Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis I

1 Ziel des Versuchs 1

2 Versuchsaufbau und Durchführung 1

2.1 Aufbau 1

2.2 Durchführung 2

3 Physikalische Zusammenhänge 2

4 Auswertung und Fehleranalyse 4

4.1 Bestimmung des Fehlers der Linearen Regression 5

4.2 Materialabhängigkeit 7

4.3 Abhängigkeit von den Maßen des Querschnitts 12

4.4 Abhängigkeit von der Länge 18

5 Diskussion der Ergebnisse 22

5.1 Reproduzierbarkeitsmessung 22

5.2 Elastizitätsmodul der drei gemessenen Stoffe 22

5.3 Antiproportionalität der Durchbiegung zu h^3b 23

5.4 Proportionalität der Durchbiegung zu l^3 24

5.5 Graphische Darstellung der Ergebnisse 24

5.6 Betrachtung sonstiger Fehler 25

Abbildungsverzeichnis 26

Tabellenverzeichnis 26

Literatur 26

Anhang

1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch soll mit Hilfe der Durchbiegung eines Stabes der Elastizitätsmodul von drei unterschiedlichen Materialien bestimmt werden. Außerdem soll die Abhängigkeit der Biegung von der Dicke und der Länge des Stabes untersucht werden.

2 Versuchsaufbau und Durchführung

2.1 Aufbau

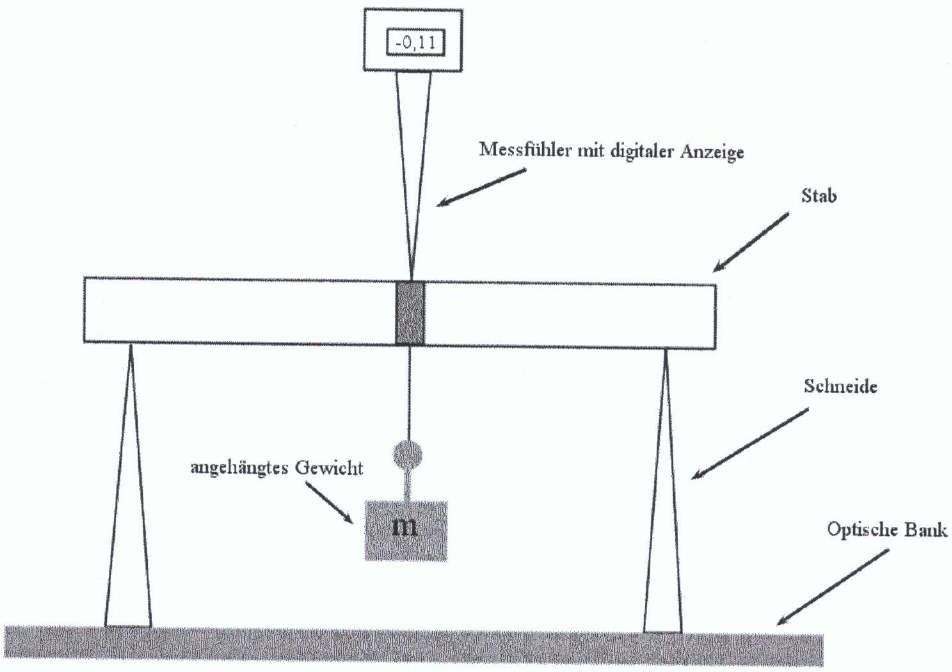


Abbildung 1: Optische Bank mit zwei Schneiden zum Auflegen des Stabes. Der Messfühler misst die, durch das angehängte Gewicht verursachte, Durchbiegung.

Der Versuchsaufbau (Abb. 1) besteht aus einer optischen Bank mit zwei Schneiden in verstellbaren Abstand. Auf die Schneiden kann der zu messenden Stab gelegt werden. Mit Hilfe einer Klemme, welche am Stab befestigt wird, können verschiedene Gewichte an den Stab gehängt werden. Mittig über dem Stab ist ein elektrischer Messfühler angebracht, welcher die Durchbiegung misst.
Es stehen unterschiedliche Stäbe, sowie eine Mikrometerschraube, ein Metermaß und eine Waage zur Verfügung.

2.2 Durchführung

Zunächst wurde von allen drei zu messenden Stäben jeweils fünf mal Höhe und Breite mit der Mikrometerschraube gemessen und notiert. Auch die Länge wurde bei allen Stäben vermessen. Außerdem wurden noch die zur Verfügung stehenden Gewichte stichprobenartig gewogen.
Als erstes, zu messendes Material wurde Aluminium gewählt. Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls wurde eine Messung vorgenommen und jeweils Auslenkung des Messfühlers und das angehängte Gewicht notiert. Danach wurde eine genauere Messung zur Überprüfung der Reproduzierbarkeit durchgeführt. Dazu wurde zwei mal, bei gleichen Bedingungen die selbe Messreihe mit zehn unterschiedlichen Gewichten aufgenommen.
Die Abhängigkeit der Biegung von der Länge des Stabes wurde ebenfalls mit Aluminium untersucht. Dazu wurden drei Messreihen, bei gleicher Orientierung, aber unterschiedlichen Längen des Stabes durchgeführt. Die unterschiedlichen Längen wurden durch Verstellen der Schneiden auf der optischen Bank realisiert.
Auch die Abhängigkeit von der Orientierung des Stabes wurde mit Aluminium durchgeführt, wobei zwei Messreihen des Stabes, einmal quer und einmal hochkant aufgenommen wurden. Die Länge wurde hierbei festgehalten. Es wurde noch eine dritte Messreihe zur Dicke aufgenommen, wobei die Länge beibehalten wurde, allerdings wurde hier ein komplett anderer Aluminiumstab verwendet.
Des Weiteren wurden noch jeweils zwei Messreihen für Stahl und Messing aufgenommen, wobei darauf geachtet wurde, dass die gewählte Länge und Orientierung auch bei Aluminium gemessen wurde, um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten.

3 Physikalische Zusammenhänge

Die Belastung eines Stabes entlang seiner Längsachse mit einer Zugkraft F führt zu einer Längenänderung. Bei kleiner Kraft F ist die relative Längenänderung $\frac{\Delta l}{l}$ proportional zur Kraft und antiproportional zur Querschnittsfläche des Stabes. Wir kennen den, sich daraus ergebenen Zusammenhang als Hookesches Gesetz

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{EA} = \frac{\sigma}{E}$$

mit l als Länge des Stabes
F als wirkende Zugkraft
E als Elastizitätsmodul des Materials
σ als Zug- oder Normalspannung.

Die Größe, über die wir am Ende mit unseren Messdaten den Elastizitätsmodul bestimmen können, ist der Biegungspfeil (oder einfacher gesagt die Auslenkung bei Belastung durch ein bestimmtes Gewicht)

$$s := z\left(x = \frac{l}{s}\right) = \frac{1}{E}\frac{l^3}{4h^3b}F_{\mathrm{G}}$$

mit l, h und b als Länge, Höhe und Breite des Stabes

F als wirkende Kraft

E als der Elastizitätsmodul des Materials.

Überlegt man sich nun, welche Daten aufgenommen werden und wie wir diese graphisch auswerten so stellt

$$s(m) = \frac{1}{E}\frac{l^3 g}{4h^3b}m$$

eine sinnvolle Form dar. Ermittelt man also graphisch oder durch lineare Regression die Steigung β der Geraden durch die aufgenommenen Datenpunkte, so kann man mit

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{E}\frac{l^3 g}{4h^3b} \\ \Longleftrightarrow E &= \frac{1}{\beta}\frac{l^3 g}{4h^3b} \end{aligned} \tag{1}$$

den Elastizitätsmodul E bestimmen.

4 Auswertung und Fehleranalyse

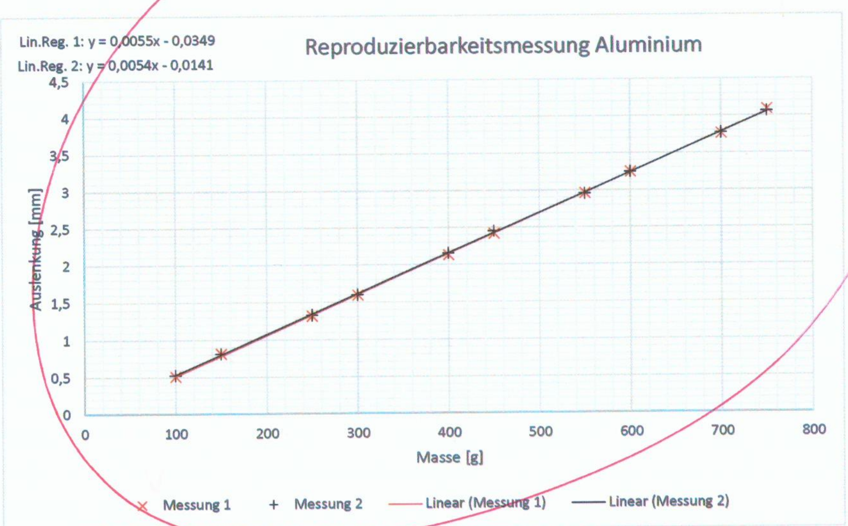
Im Folgenden werten wir unsere Messdaten aus, und untersuchen, ob die vermuteten Zusammenhänge zutreffen. Hierzu sollten wir zunächst die Reproduzierbarkeit des Experiments überprüfen.

welche Werte aufgetragen? $\bar{s}$?

Reproduzierbarkeitsmessung

Um die Reproduzierbarkeit zu überprüfen, führten wir zweimal die gleiche Messung durch.

größer



woher kommen Fehler?

Abbildung 2: Zwei gleiche Messungen im Vergleich (Aluminium), alle Fehlerbalken sind enthalten jedoch nicht sichtbar. gut!

Mit

$$\alpha = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\beta = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\text{für } y = \alpha + \beta x$$

haben wir jeweils eine lineare Regression ohne Gewichtung der Daten durchgeführt und die Fehler mit

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a + bx_i)]^2}$$
$$s_\alpha = s \cdot \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$
$$s_\beta = s \cdot \sqrt{\frac{n}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

✓

berechnet. Es ergibt sich für die beiden Messreihen eine Steigung von

$$\beta_1 = (545 \pm 3) \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{mm}}{\text{g}}$$
$$\beta_2 = (542{,}1 \pm 2{,}1) \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{mm}}{\text{g}} \quad .$$

& y-Achsenabschnitt?

Kommentar?

4.1 Bestimmung des Fehlers der Linearen Regression

Da wir im Folgenden die Lineare Regression über unsere Messdaten von Hand durchführen werden, führen wir eine gewichtete lineare Regression über die Messdaten der Messing Messung durch, um die daraus gewonnenen Fehler im Folgenden nutzen zu können. ✓
Die Gewichtungsfaktoren ergeben sich mit

$$g_i = \frac{1}{s_i^2}$$

und die Steigung und der y-Achsenabschnitt wurden mit Hilfe von

$$\alpha = \frac{\sum g_i x_i^2 \sum g_i y_i - \sum g_i x_i \sum g_i x_i y_i}{\sum g_i \sum g_i x_i^2 - \left(\sum g_i x_i\right)^2}$$
$$\beta = \frac{\sum g_i \sum g_i x_i y_i - \sum g_i x_i \sum g_i y_i}{\sum g_i \sum g_i x_i^2 - \left(\sum g_i x_i\right)^2}$$
$$\text{für } y = \alpha + \beta x$$

berechnet.

Für die Fehler der Steigung und des y-Achsenabschnitts nutzten wir die folgenden Gleichungen.

$$s_\alpha = \sqrt{\frac{\sum g_i x_i^2}{\sum g_i \sum g_i x_i^2 - \left(\sum g_i x_i\right)^2}}$$
$$s_\beta = \sqrt{\frac{\sum g_i}{\sum g_i \sum g_i x_i^2 - \left(\sum g_i x_i\right)^2}}$$

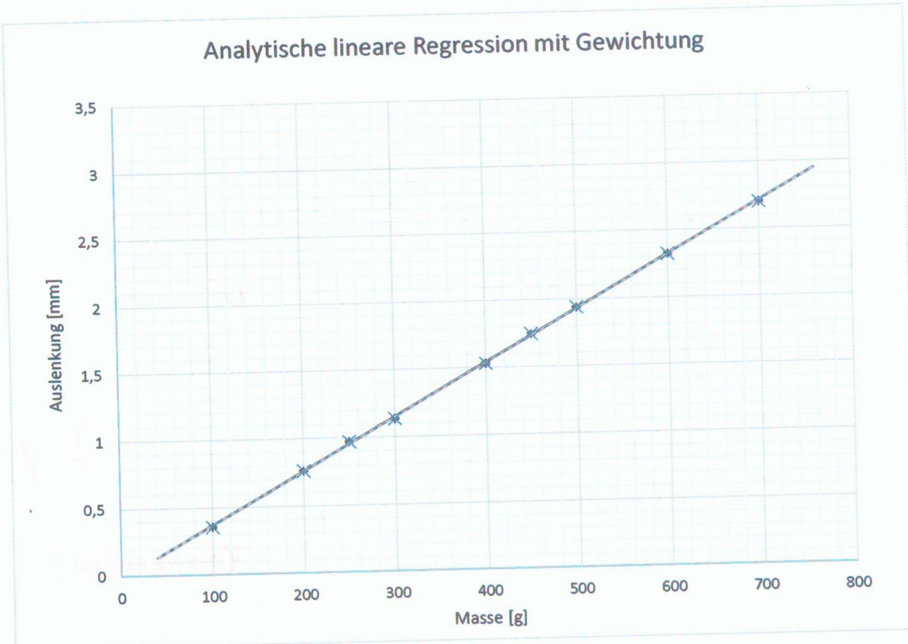


Abbildung 3: Lineare Regression über die Messdaten der Messingmessung (Analytisch), alle Fehlerbalken sind enthalten jedoch nicht sichtbar.

Wir erhalten somit

$$s_\beta = 1{,}2 \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{kg}} \quad . \tag{2}$$

$s_\alpha = ?$

für welches β?

aus der relativen Unsicherheit s_β/β könnt ihr auf Genauigkeit eurer händisch bestimmten Steigungen schließen

Wir werden diesen Fehler im Folgenden für alle linearen Regressionen nutzen, da diese von Hand durchgeführt wurden und eine geeignete Fehlerabschätzung hier nicht möglich war (zu kleine Fehlerbalken).

4.2 Materialabhängigkeit

Um die Materialabhängigkeit des Biegungspfeils zu prüfen, wurden zunächst die verwendeten Stäbe vermessen. Wir erhielten für Aluminium folgende Werte (Tabelle 1).

Stabmaße	Länge[m]	Breite[mm]	Höhe[mm]
Aluminium	1	5,92	9,9
		5,9	9,92
		5,91	9,91
		5,91	9,91
		5,9	9,9
Mittelwert	1	5,9080	9,9080
Fehler	0,0005	0,0022	0,0022

Tabelle 1: Vermessung des Aluminiumprofils

Zuerst aufführen, wie ihr Werte bestimmt habt & dann euer Ergebnis nennen

Die Fehler wurden wie folgt bestimmt

$$s_l = 0{,}5\,\text{mm (geschätzt)}$$
$$s_b = s_d = \frac{1}{5}\sqrt{5 \cdot s_s^2} = 0{,}0022\,\text{mm}$$

mit s_s als Messfehler der Mikrometerschraube. ✓

Die Mittelwerte wurden mit der Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (3)$$

✓

bestimmt.

Analog folgen für Messing die Werte aus Tabelle 2.

Stabmaße	Länge[m]	Breite[mm]	Höhe[mm]
Messing	1,0000	5,94	9,9
		5,94	9,92
		5,93	9,91
		5,94	9,91
		5,93	9,9
Mittelwert	1,0000	5,9360	9,9080
Fehler	0,0005	0,0022	0,0022

Tabelle 2: Vermessung des Messingprofils ✓

Und für Stahl die Werte aus Tabelle 3.

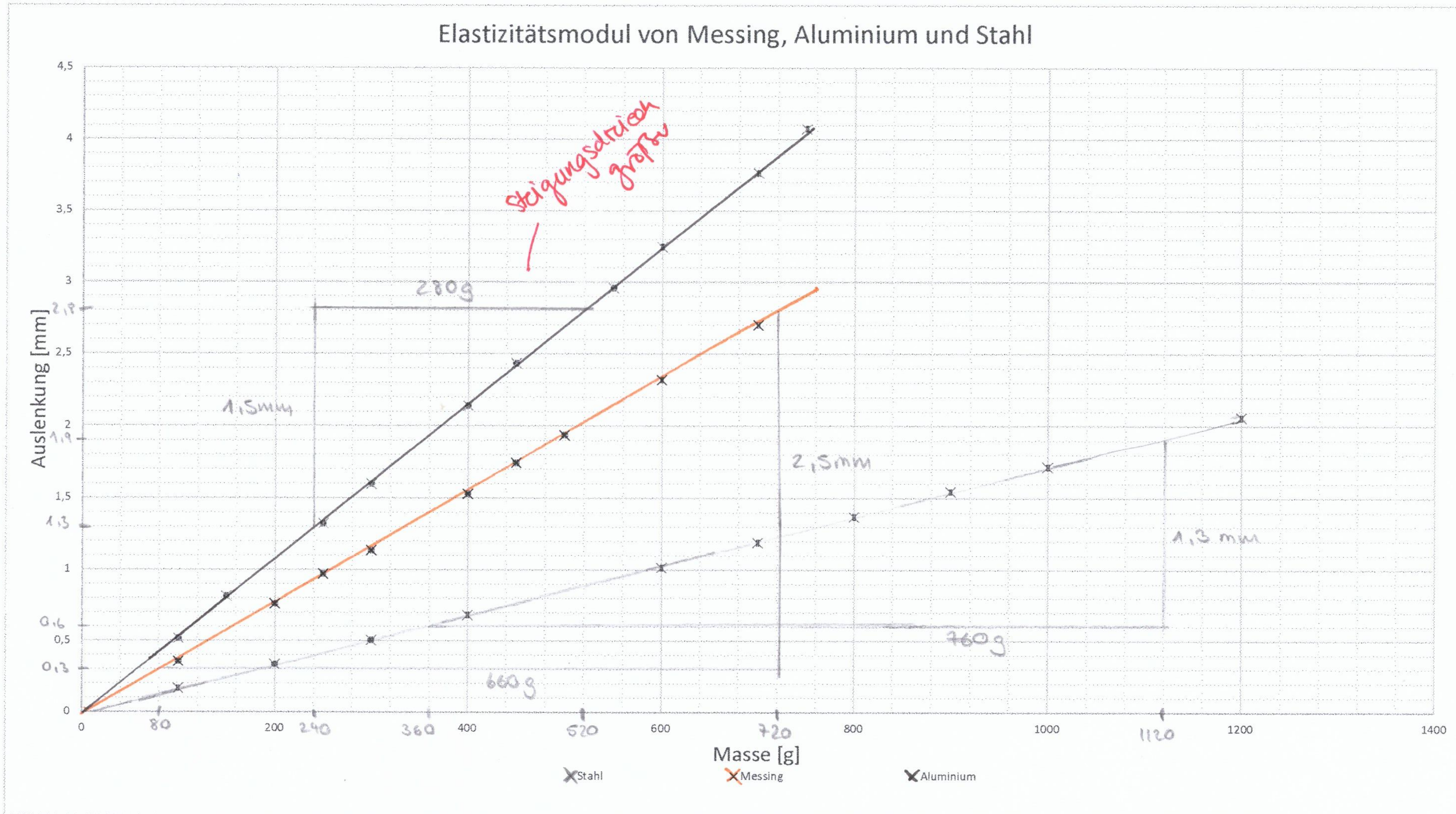
Stabmaße	Länge[m]	Breite[mm]	Höhe[mm]
Stahl	1,0000	5,92	9,93
		5,92	9,93
		5,92	9,92
		5,92	9,92
		5,92	9,92
Mittelwert	1,0000	5,9200	9,9240
Fehler	0,0005	0,0022	0,0022

Tabelle 3: Vermessung des Stahlprofils

Für die Berechnung der Elastitätsmodule der jeweiligen Materialien benötigen wir außerdem den Abstand zwischen den beiden Schneiden, auf denen der Stab aufliegt. Dieser Abstand wurde mit Hilfe eines Maßbandes gemessen. Wir erhielten folgenden Wert mit geschätzter Ungenauigkeit

$$l = (941{,}0 \pm 0{,}5)\,\text{mm}$$

Um nun den Elastizitätsmodul zu bestimmen führen wir eine lineare Regression unserer Messdaten durch. Dies erfolgte in der folgenden Abbildung von Hand.



Stahl $\beta = \frac{1{,}3}{760} \frac{mm}{g} = 1{,}7 \cdot 10^{-3} \frac{mm}{g}$

Messing $\beta = \frac{2{,}5}{660} \frac{mm}{g} = \frac{25}{6600} \frac{mm}{g}$

Aluminium $\beta = \frac{1{,}5}{280} \frac{mm}{g} = \frac{3}{560} \frac{mm}{g}$

Abb.: 4 Lineare Regression der Messdaten zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls, Fehlerbalken vorhanden aber nicht erkennbar ✓

bei graphischer Auswertung von Hand, erst Ablesepunkte nennen, daraus Δm, $\Delta s \Rightarrow \beta$ bestimmen.

Die von Hand ermittelte Steigungen für die Materialien sind

$$\beta_{\text{Messing}} = 1{,}71\,\frac{\text{mm}}{\text{kg}}$$
$$\beta_{\text{Stahl}} = 3{,}79\,\frac{\text{mm}}{\text{kg}}$$
$$\beta_{\text{Aluminium}} = 5{,}36\,\frac{\text{mm}}{\text{kg}} \quad .$$

Da die Fehler auf der linearen Regression von Hand auf Grund ihrer geringen Größe nicht zu bestimmen sind, verwenden wir die Fehler auf die Steigung, welche wir vorher beispielhaft für Messing analytisch bestimmt haben (Gleichung (2)). Damit folgen also die Werte ✓

$$\beta_{\text{Messing}} = (171{,}1 \pm 1{,}2) \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{mm}}{\text{kg}}$$
$$\beta_{\text{Stahl}} = (378{,}8 \pm 1{,}2) \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{mm}}{\text{kg}}$$
$$\beta_{\text{Aluminium}} = (535{,}7 \pm 1{,}2) \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{mm}}{\text{kg}} \quad .$$

✓

Nun können wir mit Hilfe der Gleichung (1) die Elastizitätsmodul~~e~~n der Materialien errechnen, und erhalten

mit welchem g?

$$E_{\text{Messing}} = 93\,439{,}4\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$
$$E_{\text{Stahl}} = 206\,474{,}4\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$
$$E_{\text{Aluminium}} = 66\,381{,}4\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die Fehler auf die Elastizitätsmodule berechnen sich mit der Formel

$$\frac{s_E}{E} = \sqrt{\left(3\frac{s_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{s_\beta}{\beta}\right)^2 + \left(3\frac{s_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{s_b}{b}\right)^2} \quad .$$

← welche Fehler sind beitragend? welche nicht?

Damit erhalten wir, mit den jeweiligen Werten, für die Elastizitätsmodulen

$$\boxed{\begin{aligned} E_{\text{Messing}} &= (93\,400 \pm 300)\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ E_{\text{Stahl}} &= (206\,500 \pm 700)\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ E_{\text{Aluminium}} &= (66\,380 \pm 240)\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned}}$$

Sinnvolle Größe? besser in kN/mm²

kurzer Kommentar wie entspricht Erwartungen oder ähnliches

4.3 Abhängigkeit von den Maßen des Querschnitts

Um die Abhängigkeit des Biegungspfeils von Breite und Höhe der Stäbe zu überprüfen, vergleichen wir die Änderung von Höhe und Breite mit der Änderung der Steigung die daraus resultiert. Wir erwarten, dass die Steigung proportional zu $h^{-3}b^{-1}$ ist. Falls diese Proportionalität zutreffend ist gilt,

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{h_2^3 b_2}{h_1^3 b_1} \quad .$$

Um diesen Zusammenhang zu überprüfen, berechnen wir zunächst den Quotienten der Höhen und Breiten. Hierfür benötigen wir die jeweiligen größen die wie folgt gegeben sind.
Der verwendete Stab war der Selbe, wie bei der Messung der Materialabhängigkeit man kann demnach seine Maße in Tabelle 1 nachlesen. Der Stab wurde einmal quer und einmal hochkant verwendet, sodass die Breite einmal zur Höhe wird. Der zweite Alustab den wir verwendeten hatte die Maße

Stabmaße	Länge[m]	Breite[mm]	Höhe[mm]
Aluminium	1,0000	11,91	11,91
		11,91	11,92
		11,91	11,91
		11,9	11,91
		11,9	11,91
Mittelwert	1,0000	11,9060	11,9120
Fehler	0,0005	0,0022	0,0022

Abbildung 5: Vermessung des Stabprofils

Mit den Fehlern, welche wie in Gleichung (3) berechnet wurden erhalten wir somit die Werte

$$\begin{aligned}
b_{\text{hochkant}} &= (5{,}9080 \pm 0{,}0022)\,\text{mm} = b_{\text{h}} \\
h_{\text{hochkant}} &= (9{,}9080 \pm 0{,}0022)\,\text{mm} = h_{\text{h}} \\
b_{\text{quer}} &= (9{,}9080 \pm 0{,}0022)\,\text{mm} = b_{\text{q}} \\
h_{\text{quer}} &= (5{,}9080 \pm 0{,}0022)\,\text{mm} = h_{\text{q}} \\
b_{\text{quadratisch}} &= (11{,}9060 \pm 0{,}0022)\,\text{mm} = b_{\text{Q}} \\
h_{\text{quadratisch}} &= (11{,}9120 \pm 0{,}0022)\,\text{mm} = h_{\text{Q}}
\end{aligned}$$

Mit diesen Werten berechnen sich die folgenden Quotienten zu

$$\hat{\mathrm{Q}}_1 = \frac{h_{\mathrm{h}}^3 b_{\mathrm{h}}}{h_{\mathrm{q}}^3 b_{\mathrm{q}}} = 2{,}812 \pm 0{,}004$$
$$\hat{\mathrm{Q}}_2 = \frac{h_{\mathrm{Q}}^3 b_{\mathrm{Q}}}{h_{\mathrm{h}}^3 b_{\mathrm{h}}} = 3{,}497 \pm 0{,}005$$
$$\hat{\mathrm{Q}}_3 = \frac{h_{\mathrm{Q}}^3 b_{\mathrm{Q}}}{h_{\mathrm{q}}^3 b_{\mathrm{q}}} = 9{,}839 \pm 0{,}014 \quad .$$

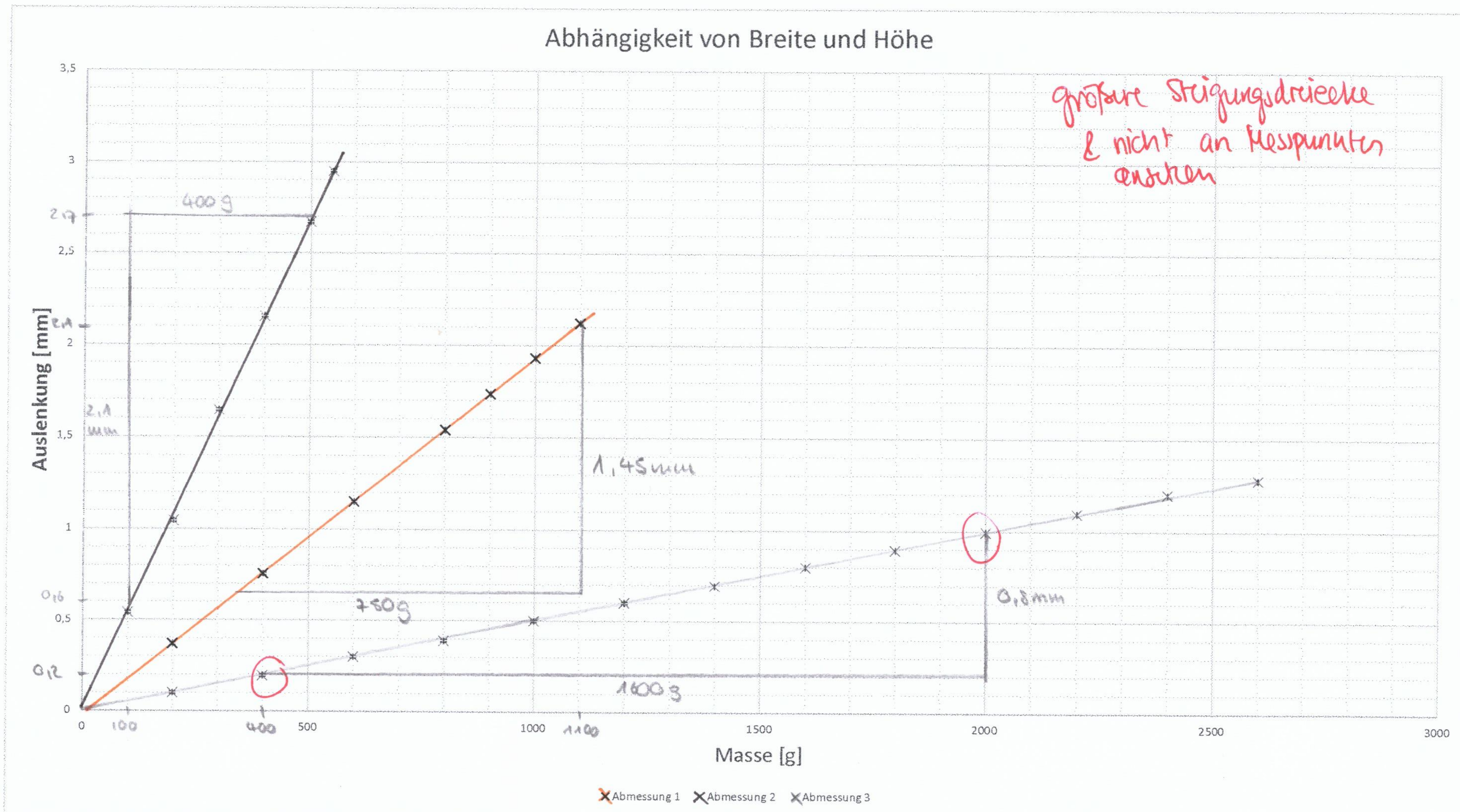
✓

Die Fehler wurden mit folgender Formel berechnet.

auch hier, welche Unsicherheit beitragend?

$$s_{\hat{\mathrm{Q}}} = \hat{\mathrm{Q}}_0 \cdot \sqrt{\left(3\frac{s_{h_2}}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{s_{b_2}}{b_2}\right)^2 + \left(3\frac{s_{h_1}}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{s_{b_1}}{b_1}\right)^2}$$

Um nun die, für den zweiten Quotienten benötigten, Steigungen zu bestimmen, führen wir eine lineare Regression über die Messdaten durch. Dies erfolgte in der folgenden Abbildung von Hand. ✓



größere Steigungsdreiecke & nicht an Messpunkten ansetzen

Abmessung 1 $\beta = \frac{1,45}{750} \frac{mm}{g} = \frac{29}{15000} \frac{mm}{g}$

Abmessung 2 $\beta = \frac{2,1}{400} \frac{mm}{g} = \frac{21}{4000} \frac{mm}{g}$

Abmessung 3 $\beta = \frac{0,8}{1600} \frac{mm}{g} = \frac{1}{2000} \frac{mm}{g}$

Abb.: 6 Auswirkung von Höhe und Breite auf die Durchbiegung bei Aluminium
Abmessung 2: kleiner Stab, quer
Abmessung 1: kleiner Stab, hochkant
Abmessung 3: großer Stab (quadr. Querschnitt)
Fehlerbalken vorhanden, nicht erkennbar

Mit den in der Abbildung bestimmten Steigungen,

$$\beta_q = 5{,}25\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{kg}}$$
$$\beta_h = 3{,}93\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{kg}}$$
$$\beta_Q = 0{,}5\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{kg}}$$

lassen sich nun die Quotienten bestimmen. Wir erhalten

$$\tilde{\mathrm{Q}}_1 = \frac{\beta_q}{\beta_h} = 2{,}7155 \pm 0{,}0018$$
$$\tilde{\mathrm{Q}}_2 = \frac{\beta_h}{\beta_Q} = 3{,}87 \pm 0{,}10$$
$$\tilde{\mathrm{Q}}_3 = \frac{\beta_q}{\beta_Q} = 10{,}5 \pm 0{,}3 \quad .$$

✓

Die Fehler wurden mit der folgenden Formel berechnet.

$$s_{\tilde{\mathrm{Q}}} = \tilde{\mathrm{Q}}_0 \cdot \sqrt{\left(\frac{s_{\beta_1}}{\beta_1}\right)^2 + \left(\frac{s_{\beta_2}}{\beta_2}\right)^2}$$

vergleich der "theoretischen" & "gemessenen" Verhältnissen ?

4.4 Abhängigkeit von der Länge

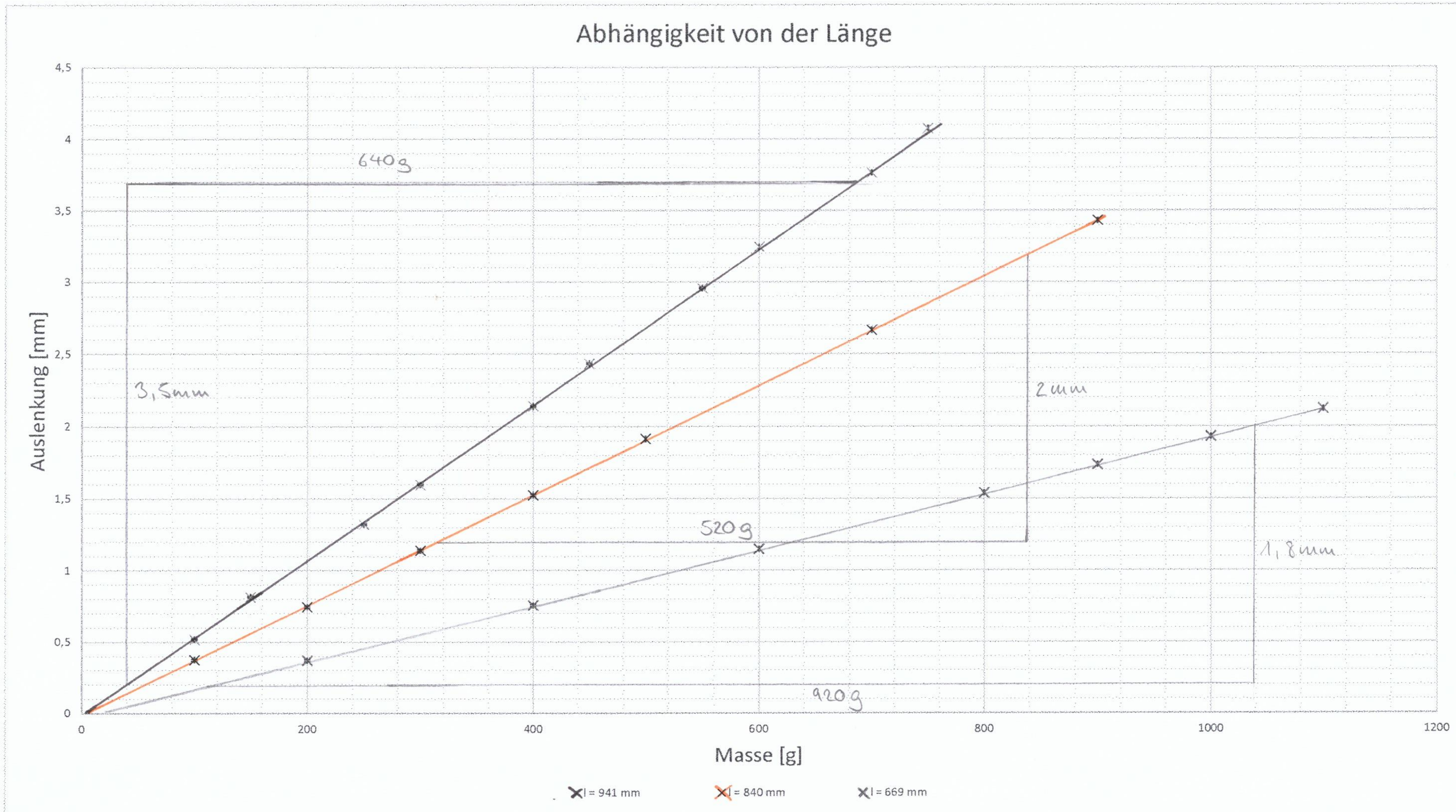
Um die Abhängigkeit des Biegungspfeil von der Länge zu prüfen, untersuchen wir, wie sich das Verhältniss der unterschielichen Längen im Vergleich mit dem Verhältnis der Änderungen der Auslenkung verhält. Wir erwarten, dass die Steigung proportional zu l^3 ist. Falls diese Proportionalität zutrifft, gilt

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{l_1^3}{l_2^3} \quad .$$

Um diesen Zusammenhang zu überprüfen berechnen wir den Quotienten der kubischen Längen.

$$\hat{Q}_1 = \frac{l_1^3}{l_2^3} = 1{,}4058 \pm 0{,}0011$$
$$\hat{Q}_2 = \frac{l_1^3}{l_3^3} = 2{,}7829 \pm 0{,}0026$$
$$\hat{Q}_3 = \frac{l_2^3}{l_3^3} = 1{,}9710 \pm 0{,}0019$$

Mit $l_1 = 941\,\mathrm{mm}$, $l_2 = 840\,\mathrm{mm}$ und $l_3 = 669\,\mathrm{mm}$ und dem Fehler auf die Messung der Länge $s_l = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ (bei allen Längen der Selbe). Um nun die Quotienten der Steigungen zu berechnen müssen wir zunächst die Steigungen ermitteln. Hierzu führen wir eine lineare Regression über die Messdaten durch. Dies erfolgt in der folgenden Abbildung von Hand.



$l_1 = 941\,mm \quad \beta = \frac{3{,}5}{640} \frac{mm}{g} = \frac{7}{1280} \frac{mm}{g}$

$l_2 = 840\,mm \quad \beta = \frac{2}{520} \frac{mm}{g} = \frac{1}{260} \frac{mm}{g}$

$l_3 = 669\,mm \quad \beta = \frac{1{,}8}{920} \frac{mm}{g} = \frac{9}{4600} \frac{mm}{g}$

Abb.: 7 Auswirkung von unterschiedlichen Längen auf die Durchbiegung von Aluminium, Fehlerbalken vorhanden, aber nicht erkennbar ✓

Mit den in der Abbildung bestimmten Steigungen,

$$\beta_1 = 5{,}47\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{kg}} \qquad \text{für } l_1$$
$$\beta_2 = 3{,}85\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{kg}} \qquad \text{für } l_2$$
$$\beta_3 = 1{,}97\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{kg}} \qquad \text{für } l_3$$

lassen sich nun folgende Quotienten berechnen. Wir erhalten

$$\tilde{\mathrm{Q}}_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2} = 1{,}422 \pm 0{,}005$$
$$\tilde{\mathrm{Q}}_2 = \frac{\beta_1}{\beta_3} = 2{,}795 \pm 0{,}018$$
$$\tilde{\mathrm{Q}}_3 = \frac{\beta_2}{\beta_3} = 1{,}97 \pm 0{,}13 \quad .$$

✓

Die Fehler wurden mit folgender Formel berechnet.

$$s_{\tilde{\mathrm{Q}}} = \tilde{\mathrm{Q}}_0 \cdot \sqrt{\left(\frac{s_{\beta_1}}{\beta_1}\right)^2 + \left(\frac{s_{\beta_2}}{\beta_2}\right)^2}$$

✓

Vergleich "theoretisch" mit "gemessen"

5 Diskussion der Ergebnisse

5.1 Reproduzierbarkeitsmessung

Auch wenn die zwei aufgenommenen Messreihen sehr gut übereinanderliegen, haben wir mit

$$t = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \text{ mit } x_0 \text{ und } y_0 \text{ zu vergleichende Werte}$$

$$\text{Wenn } t < 2 \text{ dann sind } x_0 \pm s_x \text{ und } y_0 \pm s_y \text{ verträglich}$$

$$\text{Wenn } t \geq 2 \text{ dann sind } x_0 \pm s_x \text{ und } y_0 \pm s_x \text{ nicht verträglich}$$

die Verträglichkeit auf einem Signifikanzniveau von 5% der Steigungen der linearen Regression überprüft. Es ergibt sich

$$t = 0,9$$

womit die Steigungen verträglich sind, was neben der eindeutigen Ähnlichkeit der Messergebnisse, für die Reproduzierbarkeit des Versuches spricht. ✓

Linearität Hooke'sches Gesetz?

5.2 Elastizitätsmodul der drei gemessenen Stoffe

Zunächst haben wir aus den von uns aufgenommenen Daten den Elastizitätsmodul von Aluminium, Stahl und Messing bestimmt. Für Aluminium haben wir

$$\boxed{E_{\text{Aluminium}} = (66\,380 \pm 240)\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$$

erhalten, was vom Literaturwert [Quelle 1] von

$$E_{\text{Aluminium, Lit.}} = (69...72,5) \cdot 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

um 11 Standartabweichungen abweicht.

Die Werte, welche wir für Stahl und Messing ermitteln konnten liegen beide innerhalb des Intervalls, welches der Literaturwert vorgibt. Bei Stahl haben wir

$$\boxed{E_{\text{Stahl}} = (206\,500 \pm 700)\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$$

bei einem Literaturwert [Quelle 1] von

$$E_{\text{Stahl, Lit.}} = (195...210) \cdot 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

erhalten. Und bei Messing ergab sich

$$\boxed{E_{\text{Messing}} = (93\,400 \pm 300)\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$$

bei einem Literaturwert [Quelle 1] von

$$E_{\text{Messing, Lit.}} = (90...95) \cdot 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad .$$

quantitativ

Da alle relativen Fehler der Elastizitätsmodule sehr gering sind, wäre es im Nachhinein besser gewesen, nicht die Fehler der analytisch durchgeführten linearen Regression zu verwenden, sondern einen größeren realistischen Fehler zu schätzen. Da aber alle Werte der graphisch durchgeführten linearen Regressionen auf den Geraden lagen, war kein sinnvoller anderer Fehler ersichtlich.

eure Unsicherheit auf E ergibt sich ja nicht nur aus s_{β_1}, sondern auch aus s_{e}, s_h etc. habt ihr diese unterschätzt?

5.3 Antiproportionalität der Durchbiegung zu h^3b

Bei der Abhängigkeit der Biegung von der Höhe und Breite des Stabes haben wir jeweils zwei Werte zu einer Orientierung des Stabes erhalten, deren Vertäglichkeit wir prüfen können. Es ergibt sich

$$t_1 = 22$$
$$t_2 = 3,72$$
$$t_3 = 2,20$$

!!

nicht nur eure t-Werte nennen, sondern eure resultierenden Verhältnisse @!

womit alle drei Wertepaare nicht auf einem Signifikanzniveau von 5% verträglich sind.
Dies liegt vor allem an den sehr kleinen Fehlern auf die Abmessungen der Stäbe und dem kleinen Fehler auf die zeichnerisch und damit eher ungenau bestimmte Steigung. Formal können wir also nicht verifizieren, dass sich die Biegsamkeit antiproportianal zu h^3b verhält. Die Daten lassen aber vermuten, dass mit weiteren, genaueren Messungen der Zusammenhang zu bestätigen ist. ✓

5.4 Proportionalität der Durchbiegung zu l^3

Auch bei der Abhängigkeit der Biegsamkeit des Stabes von der Länge haben wir jeweils zwei Werte erhalten, deren Verträglichkeit auf einem Signifikanzniveau von 5% sich prüfen lässt. Man erhält

$$t_1 = 3,16$$
$$t_2 = 0,7$$
$$t_3 = 0,010$$

s.o.

womit die Werte des zweiten und des dritten Paares vertäglich sind. Da auch die Werte des ersten Paares auf den ersten Blick ähnlich aussehen und die Unverträglichkeit haupsächlich durch die zu klein geschätzten Fehler entsteht, legt unsere Messung den proportionalen Zusammenhang zwischen der Biegbarkeit und der kubischen Länge nahe.

5.5 Graphische Darstellung der Ergebnisse

großer

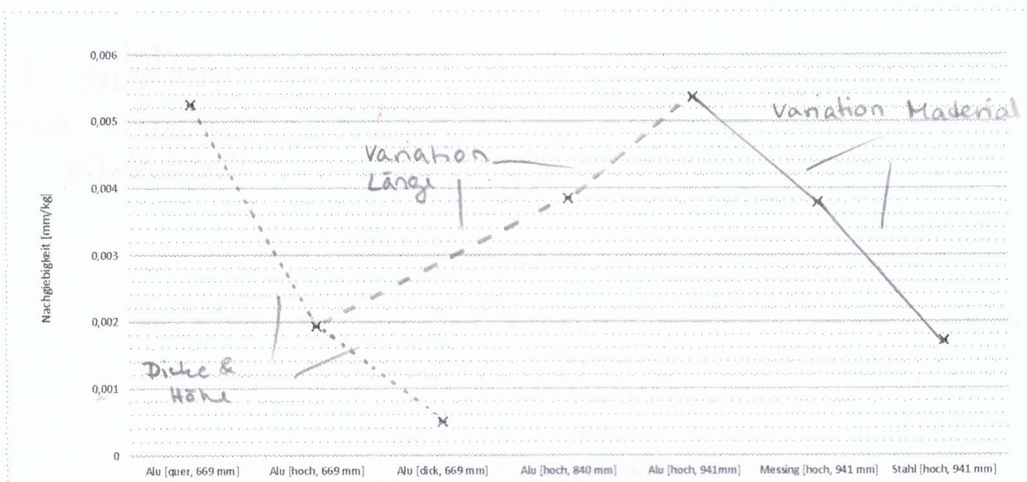


Abbildung 8: Vergleichende Darstellung der Ergebnisse

5.6 Betrachtung sonstiger Fehler

Sowohl während der Messung, als auch in der Auswertung haben wir das Eigengewicht der Stäbe, der Halterung und die Andruckkraft des Messfühlers nicht beachtet. Da wir uns mit der Messung aber im linearen Bereich des Hookeschen Gesetzes befinden, führt die nur zu einer Verschiebung des Nullpunktes, nicht aber zu einer Veränderung der für uns relevanten Steigung.

Den Fehler auf die von uns gegebenen Massestücke haben wir nach stichprobenartigen Messungen auf $\pm 0{,}1\,\mathrm{g}$ auf den im Versuchsheft angegebenen Wert geschätzt. Der Fehler würde sich bei Auflegen von mehr Massestücken fortpflanzen, da aber bei der durchgeführten linearen Regression mit Gewichtung nur die y-Fehler beachtet werden, haben wir den Fehler auf die einzelnen Massestücke auf die Gesamtmasse übertragen. Insgesamt spielt der Fehler der Massen nur in die Bestimmung der Steigung ein, das könnte neben der zeichnerischen Ungenauigkeit, bei sehr kleinem analytischen Fehler ein weiterer Grund für die deutlich zu kleinen Fehler bei der Steigung sein.

Denkzettel

HIER könnte
IHRE Note
stehen !

Abbildungsverzeichnis

1 Optische Bank mit zwei Schneiden zum Auflegen des Stabes. Der Messfühler misst die, durch das angehängte Gewicht verursachte, Durchbiegung. 1

2 Zwei gleiche Messungen im Vergleich (Aluminium), alle Fehlerbalken sind enthalten jedoch nicht sichtbar. 4

3 Lineare Regression über die Messdaten der Messingmessung (Analytisch), alle Fehlerbalken sind enthalten jedoch nicht sichtbar. 6

4 Elastizitätsmodul von Messing,Aluminium und Stahl 9

5 Vermessung des Stabprofils 12

6 Abhängigkeit von Breite und Höhe 15

7 Abhängigkeit von der Länge 19

8 Vergleichende Darstellung der Ergebnisse 24

Tabellenverzeichnis

1 Vermessung des Aluminiumprofils 7

2 Vermessung des Messingprofils 7

3 Vermessung des Stahlprofils 8

Literatur

[Quelle 1] *"Versuchsanleitungen zum Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 1"* Stand 08/2018.

Daten: Reproduzierbarkeit Messung 1	
x	y
100	0,51
150	0,815
250	1,315
300	1,595
400	2,13
450	2,415
550	2,96
600	3,245
700	3,76
750	4,09

Berechnung der Linearen Regression der Reproduzierbarkeit in Excel

Rechnungen zur Auswertung					
Daten?	x^2	xy	a+bx	y-(a+bx)	$[y-(a+bx)]^2$
TRUE	10000	51	0,510603	-0,00060274	3,633E-07
TRUE	22500	122,25	0,783356	0,031643836	0,0010013
TRUE	62500	328,75	1,328863	-0,013863014	0,0001922
TRUE	90000	478,5	1,601616	-0,006616438	4,378E-05
TRUE	160000	852	2,147123	-0,017123288	0,0002932
TRUE	202500	1086,75	2,419877	-0,004876712	2,378E-05
TRUE	302500	1628	2,965384	-0,005383562	2,898E-05
TRUE	360000	1947	3,238137	0,006863014	4,71E-05
TRUE	490000	2632	3,783644	-0,023643836	0,000559
TRUE	562500	3067,5	4,056397	0,03360274	0,0011291

Lineare Regression (ohne Gewichtung)								
Anzahl der Datenpunkte	n=	10		Datenbereich:				
Achsenabschnitt	a=	-0,0349		x_min=	100			
Steigung	b=	0,005455		x_max=	750			
Summe der Fehlerquadrate	S=	0,003319		range=	650			
Streuung der Messwerte	s=	0,020368		Ausgleichsgerade und Grenzgeraden:				
Standardunsicherheit in a	ua=	0,014343		(x1,y1,y1',y1'')=	35	0,156023	0,142736	0,16931106
Standardunsicherheit in b	ub=	3,02E-05		(x2,y2,y2',y2'')=	815	4,410977	4,421209	4,40074404

Daten: Reproduzierbarkeit Messung 2	
x	y
100	0,525
150	0,815
250	1,33
300	1,6
400	2,15
450	2,45
550	2,955
600	3,245
700	3,77
750	4,06

Rechnungen zur Auswertung					
Daten?	x^2	xy	a+bx	y-(a+bx)	$[y-(a+bx)]^2$
TRUE	10000	52,5	0,528055	-0,003054795	9,332E-06
TRUE	22500	122,25	0,799123	0,015876712	0,0002521
TRUE	62500	332,5	1,34126	-0,011260274	0,0001268
TRUE	90000	480	1,612329	-0,012328767	0,000152
TRUE	160000	860	2,154466	-0,004465753	1,994E-05
TRUE	202500	1102,5	2,425534	0,024465753	0,0005986
TRUE	302500	1625,25	2,967671	-0,012671233	0,0001606
TRUE	360000	1947	3,23874	0,006260274	3,919E-05
TRUE	490000	2639	3,780877	-0,010876712	0,0001183
TRUE	562500	3045	4,051945	0,008054795	6,488E-05

Lineare Regression (ohne Gewichtung)								
Anzahl der Datenpunkte	n=	10		Datenbereich:				
Achsenabschnitt	a=	-0,01408		x_min=	100			
Steigung	b=	0,005421		x_max=	750			
Summe der Fehlerquadrate	S=	0,001542		range=	650			
Streuung der Messwerte	s=	0,013882		Ausgleichsgerade und Grenzgeraden:				
Standardunsicherheit in a	ua=	0,009776		(x1,y1,y1',y1'')=	35	0,175666	0,16661	0,18472197
Standardunsicherheit in b	ub=	2,06E-05		(x2,y2,y2',y2'')=	815	4,404334	4,411308	4,39736021

Lineare Regression mit Gewichtung der Messing-Messdaten in Exel

Daten: Messing		
x	y	uy
100	0,355	0,007071
200	0,76	0,005
250	0,97	0,007071
300	1,135	0,007071
400	1,53	0,007071
450	1,745	0,007071
500	1,9375	0,005
600	2,32	0,007071
700	2,7	0,007071

Rechnungen zur Auswertung											
Daten?	g	gx	gx²	gxy	gy	a+bx	y-(a+bx)	[y-(a+bx)]²	((a+bx)-average)2	(y - average)2	Average
TRUE	20000	2000000	2E+08	710000	7100	0,367031	-0,01203	0,00014475	150949,234	150958,5828	388,8889
TRUE	40000	8000000	1,6E+09	6080000	30400	0,757762	0,002238	5,0088E-06	150645,7717	150644,0344	
TRUE	20000	5000000	1,25E+09	4850000	19400	0,953127	0,016873	0,00028468	150494,155	150481,0644	
TRUE	20000	6000000	1,8E+09	6810000	22700	1,148493	-0,01349	0,00018206	150342,6147	150353,0783	
TRUE	20000	8000000	3,2E+09	12240000	30600	1,539224	-0,00922	8,5079E-05	150039,763	150046,9088	
TRUE	20000	9000000	4,05E+09	15705000	34900	1,734589	0,010411	0,00010838	149888,4517	149880,3907	
TRUE	40000	20000000	1E+10	38750000	77500	1,929955	0,007545	5,6931E-05	149737,2167	149731,3774	
TRUE	20000	12000000	7,2E+09	27840000	46400	2,320686	-0,00069	4,701E-07	149434,9758	149435,5059	
TRUE	20000	14000000	9,8E+09	37800000	54000	2,711417	-0,01142	0,00013034	149133,0401	149141,8579	

Lineare Regression (mit Gewichtung)								
Anzahl der Datenpunkte	n=	9		Datenbereich:				
Achsenabschnitt	a=	-0,0237		x_min=	100			
Steigung	b=	0,003907		x_max=	700			
Summe der Fehlerquadrate	S=	0,000998		range=	600			
Streuung der Messwerte	s=	0,011939		Ausgleichsgerade und Grenzgeraden:				
(Nenner)	N=	1,55E+15		(x1,y1,y1',y1")=	40	0,132592	0,128041	0,13714436
Standardunsicherheit in a	ua=	0,005029		(x2,y2,y2',y2")=	760	2,945855	2,949892	2,94181804
Standardunsicherheit in b	ub=	1,19E-05						
R^2 - Test	SQE =	1350665						
	SQT =	1350673						
	R^2 =	0,999994						

4,5

$t = 42{,}96 \frac{P}{2}$ $t = 17{,}69$

Prä ≠ Andreh $t = 31{,}49 \frac{P}{2}$ $t = 23{,}74$

$t = 32{,}61 \frac{P}{2}$ $t = 22{,}84$

$t = 41{,}97 \frac{P}{2}$ $t = 17{,}79$ VT

Versuch 6

24.09.2018

Fehler Maßband
± 0,5 mm

Mikrometerschraube
± 0,005 mm

Waage
± 0,005 g

Biegungsmesser
± 0,01 mm

	l	d [mm]	u
Messing	1 m	~~5,56 mm~~	~~9,942 m~~
		5,94	9,9
		5,94	9,92
		5,93	9,91
		5,94	9,91
		5,93	9,9
Alu	1 m	5,92	9,86
		5,9	9,87
		5,91	9,86
		5,91	9,87
		5,9	9,87
Stahl	1 m	5,92	9,93
		5,92	9,93
		5,92	9,92
		5,92	9,92
		5,92	9,42

Gewichte	klein	mittel	groß
Fehler ±0,1 g	49,98	100,07	199,9

Aufhängung: 50,07 g irrelev

4

Aluminium

Länge 84 cm => 42 cm

	hin	rück
~~200 g~~ 100 g	-0,37 mm	-0,38
200 g	-0,76 mm	-0,73
300 g	-1,14 mm	-1,14
400 g	-1,53 mm	-1,52
500 g	-1,92 mm	-1,91
700 g	-2,66 mm	-2,67
900 g	-3,43 mm	

Stab steht hochkant

Länge 94,1 cm => 47,05 cm

	hin	zurück
100	-0,49 mm	-0,53
150	-0,82	-0,81
250	-1,29	-1,34
300	-1,59	-1,6
400 ~~350~~ ~~350~~	-2,11	-2,15
~~400~~ 450	-2,41	-2,42
~~500~~		
~~450~~ ~~500~~	~~-2,48~~	
~~4~~ 550	-2,96	-2,96
600	-3,27	-3,22
700	-3,75	-3,77
750	-4,09	

100	0,51	0,54
150	0,82	0,81
250	1,12	1,34
300	1,57	1,63
~~3~~400	2,13	2,17
450	2,48	2,42
550	2,93	2,98
600	3,26	3,23
650	3,75	3,79
750	4,06	

Länge 66,9 cm => 33,45 cm

~~100~~	~~0,17~~	
200	0,37	0,37
400	0,75	0,76
600	1,15	1,15
800	1,54	1,54
900	1,74	1,73
1000	1,96	1,93
1100	2,12	

Stab liegt

Länge 66,9 cm => 33,45 cm

	hin	zurück
100 g	0,54	0,54
200	1,02	1,07
300	1,66	1,63
400	2,18	2,13
500	2,69	2,65
550	2,95	

Alu großer Stab

d mm	h
11,91	11,9
11,91	11,9
11,91	11,9
11,9	11,9
11,9	11,9

Länge 66,9 cm => 33,45 cm

200 g	0,1	0,1
400	0,19	0,2
600	0,3	0,3
800	0,39	0,39
1000	0,5	0,5
1200	0,6	0,6
1400	0,69	0,7
1600	0,8	0,8
1800	0,9	0,89
2000	1	0,99
2200	1,1	1,09
2400	1,2	1,2
1600	1,28	

Hochkant

Messing

Länge: 94,1 cm => ~~[illegible]~~ 47,05 cm

	hin	zurück
100	0,34	0,37
200	0,75	0,76
300	1,12	1,15
400	1,54	1,52
500	1,94	1,93
600	2,32	

200	0,77	0,76
250	0,98	0,96
450	1,78	1,74
500	1,94	1,94
700	2,7	

Stahl

	hin	zurück
200	0,33	0,34
400	0,68	0,68
600	1,02	1,02
800	1,37	1,37
1000	1,72	1,71
1200	2,06	

hochkant

100	0,16	0,17
300	0,5	0,51
400	0,68	0,69
600	1,00	1,02
700	1,19	1,19
900	1,55	1,54
1000	1,72	1,72
1200	2,06	

VT 24.09.18
Mall