Universität Freiburg
Physiklabor für Anfänger
Ferienpraktikum im Sommersemester 2023

Versuch 4
Dichte

[redacted]

7. November 2024

Datum der Durchführung: 14. September 2023
Tutor: [redacted]

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuches

Ziel des Versuches ist es, von einem Reinmetall die Dichte ϱ_R und von einer Messinglegierung die Dichte ϱ_L mittels einer Federwaage zu bestimmen. Außerdem sollen die Anteile der Elemente in der Messing-Legierung bestimmt werden. Zunächst soll aber die Federwaage kalibriert werden.

2 Versuch

2.1 Aufbau

Der Aufbau (Abb. 1) besteht aus einer Feder, welche an einer Aufhängung befestigt ist und frei hängt. Am unteren Ende der Feder ist eine kleine Plastikschale mit Schnüren befestigt, in die Gewichte gelegt werden können. Hinter der Feder befindet sich eine Messskala, die verwendet wird, um die Auslenkung s zu bestimmen. Bereitgelegt sind außerdem Eichmassen, eine Messschraube und ein Messschieber. Hinzu kommen zwei unbekannte Probemassen: Ein zylinderförmiges Reinmetall und eine Messinglegierung in Quaderform mit zwei runden und senkrechten Löchern, der Durchmesser d_1 und d_2.

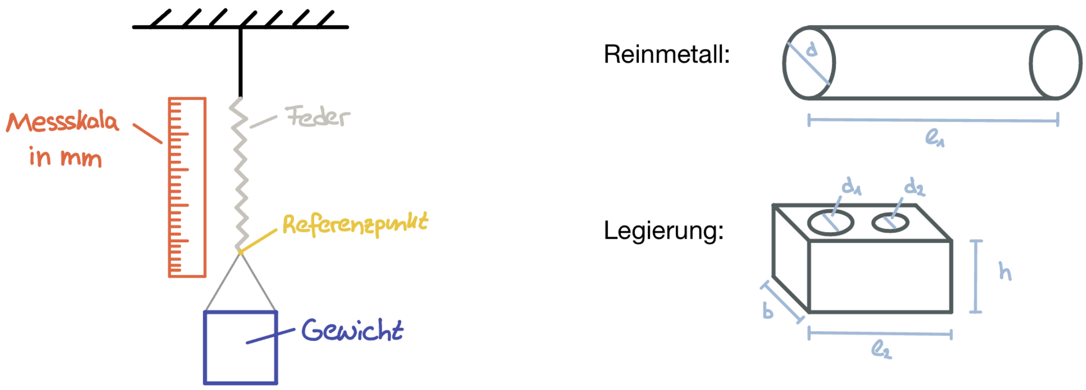


Abbildung 1: Versuchsaufbau mit Skizzen der beiden Probemassen

2.2 Durchführung

Zuerst wird der Versuchsaufbau kalibriert, indem die Auslenkung s der Feder für Gewichte von 0 bis 100g gemessen wird. Dazu werden Eichmassen mit bekannter Masse m verwendet. Hierzu wird die Auslenkung am unteren Ende der Feder, am Berührpunkt mit den Schnüren, abgelesen. Dieser Punkt ist als „Referenzpunkt“ in Abb. 1 eingezeichnet. Im zweiten Teil wird die Auslenkung der Federwaage unter der Last des Reinmetalls gemessen. Zusätzlich wird die Länge l der zylinderförmigen Reinmetallprobe mit dem

Messschieber und der Durchmesser d mit der Messschraube gemessen, um anschließend das Volumen V zu berechnen. Aus der Auslenkung der Waage lässt sich die Masse des Metalls berechnen und die gesuchte Dichte ϱ erhält man mit der Formel:

$$\varrho = \frac{m}{V} \tag{1}$$

Zuletzt wird die Messinglegierung untersucht, welche aus Kupfer und Zink besteht[1]. Dazu wird äquivalent zu dem Reinmetall vorgegangen. Für die Volumenberechnung wurde hierbei der Messschieber für die Bestimmung der Länge l und die Durchmesser der beiden Löcher verwendet. Die Messschraube wurde verwendet um die Höhe h, sowie die Breite b zu messen. Abschließend wird der Kupfer- und Zinkanteil berechnet.

3 Auswertung und Fehleranalyse

3.1 Eichung

Für die Eichung wurden verschiedene Massen in die Federwaage gelegt und die Auslenkung abgemessen. Die Gewichte zur Kalibrierung haben eine angegebene Masse m in Gramm und einen Fehler Δm im Bereich Milligramm. Da bei der Messung andere Fehler, z.B. die Ableseungenauigkeit, stark überwiegen, werden die Unsicherheiten der Eichmassen im Folgenden vernachlässigt. Hier die Ergebnisse als Tabelle:

Masse (g)	0	1	2	3	4	5	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Auslenkung (mm)	468	463	459	454	450	445	423	402	380	336	292	249	206	163	119	77	33

Die Auslenkungen werden gegen die Massen in einem Plot (Abb. 2) von Hand aufgetragen und mithilfe von einer Ausgleichsgeraden ausgewertet.
Die Ausgleichsgerade hat die Form:

$$s = am + b$$

Die Variable s ist dabei die Auslenkung, und m steht für die Masse. Der Parameter a beschreibt die Steigung der Gerade und wurde mit einem Steigungsdreieck ermittelt. Der Parameter b entspricht dem s-Achsenabschnitt. Mit vier zusätzlich eingezeichneten Grenzgeraden wurde ein Konfidenzband gebildet und damit die Unsicherheiten für die beiden Parameter a und b bestimmt. Für die Steigung ergibt sich $a = (-4,3 \pm 0,4)\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{g}}$ und dem s-Achsenabschnitt $b = (465 \pm 15)\,\mathrm{mm}$. Um die Masse m eines Gewichtsstück zu bestimmen, kann die Gleichung für die Ausgleichsgerade nach m umgestellt werden. Man erhält folgende Gleichung :

$$m = \frac{s - b}{a} \tag{2}$$

[1] [Kup07]

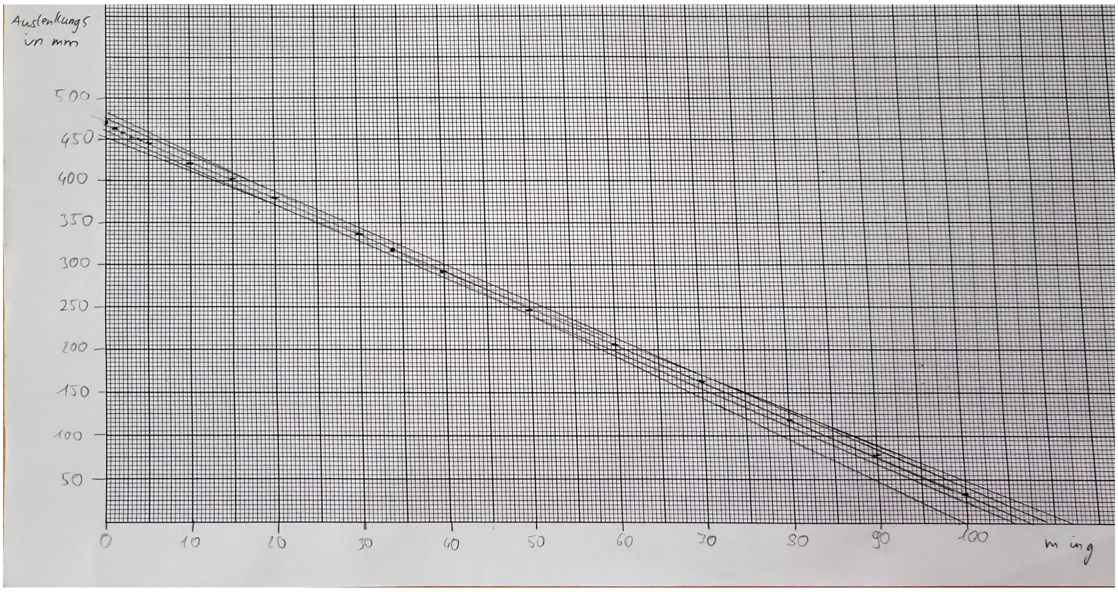


Abbildung 2: Eichwerte und Ausgleichsgerade, sowie Konfidenzband

3.2 Reinmetall

Um die Dichte ϱ_R des Reinmetalls zu ermitteln, muss die Masse m_R sowie das Volumen V_R der Probemasse bestimmt werden.
Die Masse m_R wird mittels der, über die kalibrierte Federwaage, gemessenen Auslenkung $s = 397\text{mm}$ und Gleichung (2) ausgerechnet:

$$m_R = (15,8 \pm 2,6)\,\text{g}$$

Die Standardunsicherheit wurde per Gaußscher Fehlerfortpflanzung mit folgender Formel ermittelt. Die Standardunsicherheit Δs wurde hierzu mit $a = 2\text{mm}$ und einer Dreiecksverteilung bestimmt. Die Unsicherheit begründet sich durch die Ableseunsicherheit bei der Federwaage.

$$\Delta m_R = \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial s}\Delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial a}\Delta a\right)^2} = 2,6\text{g}$$

Das Volumen V_R kann über Längenabmessungen bestimmt werden. Für den zu untersuchenden Zylinder gilt folgende Volumenformel:

$$V_R = \frac{1}{4}\pi d^2 l_1 \tag{3}$$

Die Länge l_1 wird mit einem Messschieber gemessen. Die Unsicherheit ist bedingt durch die Ableseungenauigkeit und wird mittels der Dreiecksverteilung ($a = 0,05\text{mm}$) quantifiziert:

$$l_1 = (44,35 \pm 0,02)\,\text{mm}$$

Der Durchmesser d wurde hierbei mit einer Messschraube gemessen. Die Unsicherheit begründet sich wiederum in der Ablesenunsichert und wird mit der Dreiecksverteilung ($a = 0,01$mm) berechnet. Es ergibt sich:

$$d = (8,030 \pm 0,004)\,\text{mm}$$

Eingesetzt in Formel 3 kommt man auf folgendes Volumen für das Reinmetall:

$$V_R = (2,246 \pm 0,002)\,\text{cm}^3$$

Die Unsicherheit in dem Ergebnis wurde dabei mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung wie folgt berechnet:

$$\Delta V_R = \sqrt{\left(\frac{\partial V_R}{\partial d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial V_R}{\partial l_1}\Delta l_1\right)^2} = 0,002\text{cm}^3$$

Aus alledem folgt nun für die Dichte ϱ_R mit Hilfe von Gleichung (1):

$$\varrho_R = \frac{m_R}{V_R} = (7,0 \pm 1,1)\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Die Standardunsicherheit wurde dabei wiel folgt berechnet:

$$\Delta \varrho_R = \sqrt{\left(\frac{\partial \varrho_R}{\partial m_R}\Delta m_R\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_R}{\partial V_R}\Delta V_R\right)^2} = 1,1\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Vanadium
Tellur
Zirconium
Antimon
Chrom
Zink
Indium
Zinn
Mangan
Eisen

Tabelle 1: Liste der Reinmetalle die innerhalb der Unsicherheit liegen

Einige Metalle und Halbmetalle, welche sich im Unsicherheitsbereich der Dichte ϱ_R befinden[2] sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Für die Unsicherheit der Literaturwerte wurde $\Delta\varrho_l = 0$ angenommen, da diese um Größenordnungen kleiner ist als die unserer Messung. Die geringste Abweichung ist dabei zu Zink und Chrom, beide mit einer Dichte $\varrho = 7,140\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

[2] [Bar23]

3.3 Legierung

Die Masse m_L wird, analog zum Reinmetall, mit der Federwaage bestimmt. Aus der gemessenen Auslenkung $s = 269\text{mm}$ kann für die Legierung mit Gleichung (2) die Masse ausgerechnet werden. Es ergibt sich:

$$m_L = (45.6 \pm 4.9)\,\text{g}$$

Die Standardunsichert Δm_L wurde auf gleiche Weise bestimmt wie die Standardunsicherheit Δm_R für das Reinmetall.
Für die Volumenberechnung ergibt sich folgende Formel:

$$V_L = \left(b l_2 - \frac{1}{4}\pi d_1^2 - \frac{1}{4}\pi d_2^2 \right) h \tag{4}$$

Die Breite b und die Höhe h wurden mit einer Messschraube gemessen. Die Unsicherheit der Messwerte begründet sich in der Ableseunsicherheit und wurde jeweils mit der Dreiecksverteilung ($a = 0,01\text{mm}$) quantifiziert. Für die beiden Werte ergibt sich:

$$b = (18,030 \pm 0,004)\,\text{mm}$$

$$h = (11,700 \pm 0,004)\,\text{mm}$$

Die Länge l_2 sowie die Durchmesser d_1 und d_2 wurden mit dem Messschieber gemessen. Die Unsicherheit ist wiederum durch die Ableseungenauigkeit bedingt und lässt sich ebenfalls mit der Dreiecksverteilung ($a = 0,05\text{mm}$) genauer ausdrücken. Für die drei Messwerte folgt:

$$l_2 = (38,20 \pm 0,02)\,\text{mm}$$

$$d_1 = (12,85 \pm 0,02)\,\text{mm}$$

$$d_2 = (10,80 \pm 0,02)\,\text{mm}$$

Werden diese Werte in Gleichung (4) eingesetz so ergibt sich folgendes Ergebnis für das Volumen der Legierung:

$$V_L = (5,470 \pm 0,008)\,\text{cm}^3$$

Die Standardunsichert ΔV_L wurde hierbei mit der Formel der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt. Angewendet auf dieses Problem sah diese wie folgt aus:

$$\Delta V_L = \sqrt{\left(\frac{\partial V_L}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial V_L}{\partial l_2}\Delta l_2\right)^2 + \left(\frac{\partial V_L}{\partial d_1}\Delta d_1\right)^2 + \left(\frac{\partial V_L}{\partial d_2}\Delta d_2\right)^2 + \left(\frac{\partial V_L}{\partial h}\Delta h\right)^2} = 0,008\text{cm}^3$$

Nun ist die Masse m_L sowie das Volumen V_L bekannt und es kann die Dichte ϱ_L berechnet werden:

$$\varrho_L = \frac{m_L}{V_L} = (8,3 \pm 0,9)\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Die Standardunsicherheit wurde mittels der Formel der Gaußschen Fehlerfortpflanzung wie folgt berechnet:

$$\Delta\varrho_L = \sqrt{\left(\frac{\partial\varrho_L}{\partial m_L}\Delta m_L\right)^2 + \left(\frac{\partial\varrho_L}{\partial V_L}\Delta V_L\right)^2} = 0,9\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

In einem letzten Schritt sollen nun die Massenanteile der beiden Komponenten bestimmt werden. Die Dichte von Kupfer $\varrho_{Cu} = 8,920\mathrm{g/cm}^3$ und von Zink $\varrho_{Zn} = 7,140\mathrm{g/cm}^3$ sind in der Versuchsbeschreibung[3] angegeben. Diese Werte werden im folgenden als exakt angenommen. Für den Massenanteil von Kupfer n_{Cu} ergibt sich folgende Formel, die sich aus den Gleichungen für das Volumen und der Masse der Legierung zusammensetzt.

$$n_{Cu} = \frac{m_{Cu}}{m_L} = \frac{\varrho_{Cu}}{\varrho_L}\cdot\frac{\varrho_L - \varrho_{Zn}}{\varrho_{Cu} - \varrho_{Zn}} = 0,717 \pm 0,466 = (71,7 \pm 46,6)\%$$

Der Fehler wurde mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung für eine Variable mit folgender Gleichung, ermittelt:

$$\Delta n_{Cu} = |\frac{dn_{Cu}}{d\varrho_L}|\Delta\varrho_L = 46,6\%$$

Damit folgt für den Massenanteil von Zink:

$$n_{Zn} = 1 - n_{Cu} = (28,3 \pm 46,6)\%$$

Die große Unsicherheit der beiden Werte, ergibt sich aus der Unsicherheit der Dichte der Legierung, die relativ zu den Dichten von Kupfer und Zink extrem hoch ist. Die große Unsicherheit ist damit nicht überraschend. Betrachtet man beispielsweise die Dichte $\varrho = \varrho_L + \Delta\varrho_L$, dann ist dieser Wert sogar höher als die Dichten von Kupfer und Zink.

4 Diskussion der Ergebnisse

4.1 Übersichtliche Angabe der Endergebnisse

Die Messungen liefern folgendes Ergebnis für die Dichte ϱ_R des Reinmetalls:

$$\varrho_R = \frac{m_R}{V_R} = (7,0 \pm 1,1)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

Das analoge Vorgehen bei der Bestimmung der Dichte ϱ_L der Messinglegierung führt zu folgendem Ergebnis:

$$\varrho_L = \frac{m_L}{V_L} = (8,3 \pm 0,9)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

Damit folgt für die Massenanteile n_{Cu} und n_{Zn}:

$$n_{Cu} = (71,7 \pm 46,6)\%$$
$$n_{Zn} = (28,3 \pm 46,6)\%$$

[3] [Bar23]

4.2 Vergleich mit erwartetem Ergebniss

In den meisten Anwendungen von Messing, besteht die Legierung aus einem Zink Anteil von 5-45%. Darüber oder darunter ist wenig gebräuchlich. Somit wird auch bei der zu untersuchenden Legierung ein solcher Wert erwartet. Der Bestwert von 28,3% für Zink deckt sich mit dieser Erwartung.

4.3 Statistische Fehler

Die relative Unsicherheit in der Bestimmung der Dichte ϱ_R berechnet sich zu:

$$\frac{\Delta\varrho_R}{\hat{\varrho}_R} = 0,16$$

Für die relative Unsicherheit im Ergebnis der Legierung ergibt sich:

$$\frac{\Delta\varrho_L}{\hat{\varrho}_L} = 0,11$$

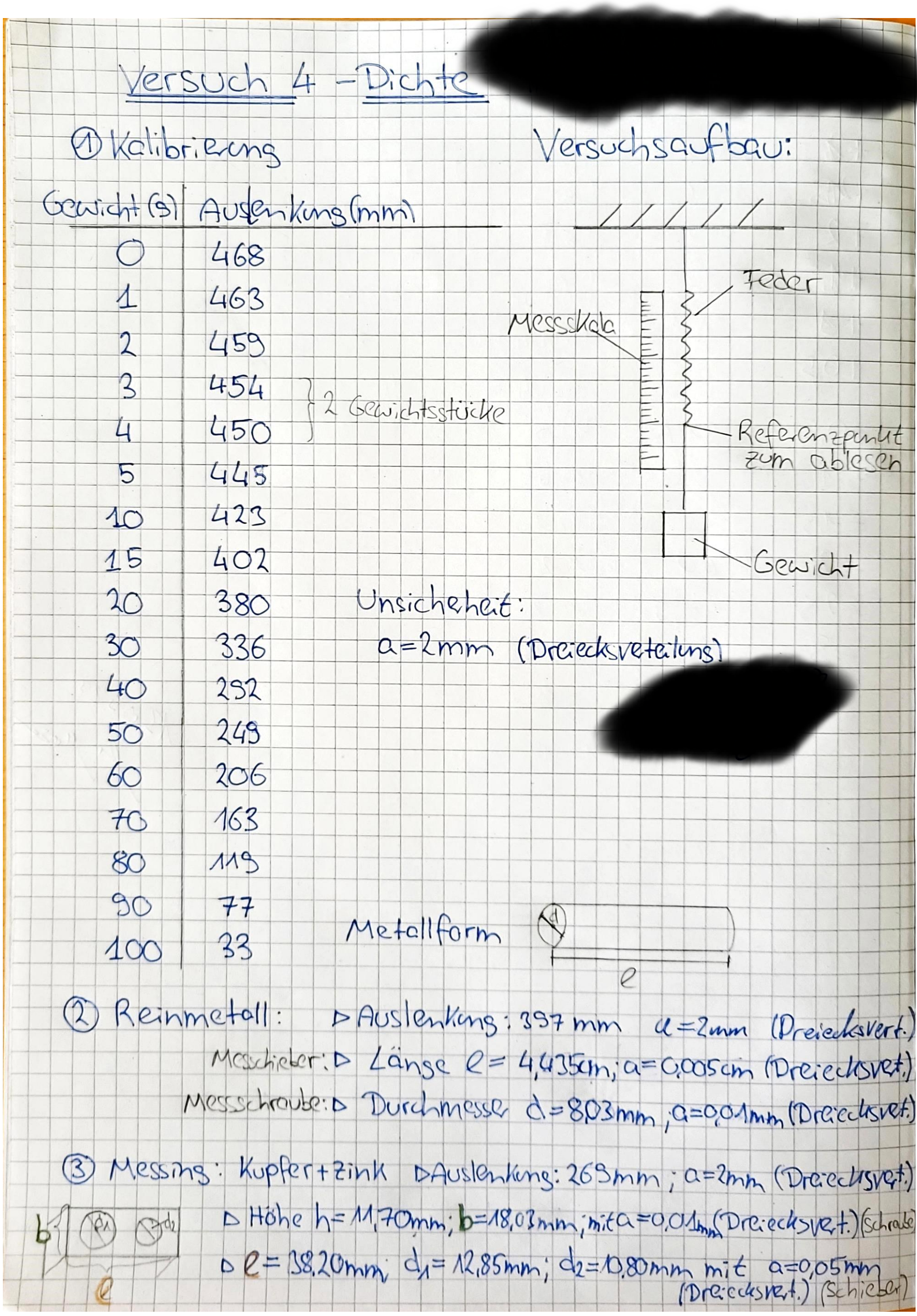
Diese relativ großen Unsicherheiten sind jeweils bedingt durch die Unsicherheit in der Längenmessung und in der Messung der Masse beziehungsweise der Auslenkung der Federwaage. Dabei dominiert der Beitrag aus der Massenbestimmung. Der Beitrag aus der Längenmessung kann vernachlässigt werden. Für ein genaueres Endergebnis mit geringerer Unsicherheit ist es somit entscheidend die Unsicherheit in der Massenbestimmung zu reduzieren. Die größte Unsicherheit entsteht hierbei beim Ablesen der Auslenkung der Federwaage. Obwohl die Skala mit einem Spiegel ausgestattet ist, um den Parallaxenfehler zu reduzieren, ist es dennoch sehr schwierig einen exakten Wert abzulesen. Hilfreich könnte es sein, wenn die Skala näher an der Feder wäre. Noch besser wäre es, wenn die Feder sich in einem Gehäuse befinden würde. Ist eine Skala an diesem Gehäuse angebracht, wird das Ablesen eines Wertes deutlich genauer. Außerdem könnte die Feder nicht mehr seitlich schwingen und es könnte ungewolltes Wippen verhindert werden. Eine weitere Unsicherheit begründet sich in der Bestimmung der Ausgleichsgerade inklusive Unsicherheiten per Hand bei der Eichung der Federwaage. Vor allem das Einzeichnen der Grenzgeraden, sodass diese von der Ausgleichsgerade zu unterscheiden sind und trotzdem noch die Paramter a und b bestimmt werden können, stellt eine Herausforderung dar. Eine größere Zeichenfläche oder eine Auswertung mit dem Computer könnten dabei eine größere Auflösung ermöglichen und die Unsicherheit reduzieren.

4.4 Systematische Fehler

Eine Verbesserung des Versuchs könnte durch mehrere Dinge erreicht werden. Die verwendete Feder war leicht verbogen. Dies könnte die Auslenkung der Masse bei verschiedenen Gewichten beeinflusst haben. Um Abweichungen zu vermeiden könnte eine neue Feder Abhilfe schaffen. Außerdem wäre ein noch stabilerer Untergrund hilfreich, um Schwingungen der Feder durch Anstoßen am Tisch zu vermeiden. Systematische Abweichungen könnten auch bei der Längenmessungen entstanden sein. Um die Volumenformeln, Gleichung (3) und Gleichung (4), anwenden zu können, wurde angenommen, dass die Massen eine perfekt glatte Oberfläche vorweisen. Da dies in der Realität nicht der Fall ist, kann das Volumen in Wirklichkeit etwas größer oder kleiner ausfallen. Auch mehrmaliges Messen kann diese mögliche Abweichung nicht verhindern. Dies könnte eine Auswirkung auf die Berechnung des Bestwertes für die Dichte ϱ_R und ϱ_L haben.

5 Anhang

5.1 Rohdaten mit Vortestat



Versuch 4 – Dichte [redacted]

① Kalibrierung

Gewicht (g)	Auslenkung (mm)
0	468
1	463
2	459
3	454
4	450
5	445
10	423
15	402
20	380
30	336
40	292
50	249
60	206
70	163
80	119
90	77
100	33

2 Gewichtsstücke

Versuchsaufbau:

Unsicherheit:
$a = 2\,mm$ (Dreiecksverteilung)

[redacted]

Metallform

② Reinmetall: ▷ Auslenkung: 397 mm $a = 2\,mm$ (Dreiecksvert.)
Messschieber: ▷ Länge $l = 4{,}435\,cm$; $a = 0{,}005\,cm$ (Dreiecksvert.)
Messschraube: ▷ Durchmesser $d = 8{,}03\,mm$; $a = 0{,}01\,mm$ (Dreiecksvert.)

③ Messing: Kupfer + Zink ▷ Auslenkung: 269 mm; $a = 2\,mm$ (Dreiecksvert.)

▷ Höhe $h = 11{,}70\,mm$; $b = 18{,}03\,mm$; mit $a = 0{,}01\,mm$ (Dreiecksvert.) (Schraube)
▷ $l = 38{,}20\,mm$; $d_1 = 12{,}85\,mm$; $d_2 = 10{,}80\,mm$ mit $a = 0{,}05\,mm$ (Dreiecksvert.) (Schieber)

Literatur

[Bar23] Dr. Christoph Bartels. *Versuch 4 Dichte*. 4. Sep. 2023.

[Kup07] Deutsches Kupferinstitut. *Kupfer-Zink-Legierungen (Messing und Sondermessing)*. März 2007. URL: https://kupfer.de/wp-content/uploads/2019/09/i5.pdf (besucht am 16. 09. 2023).