertreter jeder Art mit einer Digitalwaage ab. Die kleinen Gewichtsstücke wogen $m_{\text{klein}} = 50$ g, die mittleren wogen $m_{\text{mittel}} = 100$ g und die größeren Gewichtsstücke wogen $m_{\text{groß}} = 200$ g. Als Messunsicherheit wählten wir dabei $u_m = 0,21$ g für alle Gewichtsstücke, da dies in etwa der Hälfte der Variation der Masse entsprach, falls man Vertreter der selben Gewichtsstückart auf die Waage legte.

Warum nimmt ihr die Hälfte? & nicht Variation selbst?

4.2 Materialabhängigkeit

Zur Bestimmung der Materialabhängigkeit verifizierten wir zunächst, dass sich das Stabmittenelongationsmessgerät in der Mitte, d.h. bei $p = 50,0$ cm der unten angebrachten Stativskala befand. Dann wählten wir für die Stative die Positionen $p_2 = 80,0$ cm für das rechte und $p_1 = 20,0$ cm für das linke Stativ. Obwohl die Skala in Millimeter unterteilt war, wählten wir als Unsicherheit $u_p = 1$ mm. Dies sollte der nicht ganz perfekt geraden Lage des Stabes auf den Stativmitten entgegenwirken². Die Stäbe wurden in horizontaler Orientierung auf die Stative gelegt und dann belastet. Da uns sechs Messpunkte als dürftig für eine genaue Bestimmung des Elastizitätsmoduls erschienen, maßen wir für jedes Material bis ca. $s \approx 3$ mm mit verschiedenen Gewichten. Die Messungen sind in Tabellen 3 bis 5, die im Anhang auffindbar sind, aufgeführt. ✓

Wie die Unsicherheiten der Massen in den o. g. u. ff. Tabellen zustande kamen, wird in der Auswertung diskutiert.

²Im Grunde genommen ist 1 mm sogar sehr großzügig betrachtet, da nach Pythagoras eine Abweichung von $\sqrt{(60,1 \text{ cm})^2 - (60,0 \text{ cm})^2} = 3,47$ cm orthogonal zur Messschiene immer noch im 1σ -Vertrauensbereich liegen würde.

4.3 Orientierungsabhängigkeit

Für die Messung der Orientierungsabhängigkeit des Elastizitätsmoduls wählten wir Stahl, da sich aufgrund des relativ hohen Literaturwerts [2] für das Elastizitätsmodul eine Orientierungsänderung nach Gleichung (11) am stärksten bemerkbar machen würde. Erneut fügten wir dabei Gewichte hinzu, bis bei der horizontalen Elongation 3 mm überschritten waren und führten die gleiche Messreihe für den vertikalen Stab durch, um möglichst vergleichbare Werte zu erhalten. Als Stativpositionen wählten wir $p_2 = 85,0$ cm, bzw. $p_1 = 15,0$ cm. Die Elongationen sind in Tabelle 6 im Anhang gegeben.

4.4 Längenabhängigkeit

Da der Literaturwert [2] des Elastizitätsmoduls von Aluminium am geringsten war, dachten wir uns, dass sich eine Veränderung der Länge nach Gleichung (11) stark bemerkbar machen sollte. Dafür maßen wir die Elongation für drei verschiedene Stativpositionen:

1. $p_2 = 90,0$ cm und $p_1 = 10,0$ cm
2. $p_2 = 85,0$ cm und $p_1 = 15,0$ cm
3. $p_2 = 80,0$ cm und $p_1 = 20,0$ cm

Die Elongationsmessungen sind in Tabelle 7 angegeben.

4.5 Reproduzierbarkeitsmessung

Als letztes Material wählten wir erneut Aluminium, da sich wegen des geringen Literaturwerts für das Elastizitätsmodul eine Materialhysteresis am deutlichsten bemerkbar machen sollte. In möglichst kleinen Messintervallen belasteten wir den Aluminiumstab bis über $s = 3$ mm hinaus, da uns danach die kleinen Gewichte ausgingen. Diese Messung wiederholten wir schließlich einmal. Die Ergebnisse sind in Tabelle 9 aufgeführt.

5 Auswertung

Im Folgenden wird aus jedem Versuchsteil (außer bei der Messung der Stababmaße) das Elastizitätsmodul E entgegen der Versuchsanleitung, die nur eine analytische Auswertung fordert, mittels linearer Regression bestimmt. Die Gründe dafür liegen zum einen in der von uns als gering eingeschätzten Aussagekraft graphisch ausgewerteter Messdaten, die anfällig gegenüber subjektiver Wahrnehmung sind. Zum anderen ist ein Vergleich zweier graphisch ausgewerteter Datensätze aus ebendiesen Gründen zumindest schwierig. Schließlich ist der Vorschlag der Anleitung, die Unsicherheiten der einen

geforderten analytischen Auswertung auf alle anderen graphischen Auswertungen zu übertragen, im besten Falle unwissenschaftlich und im schlimmsten Fall nichtssagend.

Zusätzlich ist die Durchführung einer linearen Regression mit einem Python-Programm, das im Anhang (siehe Abb. 10) aufgeführt ist, nicht sonderlich aufwändiger als eine graphische, manuelle Auswertung.

Bevor zur Auswertung der individuellen Messreihen übergegangen wird, sind noch die Unsicherheiten in der Masse zu diskutieren. Da jedes Massestück m_i , das schrittweise auf die Halterung gelegt wird, mit der Unsicherheit $u_{m_i} =: u_m$ belastet ist, summiert sich die Unsicherheit $u_{m_{\text{ges}}}$ der Gesamtmasse $m_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n m_i$ nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz auf:

$$u_{m_{\text{ges}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_{m_i})^2} = \sqrt{n} \cdot u_m \quad (18)$$

Diese Unsicherheiten sind in Tabellen 3 bis 9 bereits berechnet worden.

Zusätzlich muss noch die Rolle beider Messungen (Hin s_1 und Zurück s_2) geklärt werden. Damit wir einen Wert erhalten, bedienen wir uns dem arithmetischen Mittelwert beider Größen und definieren:

$$s := \bar{s}_i = \frac{s_1 + s_2}{2} \quad (19)$$

Die Unsicherheit der Größe s lässt sich ebenfalls mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnen. Dafür gehen wir von der Unsicherheit der Einzelelongationen $u_{s_1} = u_{s_2} = 0,05$ mm aus:

$$u_s = \sqrt{\left(\frac{u_{s_1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_{s_2}}{2}\right)^2} = 0,04 \text{ mm} \quad (20)$$

Im Folgenden werden wir hauptsächlich mit s statt s_i rechnen. In Tabellen 3 bis 6 und 9 wurden die Mittelwerte bereits respektive berechnet (je nach Messreihe auch evtl. indiziert); die Mittelwerte von Tabelle 7 wurden aus Platzgründen in Tabelle 8 verschoben.

5.1 Stababmessungen

Damit mit den Abmessungen in Tabelle 2 gerechnet werden kann, muss zunächst der Mittelwert berechnet werden:

$$b := \bar{b}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \quad (21)$$

$$h := \bar{h}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i$$

Aus Tabelle 2 ergeben sich daraus folgende Bestwerte:

$$\begin{aligned}
 b_{Al} &= 9,96 \text{ mm} \\
 h_{Al} &= 5,99 \text{ mm} \\
 b_{St} &= 9,96 \text{ mm} \\
 h_{St} &= 5,99 \text{ mm} \\
 b_{Me} &= 9,95 \text{ mm} \\
 h_{Me} &= 5,97 \text{ mm}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Da die Fehler aller Werte gleich sind, berechnet sich die Unsicherheit des Mittelwerts folgendermaßen nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung: *sofern ihr nur die Ablesunsicherheit berücksichtigt, ja!*

$$\begin{aligned}
 u_b &= \sqrt{\sum_{i=1}^8 \left(\frac{u_{b_i}}{n}\right)^2} \\
 &= 1,77 \cdot 10^{-2} \text{ mm}
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Da die Höhe h mit derselben Mikrometerschraube und denselben Messunsicherheiten gemessen wurde, ist die Unsicherheit der Höhe identisch mit der Unsicherheit der Breite: $u_h = 1,77 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$.

5.2 Materialabhängigkeit

Zunächst sind die Elongationen s in Abhängigkeit von der Masse m aus Tabellen 3 bis 5 in ein Diagramm einzutragen (siehe Abb. 4). Denkt man sich eine ungefähre Gerade durch die Messpunkte von Stahl, fällt sofort aus, dass die letzten beiden Messwerte weit von der Geraden entfernt sind und unsere Regression stören könnten. Da diese evtl. im Hookeschen Bereich liegen könnten, wäre es problematisch, sie bei der linearen Regression nicht zu berücksichtigen, weshalb wir sie aus dem Datensatz für die Regression entfernen. Fügen wir im Python-Programm in Abbildung 10 die Daten als Tupelliste in `data` ein, erhalten wir folgende Ausgleichsgeraden, die auch in Abb. 4 eingezeichnet sind:

$$\begin{aligned}
 s_{Al}(m) &= (0,00376 \pm 0,00005) \frac{\text{mm}}{\text{g}} \cdot m + (0,0102 \pm 0,0020) \text{ mm} \\
 s_{St}(m) &= (0,00124 \pm 0,00002) \frac{\text{mm}}{\text{g}} \cdot m + (0,0259 \pm 0,0020) \text{ mm} \\
 s_{Me}(m) &= (0,00276 \pm 0,00003) \frac{\text{mm}}{\text{g}} \cdot m + (0,0301 \pm 0,0021) \text{ mm}
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Natürlich kann an dieser Stelle kritisiert werden, dass der Fehler in m -Richtung bei der Regression nicht beachtet wird. Wie man aber an den in Abb. 4 eingezeichneten Fehlerbalken sieht, ist dieser im Vergleich zur Unsicherheit u_s guten Gewissens zu vernachlässigen.

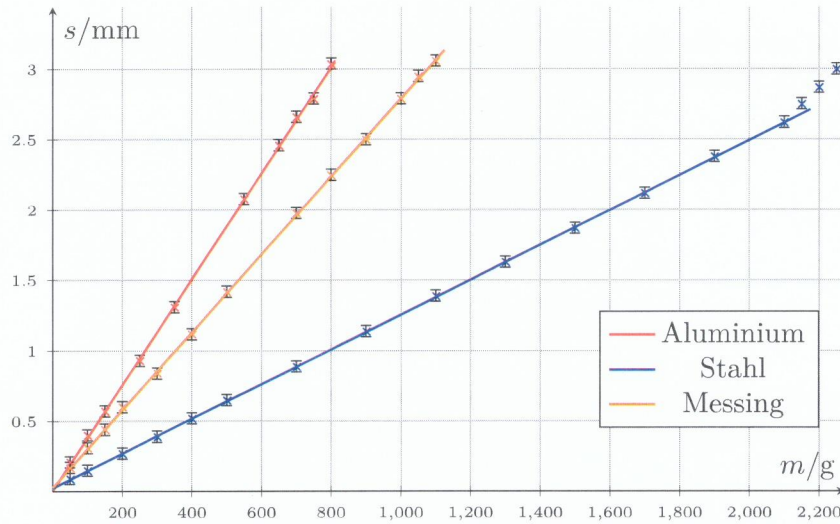


Abbildung 4: Materialabhängigkeit – Elongationen s in Abhängigkeit von der Masse m . In beide Richtungen sind Fehlerbalken eingezeichnet.
aus Messunsicherheit σ_a .

Die Ausgleichsgeraden in Gleichung (24) haben die Form $s(m) = a \cdot m + c$. Wir können nun a gleichsetzen mit dem Vorfaktor

$$\frac{g\ell^3}{4Eh^3b} = a \quad \checkmark \quad (25)$$

aus Gleichung (11). Der s -Achsenabschnitt ist dabei geringer als die Unsicherheit in s -Richtung und zugunsten unseres Modells ebenfalls vernachlässigbar. Gleichung (25) kann nun nach E umgestellt werden, sodass das Elastizitätsmodul der drei Stäbe berechnet werden kann:

$$E = \frac{g\ell^3}{4h^3ba} \quad \checkmark \quad (26)$$

Zunächst ist jedoch noch die Stablänge ℓ zu bestimmen. Dafür bilden wir die Differenz beider Stativpositionen p_1, p_2 :

$$\begin{aligned} \ell &= p_2 - p_1 \\ &= 60,0 \text{ cm} \end{aligned} \quad (27)$$

Die Unsicherheit dieser Größe lässt sich aus den Einzelunsicherheiten der Stativpositionen $u_p = 1 \text{ mm}$ gemäß Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnen:

$$\begin{aligned} u_\ell &= \sqrt{2}u_p \\ &= 1,41 \text{ mm} \end{aligned} \quad \checkmark \quad (28)$$

Nun ist noch für die Erdbeschleunigung g der Literaturwert [1] von $g = 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ nachzuschlagen. Für die Bestwerte der Elastizitätsmoduln folgt dann:

$$\begin{aligned} E_{\text{Al}} &= 6,582 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ E_{\text{St}} &= 2,003 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ E_{\text{Me}} &= 9,050 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned} \quad (29)$$

Nun sind noch die Unsicherheiten dieser Werte nach dem vereinfachten Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz zu berechnen:

$$u_E = E \cdot \sqrt{\left(3 \frac{u_\ell}{\ell}\right)^2 + \left(3 \frac{u_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{u_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{u_a}{a}\right)^2} \quad (30)$$

Dies ist für jedes Material zu berechnen. Als Ergebnis dieser Messreihe erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} E_{\text{Al}} &= (6,582 \pm 0,116) \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ E_{\text{St}} &= (2,003 \pm 0,039) \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ E_{\text{Me}} &= (9,050 \pm 0,316) \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned} \quad (31)$$

*Einkreisen bevor
so wählen, dass Vergleich
einfach fällt*

kurzer Kommentar: entspricht Erwartung, o.ä.

5.3 Orientierungsabhängigkeit

In unserer Messung haben wir den Elongations-Masse-Verlauf für einen Stahlstab in horizontaler und vertikaler Orientierung gemessen. Sei nun $s_h(m)$ der horizontale, $s_v(m)$ der vertikale Massenverlauf. Beide Verläufe folgen idealerweise einem linearen Verlauf:

$$s_h(m) = a_h \cdot m = \frac{g\ell^3}{4Eh^3b} \cdot m, \quad \text{bzw.} \quad s_v(m) = a_v \cdot m = \frac{g\ell^3}{4Eb^3h} \cdot m \quad (32)$$

Dividieren wir nun beide Geradensteigungen a_i durcheinander, erhalten wir:

$$\frac{a_h}{a_v} = \frac{b^2}{h^2} \quad (33)$$

Die Einfachheit des Terms rührt daher, dass die meisten Größen (g , E , ℓ und 4) für das gleiche Material und den gleichen Versuchsaufbau (bis auf Orientierung) natürlich konstant sind. Wir müssen nun unsere beiden Elongationsverläufe aus Tabelle 6 in Abhängigkeit von der Masse in ein Diagramm (siehe Abb. 5) übertragen und eine lineare Regression wie gewohnt durchführen. Die Ausgleichsgeraden lauten dabei:

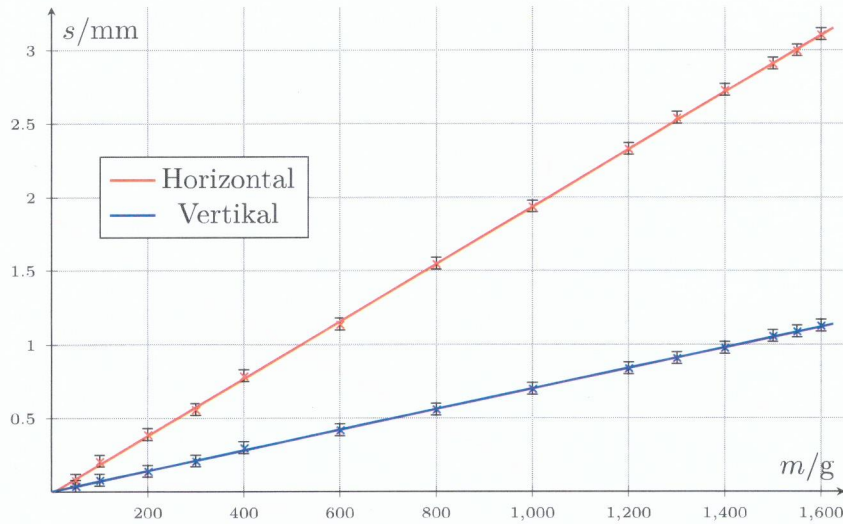


Abbildung 5: Orientierungsabhängigkeit – Elongationen s in Abhängigkeit von der Masse m . In beide Richtungen sind Fehlerbalken eingezeichnet.

$$s_h(m) = (0,001\,95 \pm 0,000\,02) \frac{\text{mm}}{\text{g}} \cdot m - (0,005\,62 \pm 0,001\,90) \text{ mm}$$

$$s_v(m) = (0,000\,70 \pm 0,000\,02) \frac{\text{mm}}{\text{g}} \cdot m + (0,004\,97 \pm 0,001\,90) \text{ mm} \quad (34)$$

Nun können die Geradensteigungen durcheinander dividiert werden. Der Bestwert des Bruches lautet:

$$\frac{a_h}{a_v} = 2,784 =: \xi_1 \quad (35)$$

Die Unsicherheit lässt sich leicht mit dem vereinfachten Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnen:

$$u_{\xi_1} = \xi_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{u_{a_v}}{a_v}\right)^2 + \left(\frac{u_{a_h}}{a_h}\right)^2} \quad (36)$$

$$= 8,142 \cdot 10^{-2} \quad (37)$$

Dieser Wert ist mit dem theoretisch „vorhergesagten“ Wert $\xi_2 =: \frac{b^2}{h^2}$ zu vergleichen. Dieser lautet:

$$\xi_2 = 2,765 \quad (38)$$

Die Unsicherheit desselben lässt sich ebenfalls mit dem vereinfachten Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnen:

$$u_{\xi_2} = \xi_2 \cdot \sqrt{\left(2\frac{u_b}{b}\right)^2 + \left(2\frac{u_h}{h}\right)^2} \quad (39)$$

$$= 1,90 \cdot 10^{-2}$$

Die Diskussion beider Werte erfolgt in Abschnitt 6.

5.4 Längenabhängigkeit

Um die Abhängigkeit von der Länge zu untersuchen, tragen wir die Messdaten aus Tabelle 8 für verschiedene Längen ℓ_i des Aluminiumstabs in ein Diagramm ein (siehe Abb. 6). Wie üblich ist mit Python eine lineare Re-

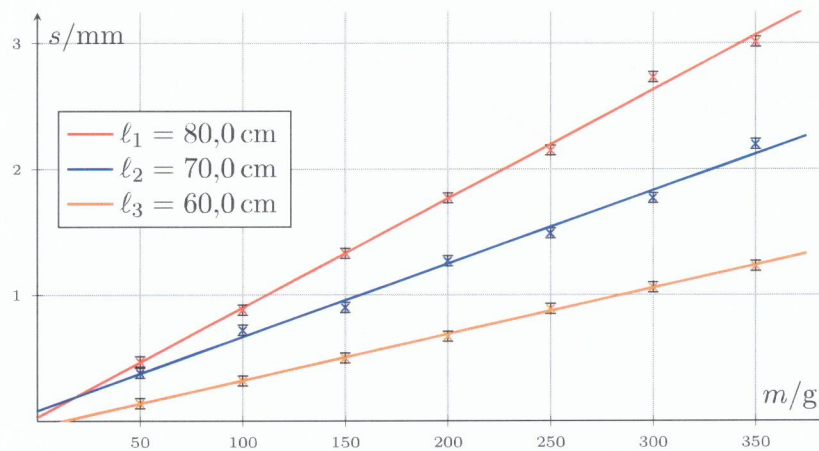


Abbildung 6: Längenabhängigkeit – Elongationen s in Abhängigkeit von der Masse m . In beide Richtungen sind Fehlerbalken eingezeichnet.

gression durchzuführen; die Ergebnisse sind:

$$\begin{aligned}
 s_{\ell_1}(m) &= (0,008\,67 \pm 0,000\,15) \frac{\text{mm}}{\text{g}} \cdot m + (0,0286 \pm 0,0338) \text{ mm} \\
 s_{\ell_2}(m) &= (0,005\,82 \pm 0,000\,15) \frac{\text{mm}}{\text{g}} \cdot m + (0,0829 \pm 0,0338) \text{ mm} \\
 s_{\ell_3}(m) &= (0,003\,67 \pm 0,000\,15) \frac{\text{mm}}{\text{g}} \cdot m - (0,0471 \pm 0,0338) \text{ mm}
 \end{aligned} \quad (40)$$

nein, analog
zu S. 3!

Analog zu Abschnitt 5.2 ist nun für jede Länge das Elastizitätsmodul mit- samt Fehler zu berechnen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 E_{\ell_1} &= (6,762 \pm 0,138) \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\
 E_{\ell_2} &= (6,748 \pm 0,190) \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\
 E_{\ell_3} &= (6,738 \pm 0,288) \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}
 \end{aligned} \quad (41)$$

5.5 Reproduzierbarkeitsmessung

Die Messungen aus Tabelle 9 sind auch hier in ein Diagramm (siehe Abb. 7) einzutragen und eine lineare Regression durchzuführen. Aus der Regression er-

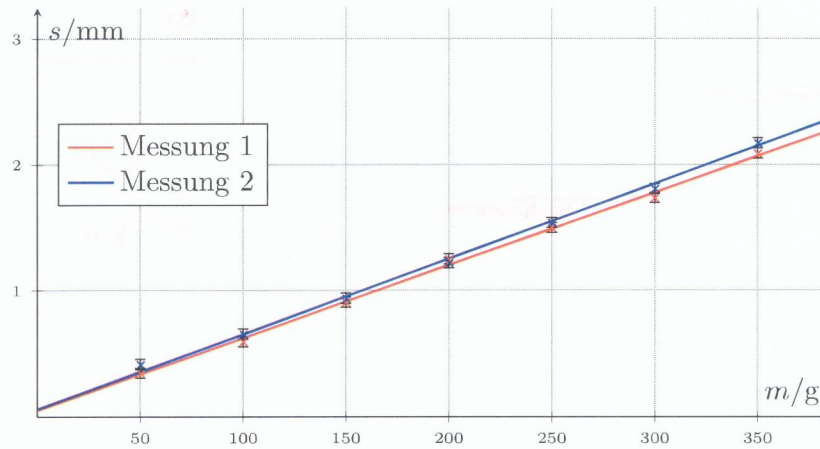


Abbildung 7: Reproduzierbarkeitsmessung – Elongationen s in Abhängigkeit von der Masse m . In beide Richtungen sind Fehlerbalken eingezeichnet.

halten wir:

$$s_{M1}(m) = (0,005\,77 \pm 0,000\,08) \frac{\text{mm}}{\text{g}} \cdot m + (0,0509 \pm 0,0258) \text{ mm} \quad (42)$$

$$s_{M2}(m) = (0,005\,97 \pm 0,000\,08) \frac{\text{mm}}{\text{g}} \cdot m + (0,0640 \pm 0,0258) \text{ mm}$$

Erneut lassen sich daraus Elastizitätsmodule mit den Abmaßen von Aluminium und den Abständen der Stative ($p_2 - p_1 = 70,0 \text{ cm}$) analog zu Abschnitt 5.2 berechnen:

$$E_{M1} = (6,805 \pm 0,116) \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (43)$$

$$E_{M2} = (6,585 \pm 0,110) \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

6 Diskussion

6.1 Materialabhängigkeit

Zunächst vergleichen wir die von uns ermittelten Werte mit den angegebenen Literaturwerten [2] der Elastizitätsmodule. Für Stahl maßen wir *bestimmten*

$$E_{\text{St}} = (2,003 \pm 0,039) \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad (44)$$

was relativ mittig im angegebenen Bereich des Literaturwerts von Stahl von $195 \cdot 10^3 \text{ N mm}^{-2}$ bis $210 \cdot 10^3 \text{ N mm}^{-2}$ liegt. Nicht ganz so mittig maßen wir

$$E_{\text{Me}} = (9,050 \pm 0,316) \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad (45)$$

welches noch knapp im möglichen Wertebereich von $95 \cdot 10^3 \text{ N mm}^{-2}$ bis $95 \cdot 10^3 \text{ N mm}^{-2}$ liegt und damit ebenfalls plausibel ist. Interessanter wird es bei Aluminium: Der im Theoriekonvolut angegebene Literaturwert des Elastizitätsmoduls von Aluminium liegt im Bereich von $69 \cdot 10^3 \text{ N mm}^{-2}$ bis $72,5 \cdot 10^3 \text{ N mm}^{-2}$. Wir maßen für Aluminium einen Wert von bestimmen

$$E_{\text{Al}} = (6,582 \pm 0,116) \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (46)$$

Die unterste Grenze des angegebenen Literaturwerts liegt gut außerhalb des 2σ -Vertrauensintervalls, das durch unsere Unsicherheit bestimmbar ist. Da die Elastizitätsmoduln der beiden anderen Materialien unter den exakt gleichen Bedingungen (bis auf Belastung) in der gleichen Messreihe gemessen wurden, ist der Fehler vermutlich nicht statistischer Natur: Die Abweichung kann durch die unterschiedliche Materialzusammensetzung von Aluminiumstäben verschiedener Hersteller erklärt werden, sodass ein Literaturwert als solcher schwierig zu bestimmen ist. ✓

6.2 Orientierungsabhängigkeit

Vergleichen wir den Wert ξ_1 , der sich aus der Division beider Geradensteigungen berechnet hat, mit dem Wert ξ_2 , der über Breite und Höhe der Querschnittsfläche des Stabs berechnet wurde, bemerkt man eine gute Übereinstimmung:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 2,784 \pm 0,081 \\ \xi_2 &= 2,765 \pm 0,019 \end{aligned} \quad (47)$$

Die von der Theorie vorhergesagte Gleichheit $\xi_1 = \xi_2$ ist trotz der relativ geringen Unsicherheit bestätigt, da beide Werte im 1σ -Bereich des jeweils anderen Wertes liegen. Die Proportionalität des Elastizitätsmodul von $E \propto h^{-3}b^{-1}$ wurde damit empirisch verifiziert. ✓

6.3 Längenabhängigkeit

Auch die Abhängigkeit von der Länge ℓ des Stabes scheint sich bestätigt zu haben. Wie man in Gleichung (41) gut sehen kann, liegen alle berechneten Elastizitätsmodula, die auf Messungen verschiedener Länge ℓ basieren, im 1σ -Vertrauensbereich der anderen. Interessanterweise liegt der vorhin gemessene Wert für Aluminium in Gleichung (46) nicht bei allen Messwerten im 1σ -Konfidenzintervall, obwohl der gleiche Stab verwendet wurde. Dies kann mehrere Gründe haben: Zum einen ist der s -Achsenabschnitt der Regression bei der Längenabhängigkeit relativ hoch, obwohl dieser idealerweise 0 sein sollte. Da bei dieser Messung weniger Datenpunkte erfasst wurden als bei der Messung der Materialabhängigkeit, halten wir die hier aufgenommenen Werte für weniger aussagekräftig als die Werte bei der Materialabhängigkeit. ✓

Die Kurve in Abb. 6 verläuft auch bei weitem nicht durch alle Fehlerbalken der Messpunkte, wie dies z. B. in Abb. 6 der Fall ist. Möglicherweise wurde die Messung im Rahmen eines groben Fehlers unsauber durchgeführt.

6.4 Reproduzierbarkeitsmessung

Die Ergebnisse der Reproduzierbarkeitsmessung suggerieren ein weiteres Fehlerpotential: Beide errechneten Werte für das Elastizitätsmodul stimmen lediglich im $> 2\sigma$ -Intervall miteinander ein. Damit wären aufeinanderfolgende Messungen mit dem gleichen Stab mit einem großen systematischen Fehler belastet.

Da bei diesem Versuchsteil auch die lineare Regression durch die meisten Fehlerbalken verläuft, ist ein linearer Zusammenhang, der im Hooke'schen Bereich erwartet ist, empirisch hinterlegt worden. Es sei auch hier angemerkt, dass der s -Achsenabschnitt relativ hoch ist, was ein Hinweis auf einen systematischen Fehler ist, da alle Messwerte gleichsam verschoben sind.

6.5 Übersicht

Abschließend soll noch eine Übersicht der Nachgiebigkeiten $\frac{ds}{dm}$ gegeben werden. Bei unserem Vorgehen entspricht dies der Geradensteigung a_i . Die Nachgiebigkeiten sind nach Messreihe in Abb. 8 auffindbar.

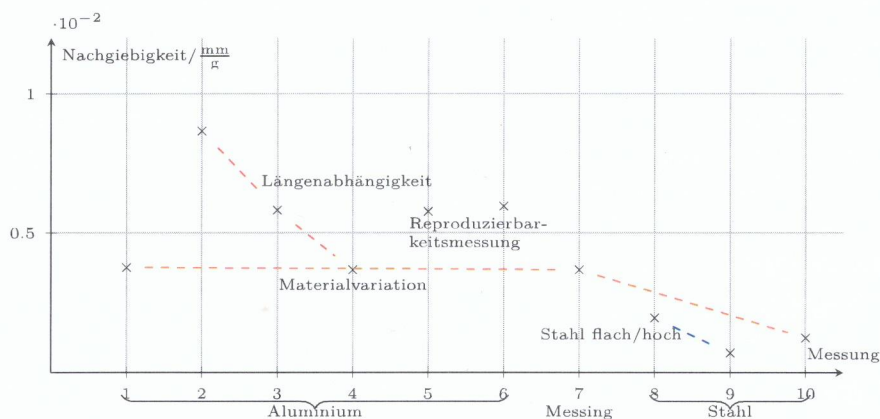


Abbildung 8: Nachgiebigkeiten nach Messreihe/Stoff

Zusätzlich sind nochmal alle Elastizitätsmoduln in Abb. 9 zusammengefasst. An beiden Graphiken sind mehrere Dinge zu beobachten: Zum einen wäre eine kleine Variation seitens der Materialien möglicherweise aussagekräftiger als sechs Werte für Aluminium und ein Wert für je Stahl und Messing. Zum anderen sind bezüglich des Literaturwertbereichs alle Messwerte ein wenig nach unten verschoben – deutlich wird dies besonders bei Aluminium –, was

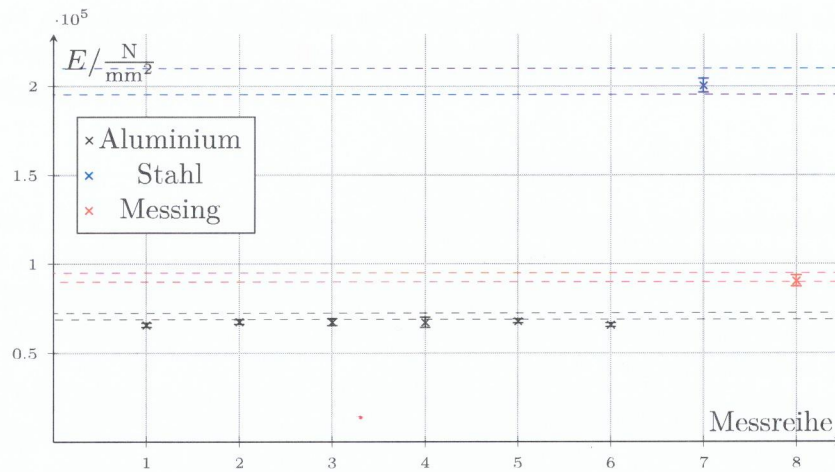


Abbildung 9: Übersicht über die Elastizitätsmoduln. Die gestrichelten Linien geben die Bereiche der angegebenen Literaturwerte an.

auf eine nicht-ideale Zusammensetzung der von uns benutzten Stäbe (oder allgemeiner: einen systematischen Fehler im Versuchsaufbau) hindeutet.

6.6 Fehlerdiskussion

Es wurden in diesem Abschnitt bereits viele Ursachen möglicher Fehler gefunden. Noch hinzuzufügen ist die Zugkraft des Stabes und der Halterung, die nach theoretischer Vorhersage im Hookeschen Bereich eigentlich keine Rolle spielt. Trotzdem ist es nicht hinderlich, diese Zugkraft zu quantifizieren. Die Druckkraft der Feder ist als 50 g bis 100 g angegeben. Die Gewichtskraft des Stabes ist zwar maßgebend für die Zugkraft, geht allerdings nicht vollständig ein, da von der Halterung ein großer Betrag übernommen wird. Für Stahl beträgt die Dichte $\rho_{\text{St}} \approx 8,4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, was mit dem Maximalvolumen des Stabes von $V_{\text{max}} = b \cdot h \cdot \ell_{\text{max}} \approx 47,73 \text{ cm}^3$ eine Maximalkraft von

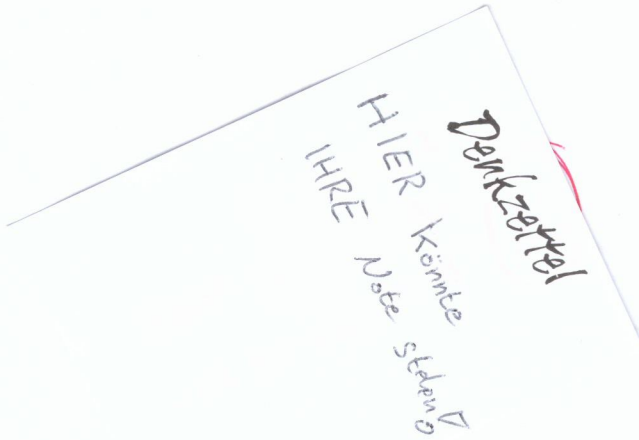
$$F_{G,\text{max}} = (\rho_{\text{St}} V_{\text{max}} + m_{\text{Feder}})g \approx 5 \text{ N} \quad (48)$$

ausmacht. Dabei wurde die volle Gewichtskraft verwendet, was selbstverständlich nicht der Fall ist. Da im Rahmen dieses Praktikums die tatsächliche Kraft schwer zu bestimmen ist, lassen wir das obige Ergebnis als Maximalkraft stehen.

Allgemein kann man sagen, dass in diesem Versuch als Fehlerpotential die systematischen Unsicherheiten (Beschaffung des Materials, Reinheit, etc.) im Vergleich zu den statistischen Unsicherheiten deutlich überwiegen, da alle Längen mehrmals sehr genau gemessen wurden. Einzig die Gewichte wurden nicht einzeln gemessen (sondern nur die drei Arten von Gewichts-

stücken), was durchaus einige Anomalien in den Messungen erklären kann³. Eventuell wurde diesbezüglich auch der statistische Fehler von uns unterschätzt. ✓

Wäre der Versuch ein weiteres Mal durchzuführen, würden wir die Gewichte einzeln messen sowie die Materialauswahl weiter variieren, sodass man besser erkennen kann, ob ein systematischer Fehler eher von einem Stab eines bestimmten Materials oder vom Versuchsaufbau selber stammt.



³Siehe dazu bspw. Abb. 7, bei der ein Massenunterschied einzelne Messpunktabweichungen erklären kann

I Anhang

$(m \pm u_m)/g$	s_1/mm	s_2/mm	s/mm
50,00 ± 0,21	0,23	0,19	0,21
100,00 ± 0,30	0,43	0,36	0,40
150,00 ± 0,36	0,62	0,53	0,57
250,00 ± 0,42	0,95	0,90	0,93
350,00 ± 0,47	1,34	1,27	1,31
550,00 ± 0,51	2,12	2,05	2,08
650,00 ± 0,56	2,48	2,45	2,46
700,00 ± 0,59	2,67	2,65	2,66
750,00 ± 0,63	2,79	2,79	2,79
800,00 ± 0,66	3,05	3,03	3,04

Tabelle 3: Materialvariation – Messdaten von Aluminium

$(m \pm u_m)/g$	s_1/mm	s_2/mm	s/mm
50,00 ± 0,21	0,10	0,07	0,09
100,00 ± 0,30	0,16	0,14	0,15
200,00 ± 0,36	0,26	0,27	0,27
300,00 ± 0,42	0,39	0,38	0,39
400,00 ± 0,47	0,52	0,51	0,52
500,00 ± 0,51	0,66	0,63	0,65
700,00 ± 0,56	0,89	0,88	0,89
900,00 ± 0,59	1,15	1,12	1,14
1100,00 ± 0,63	1,40	1,37	1,39
1300,00 ± 0,66	1,63	1,63	1,63
1500,00 ± 0,70	1,87	1,87	1,87
1700,00 ± 0,73	2,11	2,13	2,12
1900,00 ± 0,76	2,39	2,38	2,38
2100,00 ± 0,79	2,61	2,64	2,62
2150,00 ± 0,81	2,76	2,74	2,75
2200,00 ± 0,84	2,86	2,87	2,87
2250,00 ± 0,87	3,00	3,00	3,00

Tabelle 4: Materialvariation – Messdaten von Stahl

$(m \pm u_m)/g$	s_1/mm	s_2/mm	s/mm
50,00 ± 0,21	0,20	0,15	0,17
100,00 ± 0,30	0,33	0,29	0,31
150,00 ± 0,36	0,48	0,41	0,44
200,00 ± 0,42	0,63	0,58	0,60
300,00 ± 0,47	0,84	0,84	0,84
400,00 ± 0,51	1,14	1,11	1,12
500,00 ± 0,56	1,44	1,39	1,42
700,00 ± 0,59	2,00	1,97	1,98
800,00 ± 0,63	2,28	2,23	2,25
900,00 ± 0,66	2,49	2,52	2,50
1000,00 ± 0,70	2,79	2,79	2,79
1050,00 ± 0,73	2,97	2,93	2,95
1100,00 ± 0,76	3,06	3,07	3,06

Tabelle 5: Materialvariation – Messdaten von Messing

$(m \pm u_m)/g$	Horizontal \square^b_h			Vertikal \square^b_h		
	s_1/mm	s_2/mm	s_h/mm	s_3/mm	s_4/mm	s_v/mm
50,00 ± 0,21	0,09	0,07	0,08	0,04	0,04	0,04
100,00 ± 0,30	0,19	0,23	0,21	0,08	0,07	0,08
200,00 ± 0,36	0,39	0,38	0,39	0,15	0,13	0,14
300,00 ± 0,42	0,57	0,55	0,56	0,22	0,20	0,21
400,00 ± 0,47	0,81	0,76	0,79	0,29	0,32	0,30
600,00 ± 0,51	1,13	1,15	1,14	0,42	0,42	0,42
800,00 ± 0,56	1,56	1,54	1,55	0,56	0,56	0,56
1000,00 ± 0,59	1,94	1,93	1,94	0,71	0,70	0,70
1200,00 ± 0,63	2,34	2,32	2,33	0,85	0,84	0,84
1300,00 ± 0,66	2,55	2,53	2,54	0,92	0,90	0,91
1400,00 ± 0,70	2,75	2,71	2,73	0,98	0,99	0,98
1500,00 ± 0,73	2,89	2,92	2,91	1,05	1,06	1,06
1550,00 ± 0,76	2,98	3,01	3,00	1,09	1,09	1,09
1600,00 ± 0,79	3,11	3,11	3,11	1,13	1,13	1,13

Tabelle 6: Orientierungsvariation – Stahl

$(m \pm u_m)/g$	$\ell_1 = 80\text{ cm}$		$\ell_2 = 70\text{ cm}$		$\ell_2 = 60\text{ cm}$	
	s_1/mm	s_2/mm	s_1/mm	s_2/mm	s_1/mm	s_2/mm
50,00 ± 0,21	0,55	0,38	0,43	0,32	0,13	0,14
100,00 ± 0,30	0,91	0,84	0,78	0,65	0,37	0,27
150,00 ± 0,36	1,42	1,24	0,88	0,92	0,51	0,49
200,00 ± 0,42	1,88	1,67	1,31	1,24	0,69	0,65
250,00 ± 0,47	2,16	2,14	1,49	1,49	0,93	0,85
300,00 ± 0,51	2,77	2,68	1,73	1,81	1,09	1,04
350,00 ± 0,56	3,01	3,01	2,20	2,20	1,23	1,23

Tabelle 7: Längenvariation – Aluminium

$(m \pm u_m)/g$	s_{ℓ_1}/mm	s_{ℓ_2}/mm	s_{ℓ_3}/mm
50,00 ± 0,21	0,47	0,38	0,14
100,00 ± 0,30	0,88	0,72	0,32
150,00 ± 0,36	1,33	0,90	0,50
200,00 ± 0,42	1,77	1,27	0,67
250,00 ± 0,47	2,15	1,49	0,89
300,00 ± 0,51	2,73	1,77	1,06
350,00 ± 0,56	3,01	2,20	1,23

Tabelle 8: Längenvariation – Aluminium (Mittelwerte)

$(m \pm u_m)/g$	Messung 1			Messung 2		
	s_1/mm	s_2/mm	s_{M1}/mm	s_3/mm	s_4/mm	s_{M2}/mm
50,00 ± 0,21	0,44	0,26	0,35	0,47	0,38	0,42
100,00 ± 0,30	0,64	0,57	0,6	0,70	0,61	0,66
150,00 ± 0,36	0,97	0,85	0,91	0,98	0,90	0,94
200,00 ± 0,42	1,34	1,16	1,25	1,22	1,22	1,22
250,00 ± 0,47	1,55	1,45	1,5	1,58	1,49	1,54
300,00 ± 0,51	1,73	1,75	1,74	1,81	1,80	1,81
350,00 ± 0,56	2,09	2,10	2,09	2,24	2,10	2,17
400,00 ± 0,59	2,45	2,40	2,42	2,54	2,44	2,49
450,00 ± 0,63	2,61	2,66	2,63	2,78	2,68	2,73
500,00 ± 0,66	2,95	2,63	2,79	3,10	2,99	3,04
550,00 ± 0,70	3,33	3,33	3,33	3,37	3,36	3,37

Tabelle 9: Reproduzierbarkeitsmessung – Aluminium

```

from math import sqrt

ul = [1 / e ** 2 for e in error]

def b(d):
    ylist = [pair[1] for pair in d]
    xlist = [pair[0] for pair in d]

    return (sum([u * x ** 2 for u, x in zip(ul, xlist)]) *
            ↪ sum([u * y for u, y in zip(ul, ylist)]) - sum([u *
            ↪ x for u, x in zip(ul, xlist)]) * sum([u * x * y
            ↪ for u, x, y in zip(ul, xlist, ylist)])) / (sum(ul)
            ↪ * sum([u * x ** 2 for u, x in zip(ul, xlist)]) -
            ↪ (sum([u * x for u, x in zip(ul, xlist)])) ** 2)

def a(d):
    ylist = [pair[1] for pair in d]
    xlist = [pair[0] for pair in d]

    return (sum(ul) * sum([u * x * y for u, x, y in
    ↪ zip(ul, xlist, ylist)]) - sum([u * x for u, x in
    ↪ zip(ul, xlist)]) * sum([u * y for u, y in zip(ul,
    ↪ ylist)])) / (sum(ul) * sum([u * x ** 2 for u, x in
    ↪ zip(ul, xlist)]) - (sum([u * x for u, x in zip(ul,
    ↪ xlist)])) ** 2)

def ub(d):
    xlist = [pair[0] for pair in d]

    return sqrt((sum([u * x ** 2 for u, x in zip(ul,
    ↪ xlist)])) / (sum(ul) * sum([u * x ** 2 for u, x in
    ↪ zip(ul, xlist)]) - (sum([u * x for u, x in zip(ul,
    ↪ xlist)])) ** 2))

def ua(d):
    xlist = [pair[0] for pair in d]

    return sqrt((sum(ul)) / (sum(ul) * sum([u * x ** 2 for
    ↪ u, x in zip(ul, xlist)]) - (sum([u * x for u, x in
    ↪ zip(ul, xlist)])) ** 2))

```

Abbildung 10: Python-Programm zur linearen Regression. Für `data` wird eine Tupelliste der Form `(x,y)` eingegeben, wobei der Fehler für jedes `y` mit korrektem Index in der Liste `error` auffindbar ist.

V6: MRA: Abhängigkeit vom Material.

24.09.18

Abmaße Aluminium:



$b_1 = 9,95 \text{ mm}$	$h_1 = 5,99 \text{ mm}$
$b_2 = 9,96 \text{ mm}$	$h_2 = 5,99 \text{ mm}$
$b_3 = 9,96 \text{ mm}$	$h_3 = 5,99 \text{ mm}$
$b_4 = 9,96 \text{ mm}$	$h_4 = 6,02 \text{ mm}$
$b_5 = 9,96 \text{ mm}$	$h_5 = 5,99 \text{ mm}$
$b_6 = 9,97 \text{ mm}$	$h_6 = 5,99 \text{ mm}$
$b_7 = 9,96 \text{ mm}$	$h_7 = 5,98 \text{ mm}$
$b_8 = 9,95 \text{ mm}$	$h_8 = 5,99 \text{ mm}$

$P_2 = 80 \text{ cm}$
 $P_1 = 20 \text{ cm}$

$U_p = 1 \text{ mm}$
 $L = P_2 - P_1$

$U_b = U_n = 0,05 \text{ mm}$ ← Winkel Teil

$m_{\text{Alu}} = 50 \text{ g} \pm 0,2 \text{ g}$
 $m_{\text{mittel}} = 190 \text{ g} \pm 0,2 \text{ g}$
 $m_{\text{mg-ops}} = 200 \text{ g} \pm 0,2 \text{ g}$

$U_m = 0,2 \text{ g}$ → das aufgewogene zur. sinnvoll gemessen werden.
 $U_n = 0$

# mg-ops	# mittel	S_0/mm	S_2/mm
1	0	0,71	0,68
2	1	1,10	1,07
3	2	1,47	1,45
4	3	1,88	1,85
5	4	2,23	2,19
6	5	2,68	2,61
7	6	2,96	2,84
8	7	3,38	3,34

$U_b = 0,05 \text{ mm}$ durch Hydrat

# mg-ops	# mittel	# mittel	S_0/mm	S_2/mm
1	1	1	0,23	0,19
2	2	2	0,43	0,38
3	3	3	0,62	0,53
4	4	4	0,95	0,90
5	5	5	1,34	1,27
6	6	6	1,72	1,65
7	7	7	2,12	2,05
8	8	8	2,48	2,45
9	9	9	2,67	2,65
10	10	10	2,99	2,79
11	11	11	3,05	3,03

Abmaße Stahl

$b_1 = 9,98 \text{ mm}$	$h_1 = 5,99 \text{ mm}$
$b_2 = 9,96 \text{ mm}$	$h_2 = 5,99 \text{ mm}$
$b_3 = 9,96 \text{ mm}$	$h_3 = 5,94 \text{ mm}$
$b_4 = 9,96 \text{ mm}$	$h_4 = 5,99 \text{ mm}$
$b_5 = 9,98 \text{ mm}$	$h_5 = 5,99 \text{ mm}$
$b_6 = 9,96 \text{ mm}$	$h_6 = 5,99 \text{ mm}$
$b_7 = 9,96 \text{ mm}$	$h_7 = 5,98 \text{ mm}$
$b_8 = 9,96 \text{ mm}$	$h_8 = 5,99 \text{ mm}$

$P_2 = 80 \text{ cm}$
 $P_1 = 20 \text{ cm}$

# mg-ops	# mittel	# mittel	S_0/mm	S_2/mm
1	1	1	0,10	0,07
2	2	2	0,16	0,14
3	3	3	0,26	0,27
4	4	4	0,39	0,38
5	5	5	0,52	0,51
6	6	6	0,66	0,63
7	7	7	0,89	0,88
8	8	8	1,15	1,12
9	9	9	1,40	1,37
10	10	10	1,63	1,63
11	11	11	1,87	1,87
12	12	12	2,11	2,13
13	13	13	2,39	2,38
14	14	14	2,61	2,64
15	15	15	2,76	2,74
16	16	16	2,86	2,87
17	17	17	3,00	3,00

Abmaße / Messung

Abmße Messing:

$b_1 = 9,95 \text{ mm}$	$h_1 = 5,97 \text{ mm}$	# Messpunkte	# Messstellen	# Messstellen	S_1/mm	s_1/mm
$b_2 = 9,95 \text{ mm}$	$h_2 = 5,97 \text{ mm}$			1	0,20	0,15
$b_3 = 9,96 \text{ mm}$	$h_3 = 5,97 \text{ mm}$			2	0,33	0,29
$b_4 = 9,96 \text{ mm}$	$h_4 = 5,97 \text{ mm}$			3	0,48	0,41
$b_5 = 9,95 \text{ mm}$	$h_5 = 5,96 \text{ mm}$			4	0,63	0,58
$b_6 = 9,96 \text{ mm}$	$h_6 = 5,97 \text{ mm}$		1		0,81	0,84
$b_7 = 9,95 \text{ mm}$	$h_7 = 5,96 \text{ mm}$		2		1,14	1,11
$b_8 = 9,95 \text{ mm}$	$h_8 = 5,96 \text{ mm}$		3		1,44	1,39
			4		2,00	2,07
			5		2,28	2,23
			6		2,49	2,52
				5	2,79	2,79
				6	2,97	2,98
					3,06	3,07

$P_1 = 80 \text{ cm}$ $P_2 = 20 \text{ cm}$

MR2: Stahlprofil - Stahl

$P_1 = 85 \text{ cm}$	$P_2 = 15 \text{ cm}$	# Messpunkte	# Messstellen	# Messstellen	S_1/mm	s_1/mm	S_2/mm	s_2/mm
			1		0,09	0,07	0,04	0,04
			2		0,19	0,23	0,08	0,07
		1			0,33	0,38	0,15	0,13
		2			0,57	0,55	0,22	0,20
		3			0,81	0,76	0,29	0,32
		4			1,13	1,15	0,42	0,42
		5			1,56	1,54	0,56	0,56
		6			2,04	2,03	0,71	0,70
		7			2,34	2,32	0,85	0,84
		8			2,55	2,53	0,92	0,90
		9			2,75	2,71	0,98	0,99
		10			2,89	2,92	1,05	1,06
		11			2,98	3,01	1,09	1,09
		12			3,11	3,11	1,13	1,13

MR3: Längswahl - Aluminium

$P_1 = 85 \text{ cm}$	$P_2 = 15 \text{ cm}$	$P_3 = 85 \text{ cm}$	$P_4 = 15 \text{ cm}$	$P_5 = 85 \text{ cm}$	$P_6 = 20 \text{ cm}$
# Messpunkte	# Messstellen	# Messstellen	# Messstellen	# Messstellen	# Messstellen
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					

MR4: Alu - $P_1 = 85 \text{ cm}$, $P_2 = 15 \text{ cm}$

# Messpunkte	# Messstellen	# Messstellen	# Messstellen	# Messstellen	# Messstellen
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					

24.09.18
V. Müller

Literatur

- [1] o.V.: *Gravity of Earth* – Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_of_Earth. Version: 2018. – [Online; aufgerufen am 25. September 2018]
- besser Demtröder oder Gerthm o.ä.
- [2] o.V.: *Versuchsanleitungen zum Physikkabor für Anfänger*innen, Teil 1*. 2018. – 24–31 S.