

Inhaltsverzeichnis

1	Versuchsbeschreibung	1
1.1	Ziel des Versuchs	1
1.2	Physikalische Zusammenhänge	1
1.3	Versuchsaufbau	4
1.4	Durchführung	4
2	Auswertung	5
2.1	Vermessung der Stäbe	5
2.2	Durchbiegung der Stäbe unter Belastung	6
2.2.1	Materialabhängigkeit	6
2.2.2	Ausrichtung	7
2.2.3	Länge	8
2.3	Nachgiebigkeiten	9
2.4	Berechnung des Elastizitätsmodul	10
3	Fehleranalyse	11
4	Diskussion	12
5	Zusammenfassung	13
6	Literatur	15
7	Anhang	16
7.1	Wichtige Parameter	16
7.2	Werte zur Material-Abhängigkeit	17
7.3	Werte zur AusrichtungsAbhängigkeit	21
7.4	Werte zur Längen-Abhängigkeit	25

1 Versuchsbeschreibung

1.1 Ziel des Versuchs

Es soll für 3 Stäbe (Messing, Aluminium, Stahl) mit rechteckigem Querschnitt der Elastizitätsmodul aus der Durchbiegung bestimmt werden. Neben der Materialabhängigkeit sollen sowohl die horizontale als auch die vertikale Ausrichtung des Querschnittsprofils der Stäbe untersucht werden um die Proportionalität der Durchbiegung zu $\frac{1}{h^3 \cdot b}$ zu verifizieren. Ebenso soll der Einfluss der Länge untersucht werden und die Proportionalität zu l^3 verifiziert werden:

1.2 Physikalische Zusammenhänge

Ein Körper der durch eine Zugkraft F senkrecht zu seiner Querschnittsfläche A belastet wird, dehnt sich in dieser Richtung aus. Bei einer hinreichend kleinen Kraft folgt diese Dehnung dem Hook'schen Gesetz. Daraus folgt für die relative Längenänderung $\frac{\Delta l}{l}$ eine Proportionalität zur Zugkraft und eine Antiproportionalität zur Querschnittsfläche.

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{A} := \frac{1}{E} \sigma \quad (1.1)$$

Das E aus der Proportionalitätskonstante nennen wir Elastizitätsmodul, es handelt sich dabei um eine vom Material festgelegte Konstante, die relative Längenänderung bezeichnet man auch als Dehnung und die Zugkraft pro Fläche $\frac{F}{A}$ nennen wir (Zug-)Spannung.

Wenn ein Draht oder Stab einer Zugspannung ausgesetzt wird verringert sich seine Dicke d . Diese Änderung der Dicke $\frac{\Delta d}{d}$ folgt einer Proportionalität zur Dehnung, da diese proportional zur Kraft ist folgt auch diese Änderung dem Hook'schen Gesetz.

$$\frac{\Delta d}{d} = \mu \frac{\Delta l}{l} \quad (1.2)$$

Diese Verbindung von Längenänderung und Änderung der Dicke bezeichnet man als die Querkontraktionszahl μ . Aus der Änderung dieser Maße ergibt sich eine Änderung im Volumen $\frac{\Delta V}{V}$:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta l}{l} (1 - 2\mu) = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu) \quad (1.3)$$

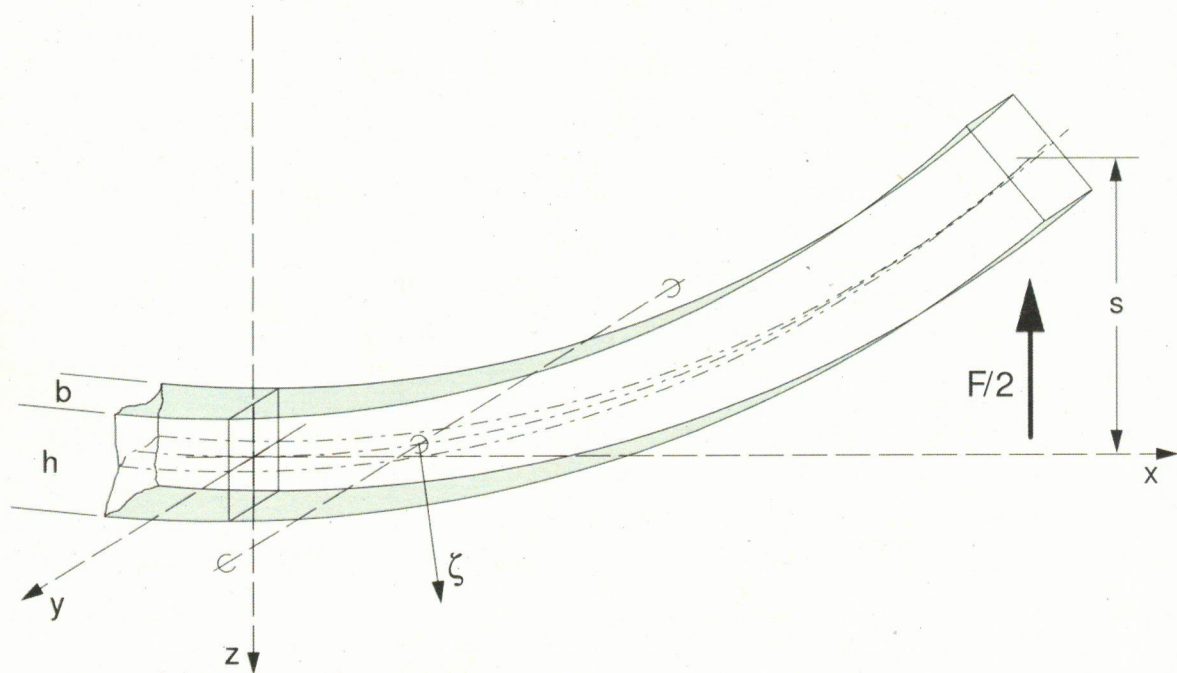
Typische Werte für μ liegen im Bereich 0,2 bis 0,5. Hat μ den Wert 0 so verändert sich das Volumen des Körpers nicht.

Nun kann man dieses Verhalten auch für Druck betrachten, wobei sich die Vorzeichen für Dehnung bzw. Stauchung und Spannung ändern. In diesem Fall werden Drähte natürlich dicker. Wir können dieses Wissen auch nutzen, um die Volumenänderung bei Druck aus allen Richtungen zu bestimmen.

Wirkt nun aber eine Kraft nicht senkrecht sondern parallel zur Querschnittsfläche so bezeichnen wir dies als Scherungsspannung oder Schubspannung. Hier benötigen wir zur Beschreibung das Schubmodul G .

Nun kommen wir zur Biegung eines Stabes. Wird ein Stab auf zwei Punkten aufgestützt und dazwischen nach unten gebogen so wird die Oberseite des Stabes gestaucht und die Unterseite gestreckt. Zwischen diesen Schichten befindet sich in der Mitte eine sogenannte neutrale Faser, die weder gestreckt noch gestaucht wird. Den Abstand eines beliebigen Punkts im Stab benennen wir mit ζ . Die Kraft wirkt in z-Richtung und der unbelastete Stab verläuft in x-Richtung.

Tabelle 1: Koordinaten die im folgenden verwendet werden



[2]

Die Spannung σ des Materials wächst linear mit dem Abstand von der neutralen Faser:

$$\sigma(x, \zeta) = \frac{\zeta}{\zeta_0} \sigma_0(x) \quad (1.4)$$

ζ_0 bezeichnet den Abstand zum Rand des Stabes und σ_0 die Spannung am Rand. Durch Drehung und Stauchung wird ein Drehmoment bezüglich der horizontalen Achse verursacht:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ \Rightarrow M(x) &= \frac{\sigma_0(x)}{\zeta_0} \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \zeta^2 dy d\zeta}_{:= I_y} = \frac{1}{12} \frac{\sigma_0(x)}{\zeta_0} b h^3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

I_y nennen wir Flächenträgheitsmoment. Da unser Stab Rechteckig ist, ist $y_0 = \frac{b}{2}$ und $\zeta_0 = \frac{h}{2}$. Die Kraft, die in der Mitte auf den Stab wirkt, verteilt sich auf die zwei Auflagepunkte, auf die dann je die Hälfte der Kraft wirkt. Für das Drehmoment in der einen Hälfte des Stabes ergibt sich also:

$$M(x) = \frac{F}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) \quad (1.6)$$

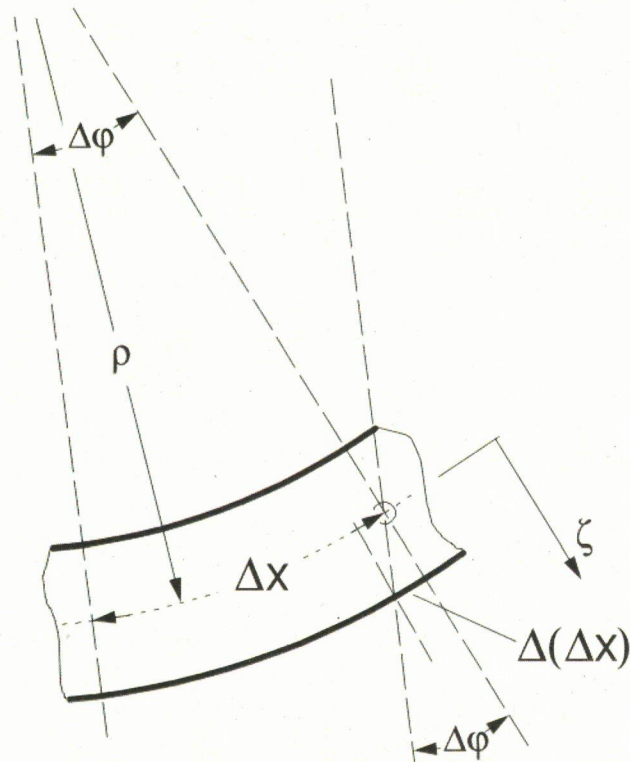
Aus (1.5) und (1.6) folgt dann sofort

$$\frac{F}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) = \frac{1}{12} \frac{\sigma_0(x)}{\zeta_0} b h^3 \quad (1.7)$$

Nun betrachten wir einen kleinen Ausschnitt aus dem gebogenen Stab, der die Länge Δx hat. Die lokale Änderung dieser Länge, $\Delta(\Delta x)/\Delta x$ hängt über den Elastizitätsmodul mit der lokalen Zugspannung $\sigma(x, \zeta)$ gemäß (1.1) und (1.4) zusammen.

$$\frac{\Delta(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\sigma(x, \zeta)}{E} = \frac{1}{E} \frac{\zeta}{\zeta_0} \sigma_0(x) \quad (1.8)$$

Tabelle 2: Ausschnitt aus einem durch Belastung gebogenen Stab



[3]

Durch einige geometrische Überlegung erhalten wir:

$$\Delta(\Delta x) = \Delta\varphi \cdot \zeta \quad (1.9)$$

Daraus ergibt sich zusammen mit 1.8

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{1}{E} \frac{\sigma_0(x)}{\zeta_0} \quad (1.10)$$

Durch $d\varphi/dx = 1/\rho$ können wir den Krümmungsradius einer durch die Funktion $z(x)$ beschriebenen Kurve schreiben als

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{z''(x)}{(1+z'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.11)$$

Da wir in unserem Fall bei kleinen Durchbiegungen bleiben, können wir die Steigung z' der Kurve als gering annehmen und deshalb von $z' \rightarrow 0$ ausgehen. Somit erhalten wir

$$z''(x) = \frac{1}{E} \frac{\sigma_0(x)}{\zeta_0} \quad (1.12)$$

Durch einsetzen von $\frac{\sigma_0(x)}{\zeta_0}$ in Gleichung (1.7) erhalten wir

$$z''(x) = \frac{1}{E} \frac{F}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) \cdot \frac{12}{bh^3} \quad (1.13)$$

Nun wollen wir aber die gesamte Durchbiegung des Stabs und integrieren deshalb zwei mal mit den Randbedingungen $z'(x) = 0$, $z(0) = 0$. Das liefert letztendlich

$$z(x) = \frac{1}{E} \frac{12}{bh^3} \left(\frac{l}{4} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) \quad (1.14)$$

Und damit für $x = \frac{l}{2}$:

$$s := z \left(x = \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{E} \frac{l^3}{4bh^3} \cdot F \quad (1.15)$$

s wird auch Biegunspfeil genannt und beschreibt die Auslenkung des Metallstabes von der Mitte bis zu den Schneiden, auf denen der Stab aufliegt.

1.3 Versuchsaufbau

In diesem Versuch stehen drei Stäbe aus verschiedenen Materialien (Aluminium, Messing, Stahl) zur Verfügung. Anhand von 1.15 erkennt man, dass sich die Stäbe in der horizontalen und der vertikalen Ebene unterschiedlich stark durchbiegen werden. Ein Stab wird auf zwei Metall Schneiden gelegt, welche auf einer optischen Bank montiert sind. Es wird eine Halterung für Gewichte am entsprechenden Stab angebracht. Anschließend wird der Stab so auf die Schneiden gelegt, dass die Mitte des Stabes in der Mitte zwischen den beiden Schneiden liegt. Außerdem ist darauf zu achten, dass der Stab genau senkrecht zu den Schneiden liegt, um einen systematischen Fehler zu vermeiden. Der Abstand der Schneiden wird mit einem Maßband gemessen. Nun werden nacheinander Gewichte mit Massen von 50g, 100g oder 200g in der Mitte des Stabes angehängt, sodass sich der Stab durchbiegt. Diese Durchbiegung kann mit einem digitalen Messgerät gemessen werden. Dazu bringt man den an einem Stativ befestigten Fühler von oben her in Kontakt mit der Halterung für die Gewichte.

1.4 Durchführung

Zunächst wird bei jedem Stab die Breite und Höhe an mindestens fünf verschiedenen Stellen mit einer Mikrometerschraube gemessen. Daraus wird dann ein Mittelwert für die Breite und Höhe berechnet. Dann wird der Abstand der Schneiden mit einem Bandmaß gemessen. Letztlich werden noch einige Massen Stichprobenartig gemessen, um die Ungenauigkeit der Gewichte grob abschätzen zu können.

Es wird jeweils die Durchbiegung der Stäbe bei verschiedenen Belastungen gemessen. Gemessen wird diese mit einem Digitalen Messgerät, welches eine Auflösung von 1/100 mm hat.

Es werden insgesamt drei Messreihen durchgeführt. Bei der ersten Messreihe soll die Durchbiegung in Abhängigkeit des Materials gemessen werden, bei der zweiten Messreihe soll die Durchbiegung in Abhängigkeit der Ausrichtung des Stabprofils gemessen werden und bei der dritten Messreihe soll die Durchbiegung in Abhängigkeit der Länge gemessen werden. Bei jeder Messreihe sollen die anderen beiden Größen nicht variiert werden.

Bei jeder Messreihe wird nun die Durchbiegung unter verschiedenen Belastungen gemessen. Dazu bringt man am entsprechenden Stab erst eine Halterung für die Gewichte an. Anschließend hängt man die Gewichte der Reihe nach vom kleinsten zum größten in die Halterung des

Stabs. Danach werden die Gewichte in umgekehrter Reihenfolge wieder abgehängt. Es werden in jeder Messreihe mindestens sechs verschiedene Werte eingestellt.

Bei einer der Messungen wird die Durchbiegung in Abhängigkeit der Belastung präziser verfolgt, um die Reproduzierbarkeit der einzelnen Messwerte zu überprüfen. Dazu werden dann mindestens 10 Gewichte verwendet und die Messung wird mindestens ein zweites mal wiederholt.

2 Auswertung

2.1 Vermessung der Stäbe

Die Stäbe wurden mit einer Mikrometerschraube mit einer Ungenauigkeit von 0,01 mm an fünf verschiedenen Stellen gemessen. Daraus ergibt sich der Durchschnitt für Höhe h und Breite b aus der Formel

$$\bar{h} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 h_i \quad \bar{b} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 b_i \quad (2.1)$$

Die Standardabweichung der Einzelmessungen erhalten wir mit der Formel:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.2)$$

und die Standardabweichung des Mittelwerts mit:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{5}} \quad (2.3)$$

Daraus haben wir die durchschnittliche Breite und Höhe der Stäbe erhalten. Diese lauten:
Für Aluminium:

$$\bar{h}_a = (9,963 \pm 0,003) \text{ mm} \quad \text{und} \quad \bar{b}_a = (5,999 \pm 0,003) \text{ mm} \quad (2.4)$$

Für Stahl:

$$\bar{h}_s = (9,967 \pm 0,003) \text{ mm} \quad \text{und} \quad \bar{b}_s = (5,943 \pm 0,001) \text{ mm} \quad (2.5)$$

Für Messing:

$$\bar{h}_m = (9,963 \pm 0,003) \text{ mm} \quad \text{und} \quad \bar{b}_m = (5,973 \pm 0,001) \text{ mm} \quad (2.6)$$

Für die einzelnen Gewichte ist die Unsicherheit $\pm 0,1$ g. Da man aber mehrere Gewichte aneinander hängt wird der Fehler der Gewichte größer. Bei n Gewichten berechnet sich der Fehler also aus der Formel:

$$s_n = \sqrt{n} \cdot s_{\text{Einzelgewicht}} \quad (2.7)$$

↳ als extra berechnete Spalte in lin. Reg.

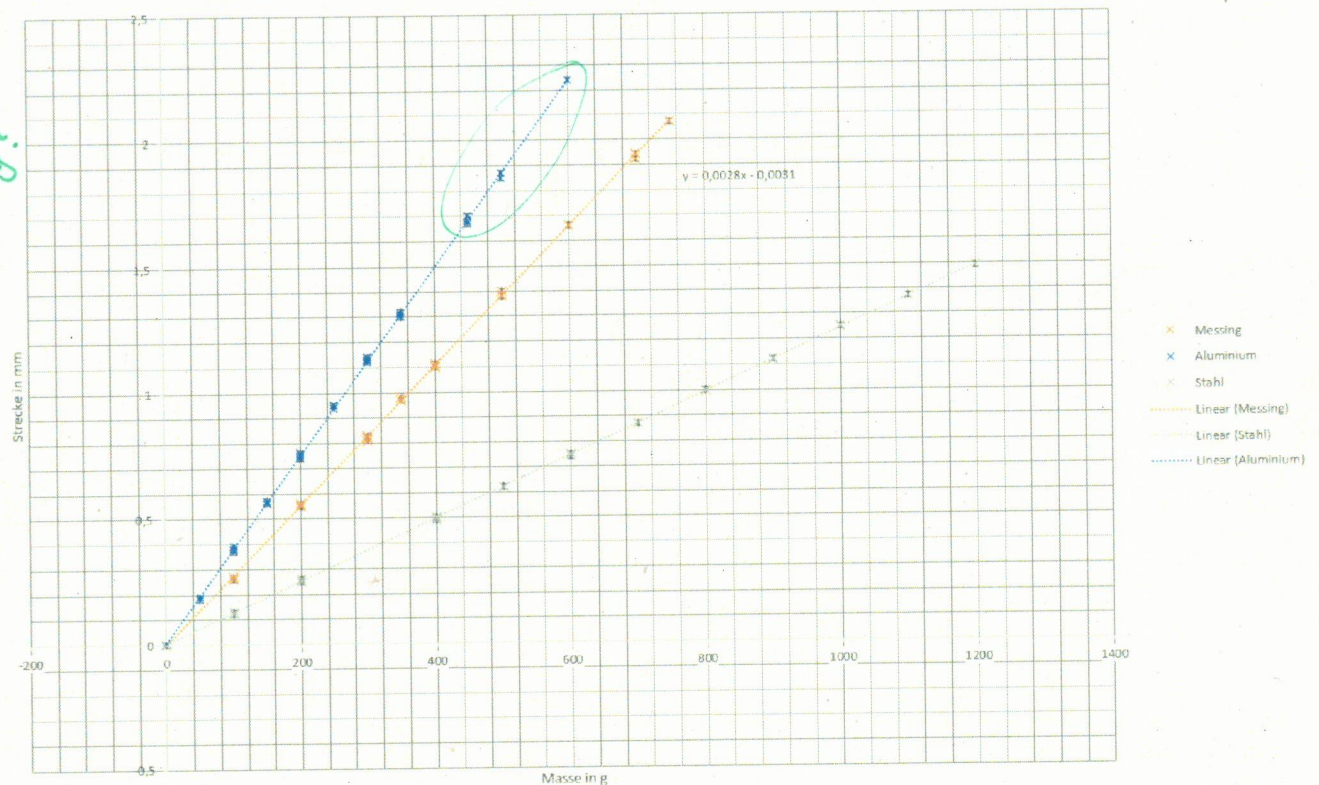
2.2 Durchbiegung der Stäbe unter Belastung

2.2.1 Materialabhängigkeit

Um die Materialabhängigkeit der Durchbiegung zu testen, benutzen wir drei verschiedene Materialien: Stahl, Aluminium und Messing. Bei jedem Stab testen wir die Durchbiegung in Abhängigkeit der Kraft. Dabei variieren wir die anderen Größen nicht. Der Abstand der beiden Schneiden beträgt $l = (60,0 \pm 0,2)$ cm und die Stäbe liegen horizontal auf den Schneiden. Das heißt die Höhe $h = b$ und die Breite $b = h$. Die Massen der Gewichte wurden Stichprobenartig gemessen und hatten eine Ungenauigkeit von etwa 0,1 g pro einzelner Masse. Die Messungen wurden mittels einer Linearen Regression ausgewertet. Die Rechnungen wurden dabei in Excel gemacht.

Mit der Linearen Regression haben wir ein Diagramm erstellt, in dem auf der x-Achse die Masse m und auf der y-Achse die Auslenkung s eingetragen ist. Eingetragen sind die Werte der Auslenkung unter verschiedenen Belastungen für Aluminium, Messing und Stahl

Abbildung 1: Auslenkung für verschiedene Materialien in Abhängigkeit der angehängten Massen



Aus der Linearen Regression erhalten wir die Steigung β der Geraden und ihren Fehler. Diese betragen

Für Aluminium:

$$\beta_a = (0,003730 \pm 9 \cdot 10^{-6}) \text{ mm/g} \quad (2.8)$$

2 Auswertung

Für Stahl:

$$\beta_s = (0,001245 \pm 2 \cdot 10^{-6}) \text{ mm/g}$$

7
Ü ich meinte eher: mm/g
(1245 ± 2) · 10⁻⁶ mm/g
(2.9)

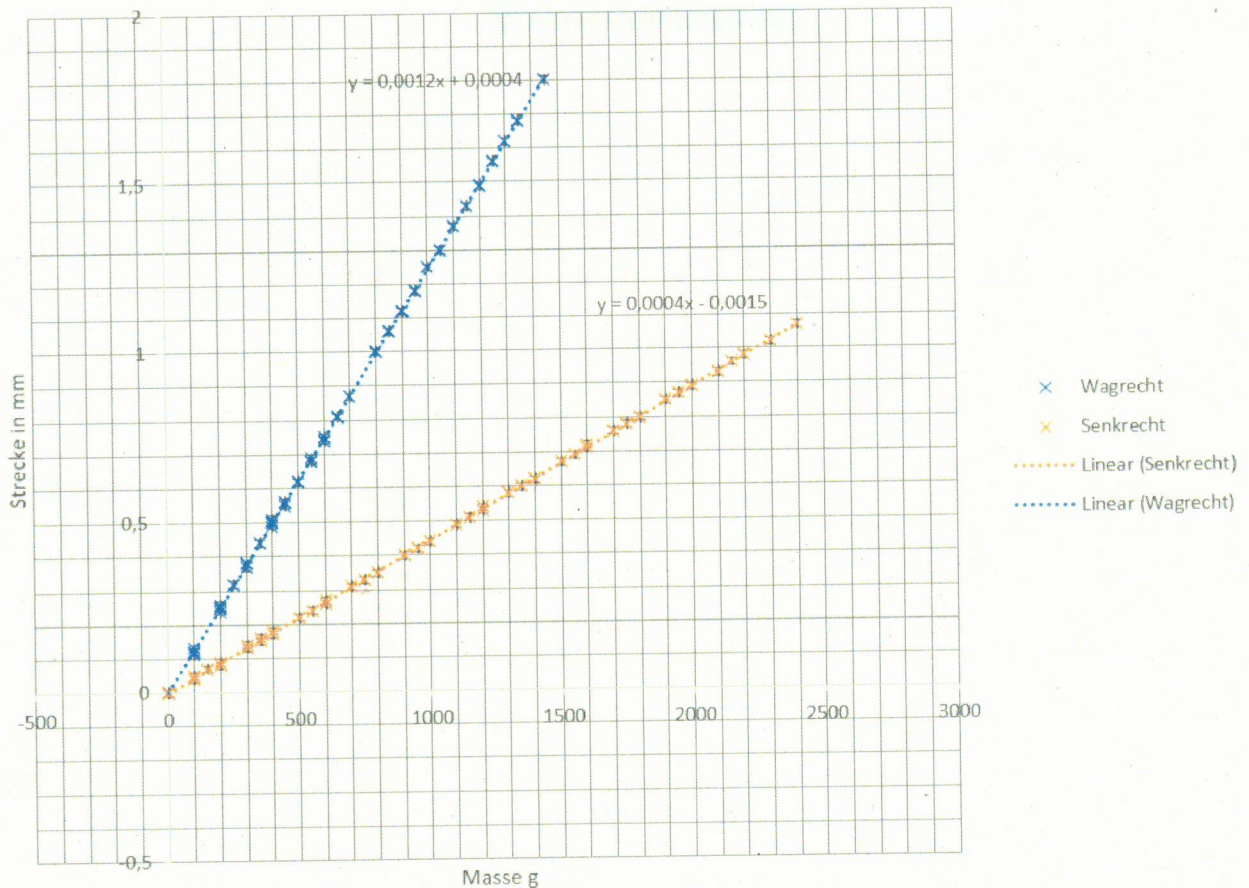
Für Messing:

$$\beta_m = (0,002769 \pm 6 \cdot 10^{-6}) \text{ mm/g} \quad (2.10)$$

2.2.2 Ausrichtung

Um die Abhängigkeit der Durchbiegung von der Ausrichtung des Stabes zu messen, haben wir den Stab aus Stahl gewählt. Für die Länge haben wir wieder $l = (60,0 \pm 0,2)$ cm gewählt. Die Ungenauigkeit der Gewichte ist wieder 0,1 g. Wieder haben wir die Ergebnisse in Excel mit einer Linearen Regression ausgewertet. Es wurde auch hier ein Diagramm erstellt.

Abbildung 2: Auslenkung für verschiedene Ausrichtung... welches Material?



Daraus erhalten wir wieder die Steigung β und ihren Fehler aus der Linearen Regression für Stahl Waagrecht:

$$\beta_{swaag} = (0,001244 \pm 1 \cdot 10^{-6}) \text{ mm/g} \quad (2.11)$$

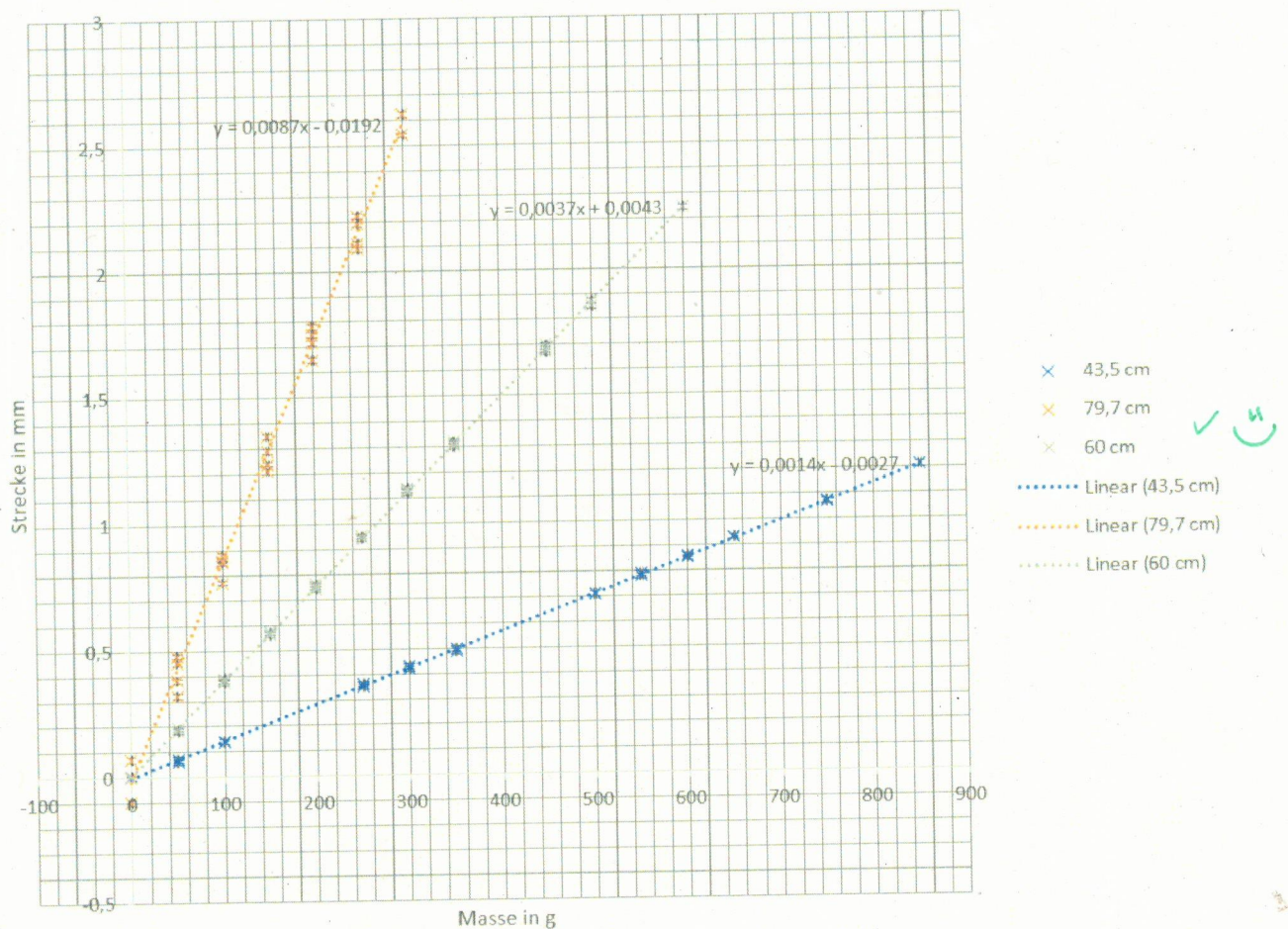
Stahl Senkrecht:

$$\beta_{ssenk} = (0,000446 \pm 1 \cdot 10^{-6}) \text{ mm/g} \quad (2.12)$$

2.2.3 Länge

Schließlich haben wir noch die Abhängigkeit der Durchbiegung von der Länge l zwischen den Anklagepunkten untersucht. Dazu haben wir den Stab aus Aluminium gewählt. Als Ausrichtung haben wir wieder waagrecht gewählt. Die Gewichte haben wieder eine Unsicherheit von 0,1 g. Auch hier wurden die Ergebnisse in Excel mit einer Linearen Regression ausgewertet. Es wurde wieder ein Diagramm wie für die Materialabhängigkeit erstellt

Abbildung 3: Auslenkung für verschiedene Längen *Material?*



Daraus erhalten wir wieder die Steigung β und ihren Fehler aus der Linearen Regression für

Aluminium Waagrecht kurz((43,5 ± 0,2)cm):

$$\beta_{akurz} = (0,001430 \pm 0,000003) \text{ mm/g} \quad (2.13)$$

Aluminium Waagrecht lang((79,7 ± 0,2)cm):

$$\beta_{alang} = (0,0087 \pm 0,0001) \text{ mm/g} \quad (2.14)$$

2.3 Nachgiebigkeiten

Die oben erwähnten Steigungen der Regressionsgeraden β bezeichnet man als Nachgiebigkeit. Im folgenden werden die Nachgiebigkeiten bei unterschiedlichen Parametern Verglichen.

Abbildung 4: Vergleich der Nachgiebigkeiten

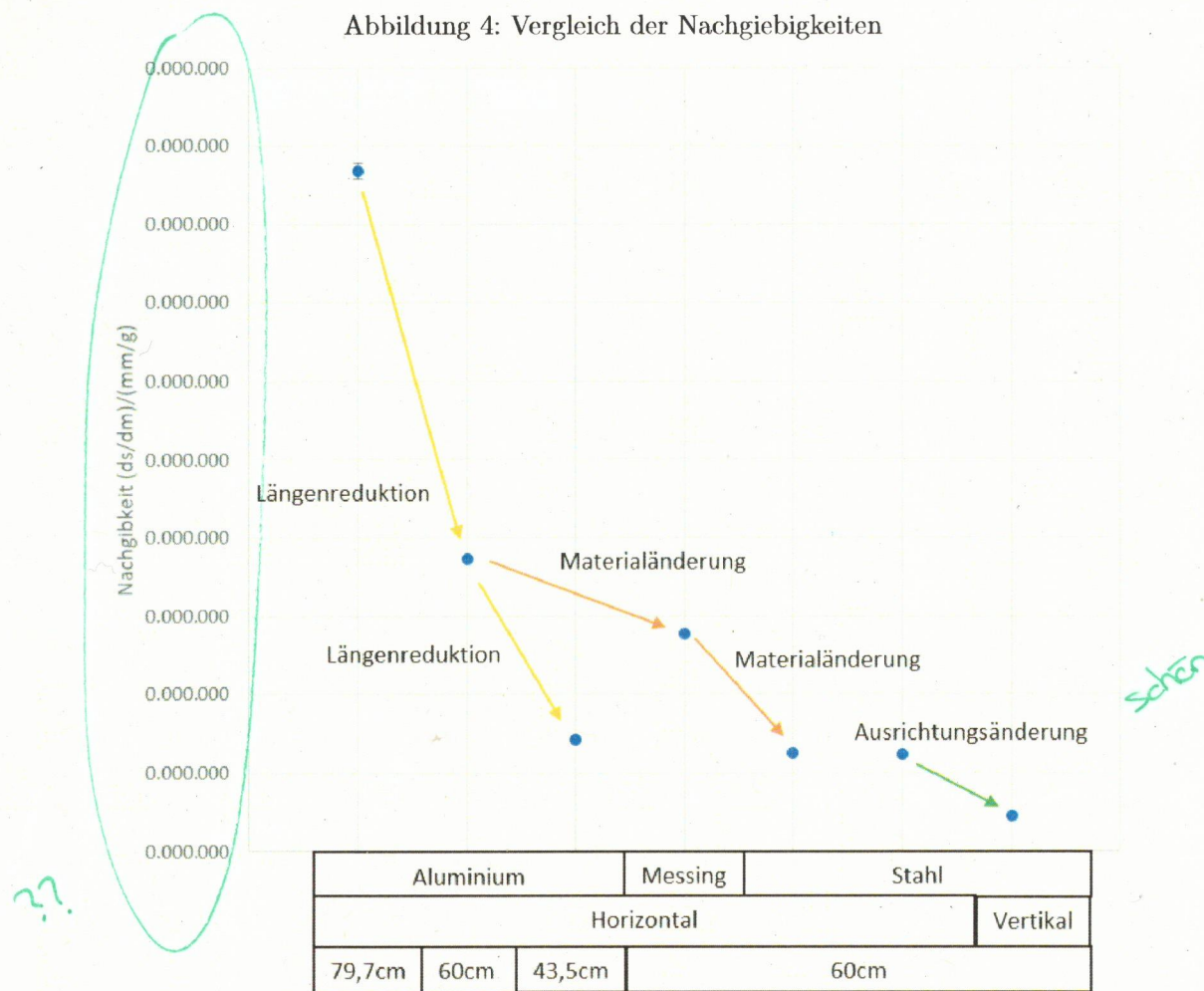


Tabelle 3: Werte und Parameter zum Vergleich der Nachgiebigkeit

Nr.	Material	Abstand l/cm	Ausrichtung	(ds/dm)/(mm/g)	Fehler auf ds/dm
1	Aluminium	79,7	Horizontal	0,008672	0,000103
2	Aluminium	60	Horizontal	0,003730	0,000009
3	Aluminium	43,5	Horizontal	0,001430	0,000003
4	Messing	60	Horizontal	0,002769	0,000006
5	Stahl	60	Horizontal	0,001245	0,000002
6	Stahl	60	Horizontal	0,001244	0,000001
7	Stahl	60	Vertikal	0,000446	0,000001

2.4 Berechnung des Elastizitätsmodul

Um das Elastizitätsmodul zu bestimmen, betrachten wir zunächst den in Kap. 1.2 erwähnten Biegepeil:

$$s = \frac{1}{E} \frac{l^3}{4bh^3} \cdot F \quad (2.15)$$

Nun setzen wir für die Kraft F in die Gleichung $g \cdot m$ ein und bringen die Gleichung in Differentialform:

$$ds = \frac{1}{E} \frac{l^3}{4bh^3} \cdot g \cdot dm \quad (2.16)$$

Daraus folgt:

$$\frac{ds}{dm} = \frac{1}{E} \frac{l^3 \cdot g}{4bh^3} \quad (2.17)$$

$\frac{ds}{dm}$ ist dabei gerade die in 2.3 beschriebene Nachgiebigkeit β . Also gilt:

$$E = \frac{1}{\beta} \frac{l^3 \cdot g}{4bh^3} \quad (2.18)$$

Für Messing benötigen wir den Fehler, da wir aus einem Wert für E keine Standardabweichung bilden können. Obwohl wir den Fehler für Aluminium und Stahl nicht ausdrücklich benötigen, wird er dennoch berechnet.

Mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnen wir den Fehler auf den Elastizitätsmodul der einzelnen Messreihen:

$$s_E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial \beta}\right)^2 \cdot s_\beta^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial l}\right)^2 \cdot s_l^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial h}\right)^2 \cdot s_h^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b}\right)^2 \cdot s_b^2} \quad (2.19)$$

$$s_E = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{l^3 \cdot g}{4 \cdot h^3 \cdot b} \sqrt{\frac{1}{\beta^2} \cdot s_\beta^2 + \frac{9}{l^2} \cdot s_l^2 + \frac{9}{h^2} \cdot s_h^2 + \frac{1}{b^2} \cdot s_b^2} \quad (2.20)$$

Da wir für Aluminium und Stahl jeweils drei Messreihen haben, können wir für diese Materialien die Standardabweichung s berechnen:

$$s_E = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (E_i - \bar{E})^2} \quad (2.21)$$

und daraus können wir die Standardabweichung des Mittelwerts für Aluminium und Stahl mit der Formel

$$s_{\bar{E}} = \frac{s_E}{\sqrt{3}} \quad (2.22)$$

berechnen.

Tabelle 4: Add caption

Nr.	Material	l in cm	Ausr.	$(\frac{ds}{dm})/(\frac{mm}{g})$	$s_{ds/dm}$	$E/\frac{N}{mm^2} \cdot 10^3$	s_E	\bar{E}	$s_{\bar{E}}$	$S_{\bar{E}}$
1	Alu	79,7	Horiz.	0,008672	$1,03 \cdot 10^{-4}$	67	6	66,2	0,5	0,3
2	Alu	60,0	Horiz.	0,003730	$9 \cdot 10^{-6}$	66	5			
3	Alu	43,5	Horiz.	0,001430	$3 \cdot 10^{-6}$	66	6			
4	Messing	60,0	Horiz.	0,002769	$6 \cdot 10^{-6}$	90	6	90,0		
5	Stahl	60,0	Horiz.	0,001245	$2 \cdot 10^{-6}$	203	14	202,6	0,9	0,5
6	Stahl	60,0	Horiz.	0,001244	$1 \cdot 10^{-6}$	203	14			
7	Stahl	60,0	Vert.	0,000446	$1 \cdot 10^{-6}$	202	21			

Die Ergebnisse für das Elastizitätsmodul von Aluminium sind also:

$$E_A = (66,2 \pm 0,3) \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \quad (2.23)$$

für Messing:

$$E_A = (90 \pm 6) \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \quad (2.24)$$

und für Stahl:

$$E_A = (202,6 \pm 0,5) \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \quad (2.25)$$

3 Fehleranalyse

Es gibt einige Variablen, die letztendlich in das Elastizitätsmodul einfließen:

$$E = \frac{1}{\beta} \frac{l^3 \cdot g}{4bh^3} \quad (3.1)$$

Der Abstand l zwischen den beiden Schneiden geht in der dritten Potenz in die Berechnung von E ein und konnte nur mit einer Ungenauigkeit von $\pm 0,2$ cm bestimmt werden. Die Höhe h und die Breite b hingegen konnte mittels einer Mikrometerschraube mit einer Unsicherheit von $\pm 0,001$ cm bestimmt werden was verglichen mit der Ungenauigkeit von l recht klein ist. Allerdings ist l auch deutlich größer als b und h . Trotzdem ist der relative Fehler von l in der Regel etwas größer als der von b und h .

Eine weitere Fehlerquelle ist die Masse der Gewichte. Diese wurden nur stichprobenartig gemessen und hatten eine Ungenauigkeit von etwa $\pm 0,1$ g. Entsprechend ist die Unsicherheit bei 6 Gewichten nur noch $s_6 = 0,2g\sqrt{6} \approx 0,3$ und bei 12 Gewichten nur noch $s_{12} = 0,1g\sqrt{12} \approx 0,3$ Einheit

Auch die Messgenauigkeit der Auslenkung ist eine Fehlerquelle. Besonders groß ist der relative Fehler, wenn die Länge l verhältnismäßig kurz und der Elastizitätsmodul des Materials entsprechend groß ist, denn dann ist die gemessene Auslenkung sehr klein. Man kann das zu einem gewissen Grad ausgleichen, indem man mehr Gewicht an die Halterung hängt, was die Auslenkung vergrößert, allerdings bildet es immer noch eine Fehlerquelle.

4 Diskussion

Von Breite und Höhe der Stäbe und vom Abstand der Schneien, hatte der Abstand l der Schneien den größten relativen Fehler. Trotzdem waren die relativen Fehler recht nah beieinander. Ein systematischer Fehler ist, dass die Aufhängung, an der die Gewichte befestigt werden, auch ein Eigengewicht von $(50,30 \pm 0,01)$ g haben, aber die dadurch entstandene Auslenkung wurde beim Messen direkt von der gemessenen Auslenkung abgezogen. Und da wir uns noch bei sehr kleinen Auslenkungen im Bereich der Gültigkeit des Hookschen Gesetzes befinden, spielt diese Größe für die Berechnung des Elastizitätsmoduls keine Rolle. Ein weiterer systematischer Fehler ist die Tatsache, dass das Messgerät zur Messung der Auslenkung auch eine kleine Kraft auf den entsprechenden Stab ausübt. Allerdings ist diese Kraft verglichen mit der Kraft der angehängten Massen in der Regel sehr klein.

Es wurden insgesamt sieben Messreihen durchgeführt. Bei Aluminium und Stahl jeweils 3. Bei Messing hingegen wurde nur eine durchgeführt. Dies erklärt, warum die Standardabweichung für Messing deutlich höher ist als die von Stahl und Aluminium. Entsprechend ist der relative Fehler dort deutlich größer.

Die Werte für Stahl konnten recht gut gemessen werden, da es ein relativ hohes Elastizitätsmodul hat. Durch das hohe Elastizitätsmodul lässt sich der Stab nicht so leicht biegen. Dies minimiert den Einfluss von Randeffect, wie zum Beispiel die Kraft, welche von der Spitze des Messgeräts auf den Stab ausgeübt wird. Zusätzlich haben wir von Stahl die meisten Messwerte, was auch dazu beiträgt den Elastizitätsmodul von Stahl genauer zu berechnen. Deshalb ist der gefundene Wert für den Elastizitätsmodul von Stahl vermutlich am nächsten am "wahren Wert" dran.

Bei Messing ist das Elastizitätsmodul halb so groß. Randeffecte haben also einen größeren Einfluss auf das Ergebnis. Der Hauptgrund für die hohe relative Ungenauigkeit ist die Anzahl der Messreihen und die geringe Anzahl an Messpunkten.

Der einzige Wert der seinen Wert wahrscheinlich etwas weiter verfehlt ist der Wert für Aluminium. Aluminium hat den kleinsten Elastizitätsmodul von den drei Materialien und biegt sich deshalb am leichtesten. Deshalb können äußere Einflüsse das Ergebnis einfacher beeinflussen. Wir haben bei unserer Messung von Auslenkung in Abhängigkeit der Länge l Aluminium in der waagerechten Ausrichtung benutzt, weshalb wir zwei Messreihen haben, in denen die Randeffecte größeren Einfluss haben. Zusätzlich haben diese Messreihen auch weniger Werte als die anderen Messreihen.

Tatsächlich ist bei der letzten Messreihe aufgefallen, dass die gemessene Auslenkung nach Abnahme der Gewichte etwa $-0,07$ mm war. Danach wurde das Messgerät wieder auf 0 gestellt und eine neue Messung gemacht. Nach Abnahme der Gewichte bei dieser Messung war die gemessene Auslenkung dann $0,1$ mm. Dies ist also ein weiterer Indikator dafür, dass die Werte von anderen Effekten beeinflusst worden sind.

Eine weitere Möglichkeit ist auch, dass der Aluminium Stab schon plastisch verformt wurde,

da er sehr leicht gebogen werden kann, und deshalb einige Werte verfälscht wurden.

5 Zusammenfassung

1. Wir haben verschiedene Materialien verglichen und sehen nun einen klaren Unterschied zwischen den Elastizitätsmodulen dieser.

Für das Elastizitätsmodul von Aluminium haben wir den Wert

$$\beta_{\text{Aluminium}} = (0,003730 \pm 0,000009) \text{ mm/g} \quad (5.1)$$

gefunden. Für Messing ergibt sich:

$$\beta_{\text{Messing}} = (0,002769 \pm 0,000006) \text{ mm/g} \quad (5.2)$$

und für Stahl bekommen wir:

$$\beta_{\text{Stahl}} = (0,001245 \pm 0,000002) \text{ mm/g} \quad (5.3)$$

Man kann sehen, dass Aluminium wesentlich nachgiebiger ist als Messing oder sogar Stahl.

2. Wir haben auch verschiedenen Ausrichtungen eines Stabes aus Stahl verglichen und haben verschiedene Nachgiebigkeiten festgestellt. Für den horizontalen Stab ergab sich:

$$\beta_{\text{Horizontal}} = (0,001244 \pm 0,000001) \text{ mm/g} \quad (5.4)$$

Für den vertikalen Fall hingegen:

$$\beta_{\text{Vertikal}} = (0,000446 \pm 0,000001) \text{ mm/g} \quad (5.5)$$

Wie erwartet ist der horizontale Stab sehr viel nachgiebiger als der Vertikale.

3. Zuletzt haben wir verschiedene Längen von horizontalen Aluminiumstäben verglichen. Wir haben für den kurzen Stab den Wert:

$$\beta_{\text{kurz}} = (0,001430 \pm 0,000003) \text{ mm/g} \quad (5.6)$$

und für den langen Stab den Wert:

$$\beta_{\text{lang}} = (0,0087 \pm 0,0001) \text{ mm/g} \quad (5.7)$$

erhalten.

Auch hier können wir klar sehen, dass der lange Stab eine sehr viel höhere Nachgiebigkeit besitzt.

4. Aus allen Messungen ergeben sich für das Elastizitätsmodul die folgende Werte.

Für das Elastizitätsmodul von Aluminium erhalten wir:

$$E_{\text{Aluminium}} = (66,2 \pm 0,3) \cdot 10^3 \text{N/mm}^2 \quad (5.8)$$

für Messing kommen wir auf:

$$E_{\text{Messing}} = (90 \pm 6) \cdot 10^3 \text{N/mm}^2 \quad (5.9)$$

und für Stahl ergibt sich:

$$E_{\text{Stahl}} = (202,6 \pm 0,5) \cdot 10^3 \text{N/mm}^2 \quad (5.10)$$

Wir sehen also einen klaren Verlauf vom weichen Aluminium über das etwas härtere Messing hin zum festen Stahl.

6 Literatur

- [1] Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche $g = 9,807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Taschenbuch der Physik, Horst Kuchlin, 21. Auflage
- [2] Handbuch Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 1, Teil B: Physikalische Grundlagen, Stand 04/2017, Seite 14, Abbildung 2.1
- [3] Handbuch Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 1, Teil B: Physikalische Grundlagen, Stand 04/2017, Seite 15, Abbildung 2.2

7 Anhang

7.1 Wichtige Parameter

Tabelle 5: Angaben

Angaben	
L /mm	600
L _k /mm	435
L _l /mm	797
g /m/s ²	9,807
g /mm/s ²	9807

Tabelle 6: Fehler auf die Angaben

Fehler	
s _l /mm	2
s _b /mm	0,01
s _h /mm	0,01
s _{} /mm	0,004
s _{<h>} /mm	0,004
s _m /g	0,10
s _x /mm	0,01
s _{<x>} /mm	0,007

Tabelle 7: Vermessung der Stäbe

Vermessung Stäbe							
	Aluminium		Messing		Stahl		
	Höhe h	Breite b	Höhe h	Breite b	Höhe h	Breite b	
1	9,975	6	9,96	5,97	9,975	5,945	
2	9,96	5,995	9,965	5,975	9,965	5,94	
3	9,965	5,995	9,975	5,97	9,96	5,945	
4	9,955	6,01	9,955	5,975	9,965	5,94	
5	9,96	5,995	9,96	5,975	9,97	5,945	
Mittelwert	9,963	5,999	9,963	5,973	9,967	5,943	
Standartabweichung	0,007582875	0,006519202	0,007582875	0,002738613	0,005700877	0,002738613	
Mittlererfehler	0,003391165	0,002915476	0,003391165	0,001224745	0,00254951	0,001224745	

7.2 Werte zur Material-Abhängigkeit

Tabelle 8: Messwerte zur Material-Abhängigkeit: Aluminium

Alluminium									
Nummer	m /g	$x_{A, \text{hin}} / \text{mm}$	$x_{A, \text{zurück}} / \text{mm}$	$\langle x_A \rangle / \text{mm}$	Nummer	m /g	$x_{A, \text{hin}} / \text{mm}$	$x_{A, \text{zurück}} / \text{mm}$	$\langle x_A \rangle / \text{mm}$
0	0	0	0	0,000	0	0	0	0	0,000
1	50	0,18	0,19	0,185	1	100	0,38	0,37	0,375
2	100	0,39	0,38	0,385	2	150	0,56	0,56	0,560
3	150	0,57	0,57	0,570	3	200	0,75	0,74	0,745
4	200	0,76	0,75	0,755	4	300	1,12	1,13	1,125
5	250	0,95	0,94	0,945	5	350	1,3	1,31	1,305
6	300	1,14	1,13	1,135	6	450	1,67	1,68	1,675
7	350	1,3	1,32	1,31	7	500	1,87	1,85	1,860
8	450	1,7			8	600	2,24		

Tabelle 9: Lineare Regression zur Material-Abhängigkeit: Aluminium

Lineare Regression für Aluminium (Materialabhängigkeit)								
x = m /g	y = x _A /mm	x - <x> /g	(x - <x>) ² /g ²	(x - <x>)*y /g*mm	a+b*x /mm	v = y-a-b*x /mm	v ² /mm ²	
0	0	-233,82	54673,44	0,00	0,004	-0,0043	0,0000	
50	0,18	-183,82	33791,09	-33,09	0,191	-0,0108	0,0001	
100	0,39	-133,82	17908,74	-52,19	0,377	0,0127	0,0002	
150	0,57	-83,82	7026,38	-47,78	0,564	0,0062	0,0000	
200	0,76	-33,82	1144,03	-25,71	0,750	0,0097	0,0001	
250	0,95	16,18	261,68	15,37	0,937	0,0132	0,0002	
300	1,14	66,18	4379,33	75,44	1,123	0,0167	0,0003	
350	1,3	116,18	13496,97	151,03	1,310	-0,0098	0,0001	
450	1,7	216,18	46732,27	367,50	1,683	0,0172	0,0003	
0	0	-233,82	54673,44	0,00	0,004	-0,0043	0,0000	
50	0,19	-183,82	33791,09	-34,93	0,191	-0,0008	0,0000	
100	0,38	-133,82	17908,74	-50,85	0,377	0,0027	0,0000	
150	0,57	-83,82	7026,38	-47,78	0,564	0,0062	0,0000	
200	0,75	-33,82	1144,03	-25,37	0,750	-0,0003	0,0000	
250	0,94	16,18	261,68	15,21	0,937	0,0032	0,0000	
300	1,13	66,18	4379,33	74,78	1,123	0,0067	0,0000	
350	1,32	116,18	13496,97	153,35	1,310	0,0102	0,0001	
0	0	-233,82	54673,44	0,00	0,004	-0,0043	0,0000	
100	0,38	-133,82	17908,74	-50,85	0,377	0,0027	0,0000	
150	0,56	-83,82	7026,38	-46,94	0,564	-0,0038	0,0000	
200	0,75	-33,82	1144,03	-25,37	0,750	-0,0003	0,0000	
300	1,12	66,18	4379,33	74,12	1,123	-0,0033	0,0000	
350	1,3	116,18	13496,97	151,03	1,310	-0,0098	0,0001	
450	1,67	216,18	46732,27	361,01	1,683	-0,0128	0,0002	
500	1,87	266,18	70849,91	497,75	1,869	0,0007	0,0000	
600	2,24	366,18	134085,21	820,24	2,242	-0,0023	0,0000	
0	0	-233,82	54673,44	0,00	0,004	-0,0043	0,0000	
100	0,37	-133,82	17908,74	-49,51	0,377	-0,0073	0,0001	
150	0,56	-83,82	7026,38	-46,94	0,564	-0,0038	0,0000	
200	0,74	-33,82	1144,03	-25,03	0,750	-0,0103	0,0001	
300	1,13	66,18	4379,33	74,78	1,123	0,0067	0,0000	
350	1,31	116,18	13496,97	152,19	1,310	0,0002	0,0000	
450	1,68	216,18	46732,27	363,18	1,683	-0,0028	0,0000	
500	1,85	266,18	70849,91	492,43	1,869	-0,0193	0,0004	
Σ			878602,94	3277,06			0,0024	
⟨⟩	234	0,88						

b /mm/g	0,003729852
a /mm	0,00434346
s /mm	0,008718673
s _b /mm/g	0,000009
s _a /mm	0,002665658

N-2
32,00

angepasst
auf 1. Nachkommastelle runden

Tabelle 10: Messwerte zur Material-Abhängigkeit: Messing

Messing									
Nummer	m /g	x _{M, hin} /mm	x _{M, zurück} /mm	<x _M > /mm	Nummer	m /g	x _{M, hin} /mm	x _{M, zurück} /mm	<x _M > /mm
0	0	0	0	0,000	0	0	0	0	0,000
1	100	0,27	0,26	0,265	1	200	0,56	0,55	0,555
2	200	0,55	0,55	0,550	2	300	0,83	0,81	0,820
3	300	0,82	0,82	0,820	3	350	0,98	0,97	0,975
4	400	1,1	1,11	1,105	4	400	1,11	1,1	1,105
5	500	1,38	1,38	1,380	5	500	1,4	1,38	1,390
6	700	1,94	1,94	1,940	6	600	1,66	1,66	1,660
7	750	2,07			7	700	1,92		

Tabelle 13: Lineare Regression zur Material-Abhängigkeit: Stahl

Lineare Regression für Stahl (Materialabhängigkeit)							
x = m /g	y = <x> /mm	x - <x> /g	(x - <x>) ² /g ²	(x - <x>)*y /g*mm	a+b*x /mm	v = y-a-b*x /mm	v ² /mm ²
0	0	-540,63	292275,39	0,00	0,001	-0,0006	0,0000
200	0,25	-340,63	116025,39	-85,16	0,250	0,0003	0,0000
400	0,49	-140,63	19775,39	-68,91	0,499	-0,0087	0,0001
600	0,74	59,38	3525,39	43,94	0,748	-0,0077	0,0001
800	1	259,38	67275,39	259,38	0,997	0,0033	0,0000
900	1,12	359,38	129150,39	402,50	1,121	-0,0012	0,0000
1000	1,25	459,38	211025,39	574,22	1,246	0,0043	0,0000
1200	1,49	659,38	434775,39	982,47	1,495	-0,0047	0,0000
0	0	-540,63	292275,39	0,00	0,001	-0,0006	0,0000
200	0,26	-340,63	116025,39	-88,56	0,250	0,0103	0,0001
400	0,5	-140,63	19775,39	-70,31	0,499	0,0013	0,0000
600	0,75	59,38	3525,39	44,53	0,748	0,0023	0,0000
800	1	259,38	67275,39	259,38	0,997	0,0033	0,0000
900	1,12	359,38	129150,39	402,50	1,121	-0,0012	0,0000
1000	1,25	459,38	211025,39	574,22	1,246	0,0043	0,0000
0	0	-540,63	292275,39	0,00	0,001	-0,0006	0,0000
100	0,13	-440,63	194150,39	-57,28	0,125	0,0049	0,0000
200	0,25	-340,63	116025,39	-85,16	0,250	0,0003	0,0000
400	0,5	-140,63	19775,39	-70,31	0,499	0,0013	0,0000
500	0,62	-40,63	1650,39	-25,19	0,623	-0,0032	0,0000
700	0,87	159,38	25400,39	138,66	0,872	-0,0022	0,0000
800	1	259,38	67275,39	259,38	0,997	0,0033	0,0000
900	1,12	359,38	129150,39	402,50	1,121	-0,0012	0,0000
1100	1,37	559,38	312900,39	766,34	1,370	-0,0002	0,0000
0	0	-540,63	292275,39	0,00	0,001	-0,0006	0,0000
100	0,12	-440,63	194150,39	-52,88	0,125	-0,0051	0,0000
200	0,25	-340,63	116025,39	-85,16	0,250	0,0003	0,0000
400	0,5	-140,63	19775,39	-70,31	0,499	0,0013	0,0000
500	0,62	-40,63	1650,39	-25,19	0,623	-0,0032	0,0000
700	0,87	159,38	25400,39	138,66	0,872	-0,0022	0,0000
800	1	259,38	67275,39	259,38	0,997	0,0033	0,0000
900	1,12	359,38	129150,39	402,50	1,121	-0,0012	0,0000
Σ			4117187,50	5126,13			0,0004
<>	541	0,67					

b /mm/g	0,001245055
a /mm	0,000642125
s /mm	0,003839671
s_b /mm/g	0,000002
s_a /mm	0,001240175

N
30,00

7.3 Werte zur AusrichtungsAbhängigkeit

Tabelle 14: Messwerte zur Ausrichtungs-Abhängigkeit: Waagrecht

Waagrecht											
Nummer	m/g	$x_{W, \text{hin}} / \text{mm}$	$x_{W, \text{zurück}} / \text{mm}$	Nummer	m/g	$x_{W, \text{hin}} / \text{mm}$	$x_{W, \text{zurück}} / \text{mm}$	Nummer	m/g	$x_{W, \text{hin}} / \text{mm}$	$x_{W, \text{zurück}} / \text{mm}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	100	0,12	0,12	1	200	0,24	0,25	1	100	0,11	0,12
2	300	0,38	0,38	2	250	0,32	0,32	2	300	0,37	0,38
3	400	0,51	0,5	3	350	0,44	0,44	3	500	0,62	0,62
4	450	0,56	0,56	4	450	0,55	0,56	4	550	0,68	0,69
5	550	0,68	0,68	5	650	0,81	0,81	5	600	0,74	0,75
6	650	0,81	0,81	6	850	1,06	1,06	6	650	0,81	0,81
7	850	1,06	1,06	7	950	1,18	1,18	7	850	1,06	1,06
9	900	1,12	1,12	9	1150	1,43	1,43	9	1050	1,3	1,3
10	950	1,18	1,18	10	1200	1,49	1,49	10	1100	1,37	1,37
11	1050	1,3	1,3	11	1250	1,56	1,56	11	1200	1,49	1,49
12	1250	1,56	1,56	12	1350	1,68	1,68	12	1300	1,62	1,62
13	1350	1,68		13	1450	1,8		13	1350	1,68	

Tabelle 15: Lineare Regression zur Ausrichtungs-Abhängigkeit: Waagrecht

Lineare Regression für Waagrecht (Ausrichtungsabhängig)							
x = m /g	y = $\langle x_{ij} \rangle /mm$	x - $\langle x \rangle /g$	(x - $\langle x \rangle)^2 /g^2$	x - $\langle x \rangle \cdot y /g \cdot mm$	a+b*x /mm	v = y-a-b*x /mm	v ² /mm ²
0	0	-703,33	494677,78	0,00	0,000	0,0000	0,000000
100	0,12	-603,33	364011,11	-72,40	0,124	-0,0044	0,000020
300	0,38	-403,33	162677,78	-153,27	0,373	0,0067	0,000045
400	0,51	-303,33	92011,11	-154,70	0,498	0,0123	0,000152
450	0,56	-253,33	64177,78	-141,87	0,560	0,0001	0,000000
550	0,68	-153,33	23511,11	-104,27	0,684	-0,0043	0,000018
650	0,81	-53,33	2844,44	-43,20	0,809	0,0013	0,000002
850	1,06	146,67	21511,11	155,47	1,058	0,0025	0,000006
900	1,12	196,67	38677,78	220,27	1,120	0,0003	0,000000
950	1,18	246,67	60844,44	291,07	1,182	-0,0020	0,000004
1050	1,3	346,67	120177,78	450,67	1,306	-0,0064	0,000041
1250	1,56	546,67	298844,44	852,80	1,555	0,0048	0,000023
1350	1,68	646,67	418177,78	1086,40	1,680	0,0004	0,000000
0	0	-703,33	494677,78	0,00	0,000	0,0000	0,000000
100	0,12	-603,33	364011,11	-72,40	0,124	-0,0044	0,000020
300	0,38	-403,33	162677,78	-153,27	0,373	0,0067	0,000045
400	0,5	-303,33	92011,11	-151,67	0,498	0,0023	0,000005
450	0,56	-253,33	64177,78	-141,87	0,560	0,0001	0,000000
550	0,68	-153,33	23511,11	-104,27	0,684	-0,0043	0,000018
650	0,81	-53,33	2844,44	-43,20	0,809	0,0013	0,000002
850	1,06	146,67	21511,11	155,47	1,058	0,0025	0,000006
900	1,12	196,67	38677,78	220,27	1,120	0,0003	0,000000
950	1,18	246,67	60844,44	291,07	1,182	-0,0020	0,000004
1050	1,3	346,67	120177,78	450,67	1,306	-0,0064	0,000041
1250	1,56	546,67	298844,44	852,80	1,555	0,0048	0,000023
0	0	-703,33	494677,78	0,00	0,000	0,0000	0,000000
200	0,24	-503,33	253344,44	-120,80	0,249	-0,0089	0,000078
250	0,32	-453,33	205511,11	-145,07	0,311	0,0089	0,000080
350	0,44	-353,33	124844,44	-155,47	0,435	0,0045	0,000021
450	0,55	-253,33	64177,78	-139,33	0,560	-0,0099	0,000098
650	0,81	-53,33	2844,44	-43,20	0,809	0,0013	0,000002
850	1,06	146,67	21511,11	155,47	1,058	0,0025	0,000006
950	1,18	246,67	60844,44	291,07	1,182	-0,0020	0,000004
1150	1,43	446,67	199511,11	638,73	1,431	-0,0008	0,000001
1200	1,49	496,67	246677,78	740,03	1,493	-0,0030	0,000009
1250	1,56	546,67	298844,44	852,80	1,555	0,0048	0,000023
1350	1,68	646,67	418177,78	1086,40	1,680	0,0004	0,000000
1450	1,8	746,67	557511,11	1344,00	1,804	-0,0040	0,000016
0	0	-703,33	494677,78	0,00	0,000	0,0000	0,000000
200	0,25	-503,33	253344,44	-125,83	0,249	0,0011	0,000001
250	0,32	-453,33	205511,11	-145,07	0,311	0,0089	0,000080
350	0,44	-353,33	124844,44	-155,47	0,435	0,0045	0,000021
450	0,56	-253,33	64177,78	-141,87	0,560	0,0001	0,000000
650	0,81	-53,33	2844,44	-43,20	0,809	0,0013	0,000002
850	1,06	146,67	21511,11	155,47	1,058	0,0025	0,000006
950	1,18	246,67	60844,44	291,07	1,182	-0,0020	0,000004
1150	1,43	446,67	199511,11	638,73	1,431	-0,0008	0,000001
1200	1,49	496,67	246677,78	740,03	1,493	-0,0030	0,000009
1250	1,56	546,67	298844,44	852,80	1,555	0,0048	0,000023
1350	1,68	646,67	418177,78	1086,40	1,680	0,0004	0,000000
0	0	-703,33	494677,78	0,00	0,000	0,0000	0,000000
100	0,11	-603,33	364011,11	-66,37	0,124	-0,0144	0,000208
300	0,37	-403,33	162677,78	-149,23	0,373	-0,0033	0,000011
500	0,62	-203,33	41344,44	-126,07	0,622	-0,0021	0,000004
550	0,68	-153,33	23511,11	-104,27	0,684	-0,0043	0,000018
600	0,74	-103,33	10677,78	-76,47	0,747	-0,0065	0,000042
650	0,81	-53,33	2844,44	-43,20	0,809	0,0013	0,000002
850	1,06	146,67	21511,11	155,47	1,058	0,0025	0,000006
1050	1,3	346,67	120177,78	450,67	1,306	-0,0064	0,000041
1100	1,37	396,67	157344,44	543,43	1,369	0,0014	0,000002
1200	1,49	496,67	246677,78	740,03	1,493	-0,0030	0,000009
1300	1,62	596,67	356011,11	966,60	1,617	0,0026	0,000007
1350	1,68	646,67	418177,78	1086,40	1,680	0,0004	0,000000
0	0	-703,33	494677,78	0,00	0,000	0,0000	0,000000
100	0,12	-603,33	364011,11	-72,40	0,124	-0,0044	0,000020
300	0,38	-403,33	162677,78	-153,27	0,373	0,0067	0,000045
500	0,62	-203,33	41344,44	-126,07	0,622	-0,0021	0,000004
550	0,69	-153,33	23511,11	-105,80	0,684	0,0057	0,000033
600	0,75	-103,33	10677,78	-77,50	0,747	0,0035	0,000012
650	0,81	-53,33	2844,44	-43,20	0,809	0,0013	0,000002
850	1,06	146,67	21511,11	155,47	1,058	0,0025	0,000006
1050	1,3	346,67	120177,78	450,67	1,306	-0,0064	0,000041
1100	1,37	396,67	157344,44	543,43	1,369	0,0014	0,000002
1200	1,49	496,67	246677,78	740,03	1,493	-0,0030	0,000009
1300	1,62	596,67	356011,11	966,60	1,617	0,0026	0,000007
Σ			13666666,67	17003,23			0,001489
$\langle x \rangle$	703	0,88					

b/mm/g	0,001244139
a/mm	2,22195E-05
s/mm	0,004515629
s _b /mm/g	0,000001
s _a /mm	0,00100866

N-2
73,00

Tabelle 16: Lösungen zur Lineare Regression für Waagrechte Ausrichtung mit den Zusätzlichen werten des Stahls aus der Messreihe zur Materialabhängigkeit

Mit zusatzwerten							
Σ				17783854,17	22129,36		0,001931
$\langle \rangle$	655	0,81					
b /mm/g	0,001244			N-2			
a /mm	0,0002			105,00			
s_y /mm	0,004288						
s_b /mm/g	0,000001						
s_a /mm	0,0008						

Tabelle 17: Messwerte zur Ausrichtungs-Abhängigkeit: Senkrecht

Senkrecht											
Nummer	m /g	x _{S, hin} /mm	x _{S, zurück} /mm	Nummer	m /g	x _{S, hin} /mm	x _{S, zurück} /mm	Nummer	m /g	x _{S, hin} /mm	x _{S, zurück} /mm
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	200	0,08	0,09	1	100	0,05	0,04	1	100	0,04	0,05
2	400	0,17	0,18	2	300	0,13	0,14	2	150	0,07	0,07
3	600	0,26	0,27	3	500	0,22	0,22	3	350	0,15	0,16
4	800	0,35	0,35	4	700	0,31	0,31	4	550	0,24	0,24
5	1000	0,44	0,44	5	900	0,4	0,4	5	750	0,33	0,33
6	1200	0,54	0,53	6	1100	0,49	0,49	6	950	0,42	0,42
7	1400	0,62	0,62	7	1300	0,58	0,58	7	1150	0,51	0,51
9	1600	0,71	0,72	9	1500	0,67	0,67	9	1350	0,6	0,6
10	1800	0,8	0,8	10	1700	0,76	0,76	10	1550	0,69	0,69
11	2000	0,89	0,89	11	1900	0,85	0,85	11	1750	0,78	0,78
12	2200	0,98	0,98	12	2100	0,93	0,93	12	1950	0,87	0,87
13	2400	1,07		13	2300	1,02		13	2150	0,96	

Tabelle 18: Lineare Regression zur Ausrichtung-Abhängigkeit: Senkrecht

Lineare Regression für Senkrecht (Ausrichtungsabhängig)							
x = m/g	y = <x> /mm	x - <x> /g	(x - <x>) ² /g ²	(x - <x>)*y /g*mm	a+b*x /mm	v = y-a-b*x /mm	v ² /mm ²
0	0	-1048,67	1099701,78	0,00	-0,001	0,0015	0,000002
200	0,08	-848,67	720235,11	-67,89	0,088	-0,0077	0,000060
400	0,17	-648,67	420768,44	-110,27	0,177	-0,0069	0,000048
600	0,26	-448,67	201301,78	-116,65	0,266	-0,0061	0,000037
800	0,35	-248,67	61835,11	-87,03	0,355	-0,0053	0,000028
1000	0,44	-48,67	2368,44	-21,41	0,444	-0,0044	0,000020
1200	0,54	151,33	22901,78	81,72	0,534	0,0064	0,000041
1400	0,62	351,33	123435,11	217,83	0,623	-0,0028	0,000008
1600	0,71	551,33	303968,44	391,45	0,712	-0,0020	0,000004
1800	0,8	751,33	564501,78	601,07	0,801	-0,0011	0,000001
2000	0,89	951,33	905035,11	846,69	0,890	-0,0003	0,000000
2200	0,98	1151,33	1325568,44	1128,31	0,980	0,0005	0,000000
2400	1,07	1351,33	1826101,78	1445,93	1,069	0,0013	0,000002
0	0	-1048,67	1099701,78	0,00	-0,001	0,0015	0,000002
200	0,09	-848,67	720235,11	-76,38	0,088	0,0023	0,000005
400	0,18	-648,67	420768,44	-116,76	0,177	0,0031	0,000010
600	0,27	-448,67	201301,78	-121,14	0,266	0,0039	0,000015
800	0,35	-248,67	61835,11	-87,03	0,355	-0,0055	0,000028
1000	0,44	-48,67	2368,44	-21,41	0,444	-0,0044	0,000020
1200	0,53	151,33	22901,78	80,21	0,534	-0,0036	0,000013
1400	0,62	351,33	123435,11	217,83	0,623	-0,0028	0,000008
1600	0,72	551,33	303968,44	396,96	0,712	0,0080	0,000064
1800	0,8	751,33	564501,78	601,07	0,801	-0,0011	0,000001
2000	0,89	951,33	905035,11	846,69	0,890	-0,0003	0,000000
2200	0,98	1151,33	1325568,44	1128,31	0,980	0,0005	0,000000
2400	0,98	1151,33	1325568,44	1128,31	0,980	0,0015	0,000002
0	0	-1048,67	1099701,78	0,00	-0,001	0,0069	0,000047
100	0,05	-948,67	899968,44	-47,43	0,043	-0,0023	0,000005
300	0,13	-748,67	560501,78	-97,33	0,132	-0,0015	0,000002
500	0,22	-548,67	301035,11	-120,71	0,221	-0,0007	0,000000
700	0,31	-348,67	121568,44	-108,09	0,311	0,0002	0,000000
900	0,4	-148,67	22101,78	-59,47	0,400	0,0010	0,000001
1100	0,49	51,33	2635,11	25,15	0,489	0,0018	0,000003
1300	0,58	251,33	63168,44	145,77	0,578	0,0026	0,000007
1500	0,67	451,33	203701,78	302,39	0,667	0,0034	0,000012
1700	0,76	651,33	424235,11	495,01	0,757	0,0043	0,000018
1900	0,85	851,33	724768,44	723,63	0,846	-0,0049	0,000024
2100	0,93	1051,33	1105301,78	977,74	0,935	-0,0041	0,000017
2300	1,02	1251,33	1565835,11	1276,36	1,024	0,0015	0,000002
0	0	-1048,67	1099701,78	0,00	-0,001	0,0015	0,000002
100	0,04	-948,67	899968,44	-37,95	0,043	-0,0031	0,000010
300	0,14	-748,67	560501,78	-104,81	0,132	0,0077	0,000059
500	0,22	-548,67	301035,11	-120,71	0,221	-0,0015	0,000002
700	0,31	-348,67	121568,44	-108,09	0,311	-0,0007	0,000000
900	0,4	-148,67	22101,78	-59,47	0,400	0,0002	0,000000
1100	0,49	51,33	2635,11	25,15	0,489	0,0010	0,000001
1300	0,58	251,33	63168,44	145,77	0,578	0,0018	0,000003
1500	0,67	451,33	203701,78	302,39	0,667	0,0026	0,000007
1700	0,76	651,33	424235,11	495,01	0,757	0,0034	0,000012
1900	0,85	851,33	724768,44	723,63	0,846	0,0043	0,000018
2100	0,93	1051,33	1105301,78	977,74	0,935	-0,0049	0,000024
2300	1,02	1251,33	1565835,11	1276,36	1,024	-0,0041	0,000017
0	0	-1048,67	1099701,78	0,00	-0,001	0,0015	0,000002
100	0,04	-948,67	899968,44	-37,95	0,043	-0,0031	0,000010
150	0,07	-898,67	807601,78	-62,91	0,065	0,0046	0,000021
350	0,15	-698,67	488135,11	-111,79	0,155	-0,0046	0,000021
550	0,24	-498,67	248668,44	-119,68	0,244	-0,0038	0,000014
750	0,33	-298,67	89201,78	-98,56	0,333	-0,0030	0,000009
950	0,42	-98,67	9735,11	-41,44	0,422	-0,0021	0,000005
1150	0,51	101,33	10268,44	51,68	0,511	-0,0013	0,000002
1350	0,6	301,33	90801,78	180,80	0,600	-0,0005	0,000000
1550	0,69	501,33	251335,11	345,92	0,690	0,0003	0,000000
1750	0,78	701,33	491868,44	547,04	0,779	0,0011	0,000001
1950	0,87	901,33	812401,78	784,16	0,868	0,0020	0,000004
2150	0,96	1101,33	1212935,11	1057,28	0,957	0,0028	0,000008
2350	1,05	1301,33	1713468,44	1330,40	1,046	0,0036	0,000012
0	0	-1048,67	1099701,78	0,00	-0,001	0,0015	0,000002
100	0,05	-948,67	899968,44	-47,43	0,043	0,0069	0,000047
150	0,07	-898,67	807601,78	-62,91	0,065	0,0046	0,000021
350	0,16	-698,67	488135,11	-111,79	0,155	0,0054	0,000029
550	0,24	-498,67	248668,44	-119,68	0,244	-0,0038	0,000014
750	0,33	-298,67	89201,78	-98,56	0,333	-0,0030	0,000009
950	0,42	-98,67	9735,11	-41,44	0,422	-0,0021	0,000005
1150	0,51	101,33	10268,44	51,68	0,511	-0,0013	0,000002
1350	0,6	301,33	90801,78	180,80	0,600	-0,0005	0,000000
1550	0,69	501,33	251335,11	345,92	0,690	0,0003	0,000000
1750	0,78	701,33	491868,44	547,04	0,779	0,0011	0,000001
1950	0,87	901,33	812401,78	784,16	0,868	0,0020	0,000004
Σ			3776486,67	16839,11			0,000925
<x>	1049	0,47					

b /mm/g	0,000445894
a /mm	-0,001460449
s /mm	0,003560368
s ₀ /mm/g	0,000001
s _a /mm	0,000736732

N-2
73,00

7.4 Werte zur Längen-Abhängigkeit

Tabelle 19: Messwerte zur Längenabhängigkeit: kurz

kurz							
Nummer	m /g	$x_{k, \text{hin}} / \text{mm}$	$x_{k, \text{zurück}} / \text{mm}$	Nummer	m /g	$x_{k, \text{hin}} / \text{mm}$	$x_{k, \text{zurück}} / \text{mm}$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	100	0,14	0,14	1	50	0,07	0,06
2	300	0,42	0,43	2	250	0,36	0,35
3	500	0,71	0,71	3	350	0,5	0,49
4	600	0,86	0,85	4	550	0,78	0,79
5	650	0,93	0,93	5	750	1,07	1,07
6	750	1,07		6	850	1,21	

Tabelle 20: Lineare Regression zur Längenabhängigkeit: kurz

Lineare Regression für kurz (Längenabhängigkeit)								
	$x = m / \text{g}$	$y = \langle x_k \rangle / \text{mm}$	$x - \langle x \rangle / \text{g}$	$(x - \langle x \rangle)^2 / \text{g}^2$	$(x - \langle x \rangle) * y / \text{g} * \text{mm}$	$a + b * x / \text{mm}$	$v = y - a - b * x / \text{mm}$	v^2 / mm^2
	0	0	-376,92	142071,01	0,00	-0,003	0,0027	0,0000
	100	0,14	-276,92	76686,39	-38,77	0,140	-0,0003	0,0000
	300	0,42	-76,92	5917,16	-32,31	0,426	-0,0062	0,0000
	500	0,71	123,08	15147,93	87,38	0,712	-0,0021	0,0000
	600	0,86	223,08	49763,31	191,85	0,855	0,0049	0,0000
	650	0,93	273,08	74571,01	253,96	0,927	0,0035	0,0000
	750	1,07	373,08	139186,39	399,19	1,070	0,0005	0,0000
	0	0	-376,92	142071,01	0,00	-0,003	0,0027	0,0000
	100	0,14	-276,92	76686,39	-38,77	0,140	-0,0003	0,0000
	300	0,43	-76,92	5917,16	-33,08	0,426	0,0038	0,0000
	500	0,71	123,08	15147,93	87,38	0,712	-0,0021	0,0000
	600	0,85	223,08	49763,31	189,62	0,855	-0,0051	0,0000
	650	0,93	273,08	74571,01	253,96	0,927	0,0035	0,0000
	0	0	-376,92	142071,01	0,00	-0,003	0,0027	0,0000
	50	0,07	-326,92	106878,70	-22,88	0,069	0,0012	0,0000
	250	0,36	-126,92	16109,47	-45,69	0,355	0,0053	0,0000
	350	0,5	-26,92	724,85	-13,46	0,498	0,0023	0,0000
	550	0,78	173,08	29955,62	135,00	0,784	-0,0036	0,0000
	750	1,07	373,08	139186,39	399,19	1,070	0,0005	0,0000
	850	1,21	473,08	223801,78	572,42	1,212	-0,0025	0,0000
	0	0	-376,92	142071,01	0,00	-0,003	0,0027	0,0000
	50	0,06	-326,92	106878,70	-19,62	0,069	-0,0088	0,0001
	250	0,35	-126,92	16109,47	-44,42	0,355	-0,0047	0,0000
	350	0,49	-26,92	724,85	-13,19	0,498	-0,0077	0,0001
	550	0,79	173,08	29955,62	136,73	0,784	0,0064	0,0000
	750	1,07	373,08	139186,39	399,19	1,070	0,0005	0,0000
Σ				1961153,85	2803,69			0,0004
$\langle x \rangle$	377	0,54						

$b / \text{mm/g}$	0,001429614
a / mm	-0,00270053
s / mm	0,003616766
$s_b / \text{mm/g}$	0,000003
s_a / mm	0,001164647

N-2
32,00

Tabelle 21: Messwerte zur Längenabhängigkeit: lang

lang							
Nummer	m /g	$x_i, \text{hin} / \text{mm}$	$x_i, \text{zurück} / \text{mm}$	Nummer	m /g	$x_i, \text{hin} / \text{mm}$	$x_i, \text{zurück} / \text{mm}$
0	0	0	0,07	0	0	0	-0,1
1	50	0,48	0,45	1	50	0,32	0,38
2	100	0,88	0,86	2	100	0,85	0,77
3	150	1,35	1,29	3	150	1,24	1,21
4	200	1,78	1,75	4	200	1,72	1,65
5	250	2,22	2,19	5	250	2,09	2,11
6	300	2,62		6	300	2,54	

Tabelle 22: Lineare Regression zur Längenabhängigkeit: lang

Lineare Regression für lang (Längenabhängigkeit)							
x = m /g	y = $\langle x_i \rangle$ /mm	x - $\langle x \rangle$ /g	$(x - \langle x \rangle)^2 / g^2$	$(x - \langle x \rangle) * y / g * mm$	a+b*x /mm	v = y-a-b*x /mm	v ² /mm ²
0	0	-138,46	19171,60	0,00	-0,019	0,0192	0,0004
50	0,48	-88,46	7825,44	-42,46	0,414	0,0656	0,0043
100	0,88	-38,46	1479,29	-33,85	0,848	0,0320	0,0010
150	1,35	11,54	133,14	15,58	1,282	0,0684	0,0047
200	1,78	61,54	3786,98	109,54	1,715	0,0648	0,0042
250	2,22	111,54	12440,83	247,62	2,149	0,0712	0,0051
300	2,62	161,54	26094,67	423,23	2,582	0,0376	0,0014
0	0,07	-138,46	19171,60	-9,69	-0,019	0,0892	0,0080
50	0,45	-88,46	7825,44	-39,81	0,414	0,0356	0,0013
100	0,86	-38,46	1479,29	-33,08	0,848	0,0120	0,0001
150	1,29	11,54	133,14	14,88	1,282	0,0084	0,0001
200	1,75	61,54	3786,98	107,69	1,715	0,0348	0,0012
250	2,19	111,54	12440,83	244,27	2,149	0,0412	0,0017
0	0	-138,46	19171,60	0,00	-0,019	0,0192	0,0004
50	0,32	-88,46	7825,44	-28,31	0,414	-0,0944	0,0089
100	0,85	-38,46	1479,29	-32,69	0,848	0,0020	0,0000
150	1,24	11,54	133,14	14,31	1,282	-0,0416	0,0017
200	1,72	61,54	3786,98	105,85	1,715	0,0048	0,0000
250	2,09	111,54	12440,83	233,12	2,149	-0,0588	0,0035
300	2,54	161,54	26094,67	410,31	2,582	-0,0424	0,0018
0	-0,1	-138,46	19171,60	13,85	-0,019	-0,0808	0,0065
50	0,38	-88,46	7825,44	-33,62	0,414	-0,0344	0,0012
100	0,77	-38,46	1479,29	-29,62	0,848	-0,0780	0,0061
150	1,21	11,54	133,14	13,96	1,282	-0,0716	0,0051
200	1,65	61,54	3786,98	101,54	1,715	-0,0652	0,0043
250	2,11	111,54	12440,83	235,35	2,149	-0,0388	0,0015
Σ			231538,46	2007,96			0,0744
$\langle \rangle$	138	1,18					

b /mm/g	0,008672259
a /mm	-0,01923588
s /mm	0,049791453
s_b /mm/g	0,000103
s_a /mm	0,016968168

N-2
30,00

Versuch 6

Messreihe 4

Zusammenfassung der Stäbe

	Aluminium		Messing		Stahl	
	Flöhe	Breite in mm	h in mm	l in mm	h in mm	l in mm
1	4,025 3,975	6,00	9,96	5,97	9,975	5,945
2	4,04 3,96	5,995	9,965	5,975	9,965	5,94
3	3,965	5,995	9,975	5,97	9,96	5,945
4	3,955 4,96	6,01	9,955	5,975	9,965	5,94
5	3,96	5,995	9,96	5,975	9,97	5,945
$\sum x_i$						

$s = 0,005$ mm
oder
 $s = 0,009$ mm
(nach Stäbe)

$\sum x_i$

hier



Masseanhang: $(50,30 \pm 0,01)$ g
Unregelmäßigkeit der Stäbe: $s_s = 0,01$ mm

Veränderliches Material

$L = (60 \pm 0,2)$ cm



Aluminium



flach

Masse m/g

Strecke s / mm
hinlegen

Strecke s / mm
wegnehmen

30

0,18

0,19

100

Fallen lassen
0,39

0,38

150

0,57

0,57

200

0,76

0,75

250

0,95

0,94

300

1,14

1,13

350

1,30

1,32

450

1,70

-

Massen	Soll	Tatsächliche Masse
Wage $s_m = 0,01\text{g}$	50	50,01
	100	100,11
Gewichte $s_m = 0,15\text{g}$	200	200,11

② Alles wie bei ①

Masse m / g	Strecke s / mm	
	hinlegen	wegnehmen
100	0,38	0,37
150	0,56	0,56
200	0,75	0,74
300	1,12	1,13
350	1,30	1,31
450	1,67	1,68
500	1,87	1,85
600	2,24	-

Messung
 $l = (60 \pm 0,2) \text{cm}$
 Flach

Masse	Strecke hinlegen	wegnehmen
100	0,28	0,26
200	0,55	0,55
300	0,82	0,82
400	1,10	1,11
500	1,38	1,38
700	1,94	1,94
750	2,07	-

②

Masse	Strecke	
	hinlegen	wegnehmen
200	0,56	0,55
300	0,83	0,82
350	0,98	0,97
400	1,11	1,10
500	1,40	1,38
600	1,66	1,66
700	1,92	-

Stahl $(=60 = 0,2)$ cm Stahl

③

Masse	Strecke	
	hinlegen	wegnehmen
200	0,25	0,26
400	0,49	0,50
600	0,74	0,75
800	1,00	1,00
900	1,12	1,12
1000	1,25	1,25
1200	1,49	-

Masse	Strecke	
	hinlegen	wegnehmen
100	0,13	0,12
200	0,25	0,25
400	0,50	0,50
500	0,62	0,62
700	0,87	0,87
800	1,00	1,00
900	1,12	1,12
1100	1,37	-

Veränderte Ausrichtung

$l = (60 \pm 2) \text{ cm}$

Stahl

Stach

①	Strecke		②	Strecke	
	Masse	hinzunehmen		Masse	wegzunehmen
	100	0,12		200	0,24
	300	0,38		250	0,32
	400	0,51		350	0,44
	450	0,56		450	0,55
	550	0,68		650	0,81
	650	0,81		850	1,06
	850	1,06		950	1,18
	900	1,12		1150	1,43
	950	1,18		1200	1,49
	1050	1,30		1250	1,56
	1250	1,56		1350	1,68
	1350	1,68		1450	1,80

Masse	Strecke hinzunehmen	wegzunehmen
100	0,12	0,12
300	0,37	0,38
500	0,62	0,62
550	0,68	0,69
600	0,74	0,75
650	0,81	0,81
850	1,06	1,06
1050	1,30	1,30
1100	1,37	1,37
1200	1,49	1,49
1300	1,62	1,62
1350	1,68	-

$$l = (60 \pm 2) \text{ cm}$$

Stahl

Wochkent

Masse	Strecke		Masse	Strecke	
	hinlegen	wegnehmen		hinlegen	wegnehmen
200	0,08	0,09	100	0,05	0,04
400	0,12	0,19	300	0,13	0,14
600	0,26	0,27	500	0,22	0,22
800	0,35	0,35	700	0,37	0,37
1000	0,44	0,44	900	0,40	0,40
1200	0,54	0,53	1100	0,49	0,49
1400	0,62	0,62	1300	0,58	0,58
1600	0,71	0,72	1500	0,67	0,67
1800	0,80	0,80	1700	0,76	0,76
2000	0,89	0,89	1900	0,85	0,85
2200	0,98	0,98	2100	0,93	0,94
2400	1,02	—	2300	1,02	—

~~Masse~~ ~~Strecke~~
~~hinlegen~~

Masse	Strecke	
	hinlegen	wegnehmen
100	0,04	0,05
150	0,07	0,07
350	0,15	0,16
550	0,24	0,24
750	0,33	0,33
950	0,42	0,42
1150	0,51	0,51
1350	0,60	0,60
1550	0,69	0,69
1750	0,78	0,78
1950	0,87	0,87
2150	0,96	—

zylinderförmige Längs

$l = (43,5 \pm 0,2) \text{ cm}$ Aluminium

Stach

Masse	Strecke hinlegen	wegmachen	Masse	Strecke hinlegen	wegmachen
100	0,14	0,14	50	0,07	0,06
300	0,42	0,43	250	0,36	0,35
500	0,71	0,71	350	0,50	0,49
600	0,86	0,85	550	0,78	0,79
650	0,93	0,98	750	1,07	1,07
750	1,07	-	850	1,21	-

$l = (79,7 \pm 0,2) \text{ cm}$ Stach Aluminium

Masse	Strecke hinlegen	wegmachen	Masse	Strecke hinlegen	wegmachen
50	0,48	0,45	50	0,32	0,38
100	0,88	0,86	100	0,85	0,77
150	1,35	1,29	150	1,24	1,21
200	1,78	1,75	200	1,72	1,65
250	2,22	2,19	250	2,09	2,01
300	2,62	-	300	2,54	-

Null wenn 0,07

Null wenn -0,10

VT 13.9.17

Cam

bitte nachtragen:

- Fehlerrechnung auf Gewichte
- Graphen (Fehlerbalken,
größer,
sichtbare Gitter,
Einheiten Achsen)